АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2012, том 58, № 5, с. 571–579

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ, ПАДАЮЩЕЙ ПОД МАЛЫМ УГЛОМ К ОСИ СИЛЬНО ВЫТЯНУТОГО СФЕРОИДА

© 2012 г. И. В. Андронов

Санкт-Петербургский государственный университет, НИИФ
198504 Петродворец, Ульяновская 1/1
E-mail: iva---@list.ru

Поступила в редакцию 14.11.2011 г.

Исследуется высокочастотное акустическое поле в области полутени на поверхности сильно вытянутого тела вращения. Полученные ранее для осевого падения плоской волны асимптотические формулы обобщены на случай падения волны под малым углом к оси тела. Представлены результаты расчетов. Проанализировано влияние угла падения и параметра, описывающего степень вытянутости тела, на характер распределения поля по поверхности.

Ключевые слова: асимптотические методы, высокочастотная дифракция, сильно вытянутое тело, параболическое уравнение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы продолжаем исследование процессов высокочастотной дифракции на сильно вытянутом теле вращения, начатое в работах [1–3]. Изначальная идея этих работ заключалась в аппроксимации поверхности вытянутого тела вращения поверхностью сфероида с подходящим образом подобранными осями. Введенное в [4] понятие сильно вытянутого тела в случае задачи дифракции на сфероиде характеризуется предположениями

$$ka \gg 1, \quad kb \gg 1, \quad \frac{ka^2}{b} \equiv \chi = O(1), \tag{1}$$

где k – волновое число, a и b – малая и большая полуоси сфероида. В [1, 3] показано, что для задач дифракции электромагнитных волн асимптотика, построенная в таких предположениях, достаточно точно согласуется с реальными дифракционными полями в широком диапазоне параметров.

При указанных соотношениях (1) между параметрами все тело оказывается в области, которую принято характеризовать как область полутени. Вообще говоря, для дифракции на сильно вытянутом теле не совсем корректно привычное выделение полутени как области влизи геометрической границы тени, имеющей размер $d = \sqrt[3]{2\rho_0^2/k}$ [5], где ρ_0 – радиус кривизны нормального сечения поверхности плоскостью падения, поскольку такое определение полутени предполагает медленное изменение геометрических параметров поверхности, что в свою очередь приводит к локальному характеру поля в области полутени. В случае сильно вытянутого сфероида на расстояниях порядка d радиус кривизны ρ изменяется в $k\rho_0$ раз от своего максимального значения b^2/a в середине до своего минимального значения a^2/b, достигаемого в конце сфероида, то есть изменяется в асимптотически большое число раз. Кроме того, при исследовании полутеневых полей в случае обычной поверхности, ширина области полутени велика, а бинормаль к геодезическим на поверхности меняется медленно. В случае сильно вытянутого тела малое смещение точки наблюдения в поперечном направлении приводит к существенному изменению направления бинормали. В результате малое изменение направления падающего поля в случае сильно вытянутого тела приводит к сильному перемещению границы геометрической тени, а значит и к сильному изменению геометрических характеристик поверхности в точке касания предельного луча.

Все это приводит к специфике дифракционных эффектов в случае сильно вытянутого тела, исследовнию которых и посвящены работы [1–3] и данная статья. В [2] построен старший член асимптотики акустического поля на абсолютно жестких и абсолютно мягких сильно вытянутых сфероидах. При этом, также как и в работах [1, 3], рассматривался случай падения плоской волны строго вдоль оси сфероида. Теперь мы обобщаем результаты [2] на случай падения плоской волны под некоторым малым углом.

Отметим, что развиваемый подход отличается от используемого в [6] тем, что предполагает сфероид сильно вытянутым, но в то же время, в отличие от [7], его поперечный размер асимптотически велик.

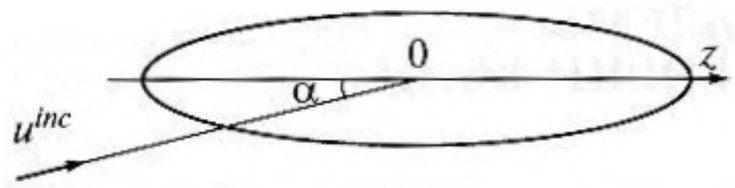

Рис. 1. Геометрия задачи.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, РАСТЯНУТЫЕ КООРДИНАТЫ

Рассмотрим задачу дифракции плоской акустической волны на вытянутом сфероиде (рис. 1). Пусть волна падает под некоторым углом α к оси сфероида. В цилиндрической системе координат (z, r, φ), связанной со сфероидом, имеем

$$u^{inc} = \exp(ikz\cos\alpha + ikr\sin\alpha\cos\varphi).$$

Разложим эту волну в ряд Фурье по углу φ:

$$u^{inc} = e^{ikz\cos\alpha}\left(J_0(kr\sin\alpha) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} i^n J_n(kr\sin\alpha)\cos(n\varphi)\right). \tag{2}$$

В случае $\alpha = 0$ ряд в правой части (2) обращается в нуль, а функция Бесселя нулевого значка заменяется единицей. В этом случае задача дифракции рассмотрена в [2].

Пусть $\alpha \neq 0$. Ввиду (2) задача дифракции на сфероиде сводится к дифракции отдельных угловых гармоник. Рассмотрим уравнение Гельмгольца для акустического поля, зависящего от угловой координаты φ цилиндрической системы координат (r, φ, z) посредством множителя $\cos(n\varphi)$,

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}u_n + \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + k^2 u_n = 0.$$

Следуя [2], введем вытянутые сфероидальные координаты (ξ, η)

$$z = p\xi\eta, \quad r = p\sqrt{\xi^2 - 1}\sqrt{1-\eta^2}, \quad p = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Поверхность сфероида в координатах (ξ, η) задается условием $\xi = b/p$. В случае сильно вытянутого сфероида b/p близко к единице и мы вводим вместо ξ растянутую координату τ, так что

$$\xi = 1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}\tau.$$

Учитывая, что $a = k^{-1/2}b^{1/2}\chi^{1/2}$, и отбрасывая малые члены, будем считать, что

$$z = b\eta - \frac{\chi}{2k}(\tau - 1)\eta, \quad r = \sqrt{\frac{b}{k}}\sqrt{\chi\tau}\sqrt{1-\eta^2}.$$

Будем таже предполагать, что угол α асимптотически мал, и положим

$$\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{kb}}, \quad \beta = O(1),$$

так что

$$kz\cos\alpha = kb\eta - \frac{\chi}{2}\eta - \frac{\beta^2}{2}\eta + \frac{\chi}{2}\eta\tau + \ldots,$$

$$kr\sin\alpha = \beta\sqrt{\chi\tau}\sqrt{1-\eta^2} + \ldots$$

Асимптотику решения задачи дифракции будем строить по методу параболического уравнения. Выделим быстро осциллирующий множитель

$$u_n = \exp(ikb\eta)U_n(\eta, \tau).$$

Для функции U_n, которую будем называть функцией ослабления, в старшем по kb порядке получим уравнение

$$\tau\frac{\partial^2 U_n}{\partial\tau^2} + \frac{\partial U_n}{\partial\tau} + \frac{i\chi}{2}(1-\eta^2)\frac{\partial U_n}{\partial\eta} + \left(\frac{\chi^2}{4}\tau - \frac{n^2}{4\tau} - \frac{\chi^2}{4}(1-\eta^2) - \frac{i\chi}{2}\eta\right)U_n = 0. \tag{3}$$

Отметим, что в [2] вместо τ использовалась координата $\nu = 2^{1/3}\chi^{2/3}\tau$.

Краевые условия для уравнения (3) задаются при $\tau = 1$. Будем рассматривать два случая краевых условий, условия Дирихле и условия Неймана.

3. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Параболическое уравнение (3) будем решать методом разделения переменных. Пропуская несложные преобразования, которые аналогичны приведенным в [2], запишем результат

$$U_n = \frac{e^{-i\chi\eta/2}}{\sqrt{\tau}\sqrt{1-\eta^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{it\mu} \times \left\{A_n(t)M_{it,n/2}(-i\chi\tau) + B_n(t)W_{it,n/2}(-i\chi\tau)\right\}dt. \tag{4}$$

Здесь M и W – функции Уиттекера, а множители $A_n(t)$ и $B_n(t)$ подлежат определению. Функция Уиттекера M регулярна в нуле и содержащее ее слагаемое выражает функцию ослабления, отвечающую падающей волне. Функция Уиттекера W имеет асимптотику [8] (формула (9.227))

$$W_{\mu,n/2}(x) \sim x^{\mu}e^{-x/2}, \quad |x| \to +\infty, \quad |\arg(x)| \leq \pi - \varepsilon,$$

и содержащее ее слагаемое удовлетворяет условиям излучения.

Найдем сначала представление для функции ослабления падающей волны в форме (4). Положив $\tau = 1$, получим для функции $A_n(t)$ интегральное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\chi}\sqrt{1-\eta^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{it}A_n(t)M_{it,n/2}(-i\chi)\,dt = \exp\left(i\frac{\chi}{2}\eta - i\frac{\beta^2}{2}\eta\right)J_n\left(\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{\chi}\beta\right), \quad \eta \in [-1, 1].$$

Введем новые переменные s и λ, положив

$$\eta = \frac{s-1}{s+1}, \quad t = -i\lambda.$$

Интегральный оператор в уравнении при этом сводится к обратному преобразованию Меллина

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} s^{-\lambda} f(\lambda)d\lambda = 2i\frac{\sqrt{\chi s}}{s+1}\exp\left(\frac{i}{2}(\chi-\beta^2)\frac{s-1}{s+1}\right)\times$$

$$\times J_n\left(2\frac{\sqrt{\chi s}}{s+1}\beta\right),$$

где

$$f(\lambda) = M_{\lambda,n/2}(-i\chi)A_n(-i\lambda).$$

Решение дается прямым преобразованием Меллина, откуда находим

$$f(\lambda) = \frac{\sqrt{\chi}}{\pi}\int_0^{+\infty} s^{\lambda-1}\frac{\sqrt{s}}{s+1}\times$$

$$\times\exp\left(\frac{i}{2}(\sqrt{\chi}-\beta^2)\frac{s-1}{s+1}\right)J_n\left(\frac{2\beta\sqrt{\chi s}}{s+1}\right)ds.$$

Теперь вернемся к переменной η

$$f(\lambda) = \frac{\sqrt{\chi}}{\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^{\lambda-1/2}\exp\left(\frac{i}{2}(\sqrt{\chi}-\beta^2)\eta\right)\times$$

$$\times J_n\left(\beta\sqrt{\chi}\sqrt{1-\eta^2}\right)\frac{d\eta}{1-\eta}.$$

Наконец положим $\eta = \cos(\psi)$, откуда

$$f(\lambda) = -\frac{\sqrt{\chi}}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{tg}^{-2\lambda}\left(\frac{\psi}{2}\right)\times$$

$$\times\exp\left(\frac{i}{2}(\sqrt{\chi}-\beta^2)\cos\psi\right)J_n\left(\sqrt{\chi}\beta\sin\psi\right)d\psi,$$

и воспользуемся формулой (2.12.27.3) из [9]

$$\int_0^{\pi} e^{p\cos x}\mathrm{tg}^{2m}\left(\frac{x}{2}\right)J_{2n}(c\sin(x))dx =$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\Gamma(m+n+1/2)\Gamma(n-m+1/2)}{\Gamma^2(2n+1)}M_{m,n}(z_+)M_{m,n}(z_-),$$

где

$$z_\pm = p \pm \sqrt{p^2-c^2}.$$

Окончательно находим

$$\exp\left(\frac{i}{2}(\chi\tau-\beta^2)\eta\right)J_n\left(\sqrt{1-\eta^2}\beta\sqrt{\chi\tau}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}\beta\sqrt{\chi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{it}M_{it,n/2}(-i\chi\tau)\times$$

$$\times M_{it,n/2}(i\beta^2)\Omega_n(t)dt,$$

где

$$\Omega_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma(it+n/2+1/2)\Gamma(n/2+1/2-it)}{\Gamma^2(n+1)}.$$

То есть, для множителя $A_n(t)$ в интегральном представлении (4) получаем формулу

$$A_n(t) = \frac{M_{it,n/2}(i\beta^2)\Omega_n(t)}{\beta\sqrt{\chi}}.$$

4. ПОЛНОЕ ПОЛЕ

Теперь найдем амлитудный множитель $B_n(t)$. Он должен быть выбран таким, чтобы выполнялись краевые условия на поверхности сфероида, и его удобно представить в виде $B_n(t) = A_n(t)R_n(t)$, где функция $R_n(t)$ играет роль коэффициента отражения. В случае условий Дирихле и Неймана соответственно находим

$$R_n = -\frac{M_{it,n/2}(-i\chi)}{W_{it,n/2}(-i\chi)},$$

$$R_n = -\frac{M_{it,n/2}(-i\chi)+2i\chi\dot{M}_{it,n/2}(-i\chi)}{W_{it,n/2}(-i\chi)+2i\chi\dot{W}_{it,n/2}(-i\chi)}.$$

Здесь и далее точка обозначает производную функции.

Таким образом, все функции, входящие в формулу (4), определены. Гамма функции, входящие в множители $\Omega_n(t)$, можно исключить при помощи формулы симметрии, что приводит к рекуррентным выражениям

$$\Omega_0(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\pi t)}, \quad \Omega_{2\ell} = \frac{(\ell-1/2)^2+t^2}{4\ell^2(2\ell-1)^2}\Omega_{2\ell-2}(t),$$

$$\ell = 1,2,\ldots$$

$$\Omega_1(t) = \frac{t}{\mathrm{sh}(\pi t)}, \quad \Omega_{2\ell+1} = \frac{\ell^2+t^2}{4\ell^2(2\ell+1)^2}\Omega_{2\ell-1}(t),$$

$$\ell = 1,2,\ldots$$

удобным при численном счете поля. Однако мы будем исследовать поле при $\tau = 1$, то есть на поверхности сфероида.

Вычислим производную акустического поля на поверхности акустически мягкого тела. Используя выражение для вронскиана функций Уиттекера

$$\dot{M}_{\mu,\ell}(x)W_{\mu,\ell}(x) - \dot{W}_{\mu,\ell}(x)M_{\mu,\ell}(x) = \frac{\Gamma(1+2\ell)}{\Gamma(1/2+\ell-\mu)},$$

которое следует из формул (13.1.22), (13.1.32) и (13.1.33) из [10], несложно получить следующую асимптотику производной поля на поверхности тела

$$\left.\frac{\partial U_n}{\partial\tau}\right|_{\tau=1} = \frac{1}{n!\pi}\frac{e^{-i\chi\eta/2}}{\sqrt{\chi}\beta\sqrt{1-\eta^2}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{it}\Gamma\left(\frac{1+n}{2}+it\right)\frac{M_{it,n/2}(i\beta^2)}{W_{it,n/2}(-i\chi)}dt. \tag{5}$$

Проводя суммирование по всем угловым гармоникам согласно (2), получим для полного поля,

возбуждаемого падающей плоской волной, следующий старший по асимптотически большому параметру $\sqrt{kb}$ член

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\tau}\right|_{\tau=1}=\frac{e^{ikb\eta}}{\pi}\frac{e^{-i\chi\eta/2}}{\sqrt{\chi}\beta\sqrt{1-\eta^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{it}\times$$
$$\times\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\frac{M_{it,0}(i\beta^2)}{W_{it,0}(-i\chi)}+\right. \tag{6}$$
$$\left.+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+it\right)\frac{M_{it,n/2}(-\beta^2)}{W_{it,n/2}(-i\chi)}\cos(n\varphi)\right\}dt.$$

Для случая условий Неймана асимптотика поля на поверхности может быть получена аналогичным образом

$$u|_{\tau=1}=\frac{-2ie^{ikb\eta}}{\pi}\frac{\sqrt{\chi}e^{-i\chi\eta/2}}{\beta\sqrt{1-\eta^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{it}\times$$
$$\times\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\frac{M_{it,0}(i\beta^2)}{W_{it,0}(-i\chi)+2i\chi\dot{W}_{it,0}(-i\chi)}+\right. \tag{7}$$
$$+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+it\right)\times$$
$$\left.\times\frac{M_{it,n/2}(i\beta^2)}{W_{it,n/2}(-i\chi)+2i\chi\dot{W}_{it,n/e}(-i\chi)}\cos(n\varphi)\right\}dt.$$

Отметим, что имеют место пределы (см. формулы (13.1.2) и (13.1.32) из [10])

$$\lim_{\beta\to+0}\frac{M_{it,0}(i\beta^2)}{\beta}=e^{i\pi/4},$$

$$\lim_{\beta\to+0}\frac{M_{it,n}(i\beta^2)}{\beta}=0,\quad n=1,2,\ldots$$

Таким образом, формулы (6) и (7) при $\beta=0$ сводятся к полученным в [2].

Полная асимптотика поля представляет собой разложение по обратным степеням большого параметра $\sqrt{kb}$. Мы нашли лишь старшие члены этой асимптотики, представленные формулами (6) и (7). Однако примененная в статье процедура позволяет получить поправки любого порядка. При этом поправочные члены, по-видимому, будут содержать сингулярности при $\eta=\pm1$, что приведет к потере асимптотического характера разложения вблизи концов сфероида.

Формулы (6) и (7) не содержат асимптотических параметров (за исключением быстро осциллирующего множителя) и поэтому не допускают упрощения при помощи перехода к асимптотикам интегралов и рядов. Такое упрощение можно получить разве что при устремлении координаты η к ±1, но в этих областях сами приближения (6), (7), как отмечено выше, по-видимому, неверны.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для вычисления функций Уиттекера, входящих в асимптотические выражения (6) и (7), воспользуемся программой, разработанной в [11]. Для этого надо выразить подынтегральные выражения через волновые функции Кулона. Воспользовавшись формулами (13.1.32), (13.6.8) и (14.1.7) из [10], несложно получить следующее выражение функции Уиттекера M через волновую функцию Кулона F:

$$M_{it,n/2}(i\beta^2)=2\exp\left(i\frac{\pi}{4}(n+1)+\frac{\pi}{2}t\right)\times$$
$$\times\frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+it\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}-it\right)}}F_{(n-1)/2}\left(t,\frac{\beta^2}{2}\right).$$

В [11] находим выражение для функции Уиттекера W через волновую функцию Кулона H^+, откуда

$$W_{it,n/2}(-i\chi)=\exp\left(i\frac{\pi}{4}(n-1)+\frac{\pi}{2}t\right)\times$$
$$\times\sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+it\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}-it\right)}}H^+_{(n-1)/2}\left(-t,\frac{\chi}{2}\right).$$

Подставляя эти выражения в формулы (6) и (7), получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\tau}\right|_{\tau=1}=e^{ikb\eta}\frac{2i}{\pi}\frac{e^{-i\chi\eta/2}}{\sqrt{\chi}\beta\sqrt{1-\eta^2}}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{it}\left\{\frac{F_{-1/2}\left(t,\beta^2/2\right)}{H^+_{-1/2}(-t,\chi/2)}+\right. \tag{8}$$
$$\left.+2\sum_{n=1}^{+\infty}e^{i\pi n/2}\frac{F_{(n-1)/2}\left(t,\beta^2/2\right)}{H^+_{(n-1)/2}(-t,\chi/2)}\cos(n\varphi)\right\}dt,$$

$$u|_{\tau=1}=e^{ikb\eta}\frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{\chi}e^{-i\chi\eta/2}}{\beta\sqrt{1-\eta^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{it}\times$$
$$\times\left\{\frac{F_{-1/2}\left(t,\beta^2/2\right)}{H^+_{-1/2}(-t,\chi/2)-\chi\dot{H}^+_{-1/2}(-t,\chi/2)}+2\sum_{n=1}^{+\infty}e^{i\pi n/2}\times\right. \tag{9}$$
$$\left.\times\frac{F_{(n-1)/2}\left(t,\beta^2/2\right)}{H^+_{(n-1)/2}(-t,\chi/2)-\chi\dot{H}^+_{(n-1)/2}(-t,\chi/2)}\cos(n\varphi)\right\}dt.$$

Ввиду того, что нормальная производная выражается через производную по τ по формуле

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{n=0}\approx\frac{\sqrt{kb}}{b}\frac{2}{\sqrt{\chi}\sqrt{1-\eta^2}}\left.\frac{\partial u}{\partial\tau}\right|_{\tau=1},$$

мы будем для задачи дифракции на абсолютно мягком сфероиде изучать величину

$$\Psi=\frac{b}{\sqrt{kb}}\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{n=0},$$

которая не зависит от волнового числа k и размера сфероида b, а определяется лишь параметром χ и углом β.

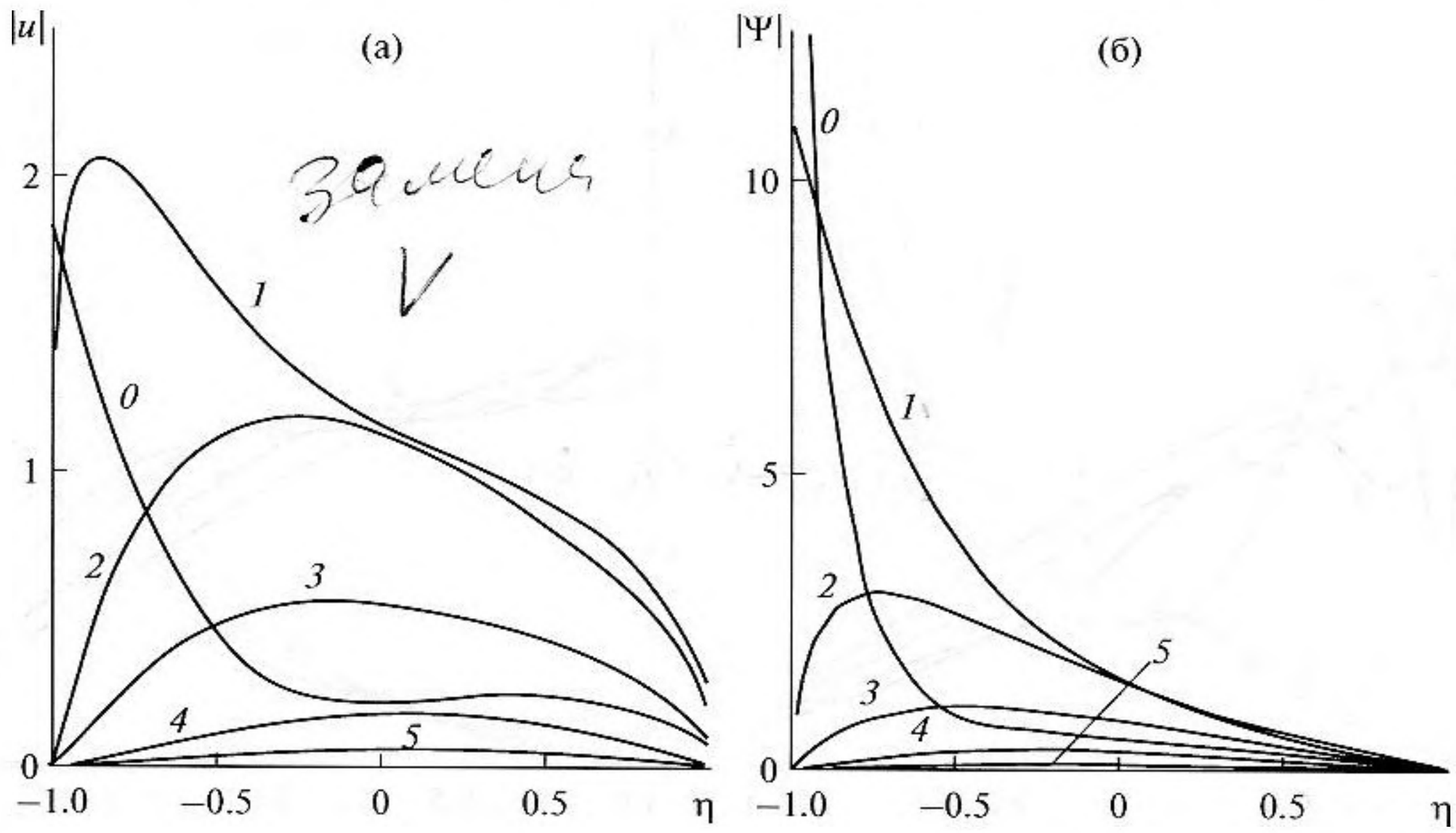

Рис. 2. Вклады отдельных гармоник (кривые *0–5* отвечают модам с номерами *0–5*) при дифракции на сфероиде с $\chi = 5$, при $\beta = 1$: (а) абсолютно жесткая поверхность; (б) абсолютно мягкая поверхность.

Расчеты показывают, что подынтегральные выражения в формулах (8) и (9) быстро убывают на бесконечности. Вклады отдельных гармоник при дифракции на сфероиде с $\chi = 5$ представлены на рис. 2 для $\beta = 1$, откуда видно, что существенный вклад в суммарное поле дают лишь несколько первых гармоник. Отметим, что в крайних точках поверхности (на оси сфероида) отличный от нуля вклад в суммарное поле должна давать только нулевая гармоника. Из графиков на рис. 2а можно заключить, что вклады гармоник с $n > 1$ обращаются в нуль при $\eta = \pm 1$. Для гармоники с $n = 1$ также можно проверить, что ее вклад при $\eta = \pm 1$ равен нулю, но бесконечно быстро нарастает при удалении от крайних точек сфероида. Этот бесконечный рост вполне естественен. Дело в том, что в высокочастотном диапазоне фаза поля зависит от длины дуги на поверхности, а выделенный быстро осциллирующий множитель зависит от координаты, измеряемой вдоль оси сфе-

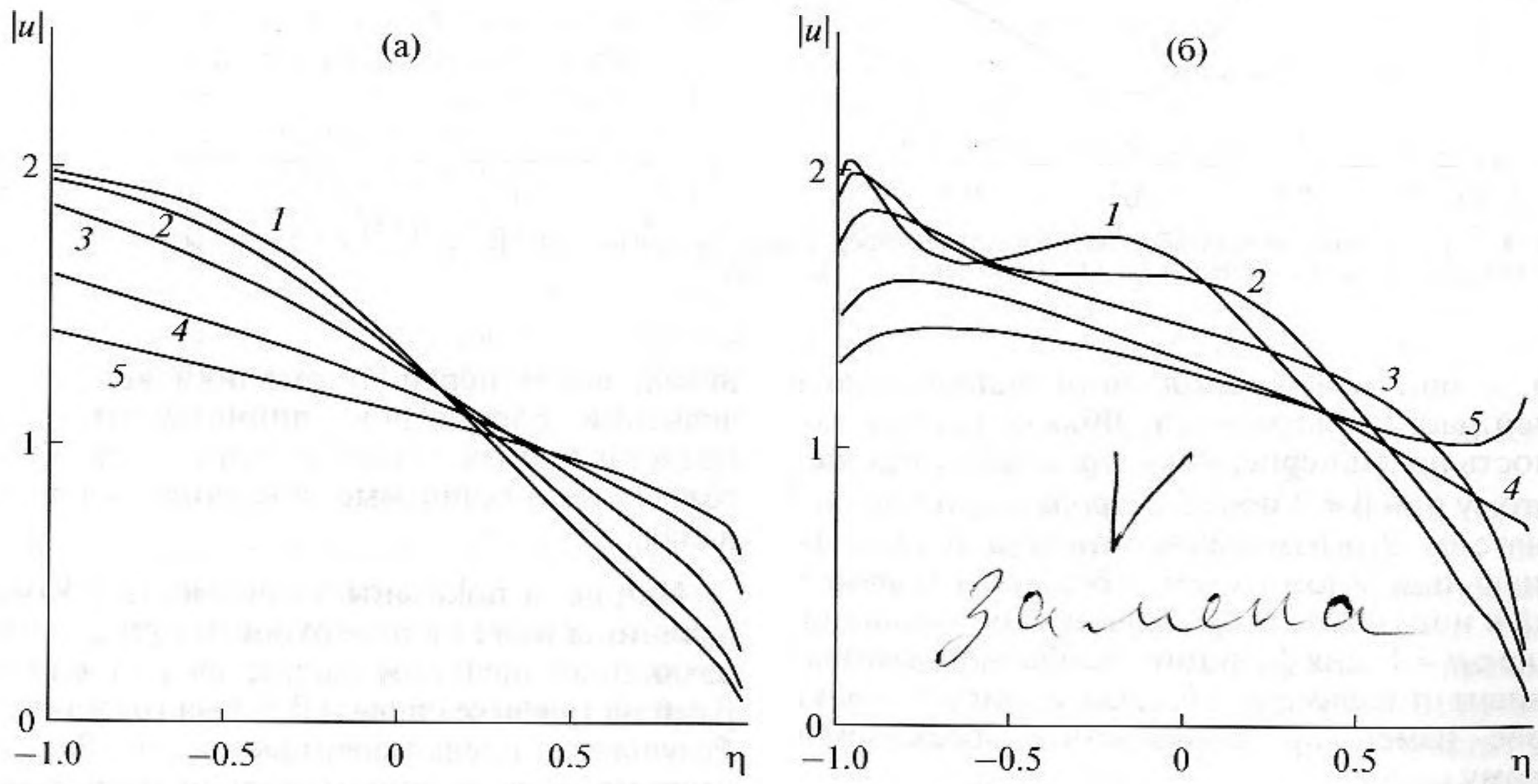

Рис. 3. Поле на поверхности сфероидов при $\varphi = 180°$ для $\chi = 15$, 10, 5, 2 и 1 (кривые *1–5* соответственно) при $\beta = 0$ (а) и при $\beta = 1$ (б).

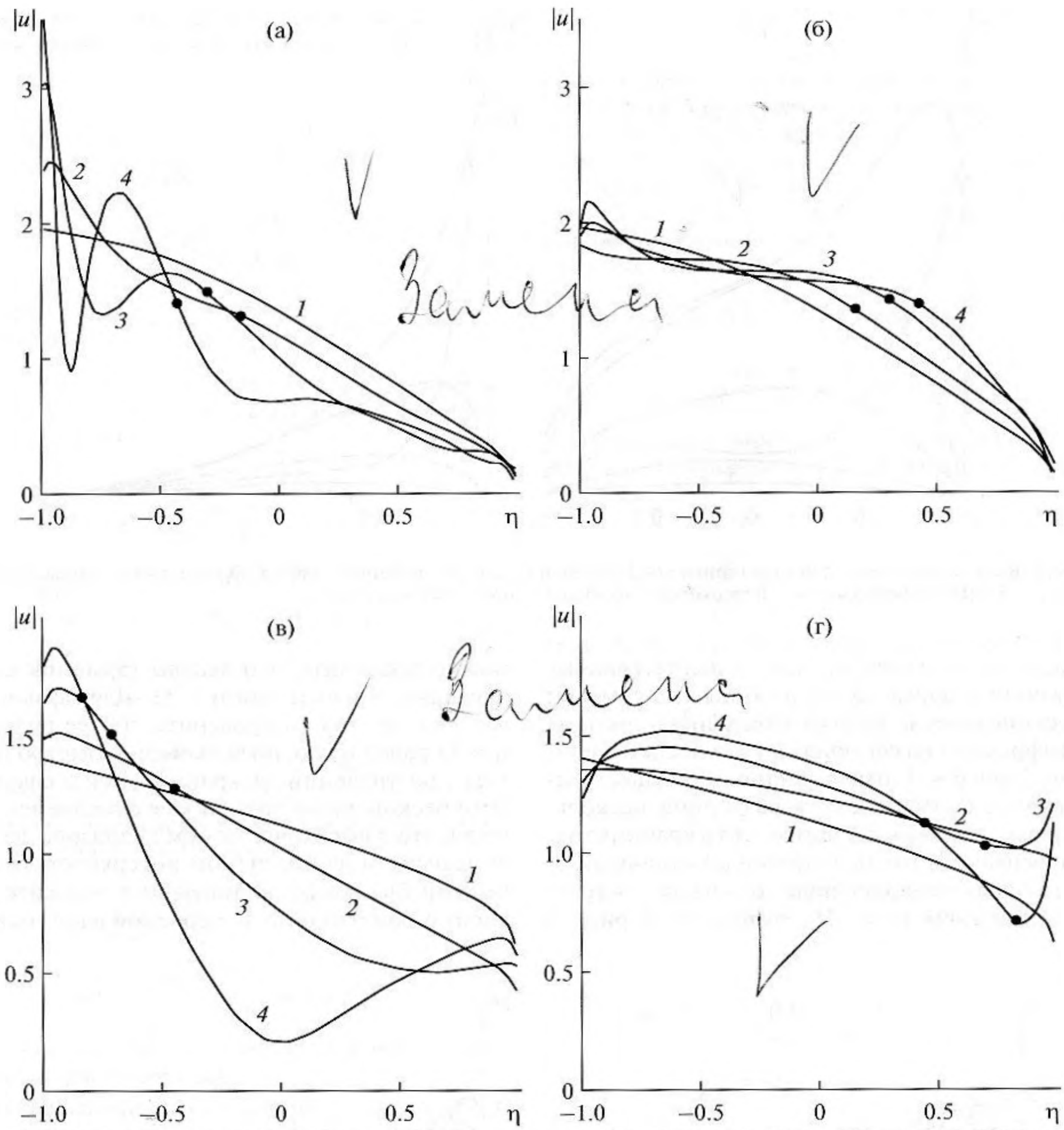

Рис. 4. Поле на поверхности абсолютно жесткого сфероида для углов падения $\beta = 0, 0.5, 1$ и 1.5 (кривые *1–4*): (а) $\chi = 10$, $\varphi = 0°$; (б) $\chi = 10$, $\varphi = 180°$; (в) $\chi = 1$, $\varphi = 0°$; (г) $\chi = 1$, $\varphi = 180°$.

роида, и описывает осцилляции поля только в средней части поверхности. Вблизи концов поверхность почти перпендикулярна оси сфероида, и поэтому при $\beta \neq 0$ поле быстро меняется по координате φ. Это изменение описывается экспоненциальным множителем с большим параметром kb в показателе и проявляется именно в гармонике с $n = 1$. Для функции ослабления, которая не зависит от параметра kb, такое асимптотически быстрое изменение соответствует бесконечно быстрому.

В случае абсолютно мягкой поверхности при $\eta = -1$ нулевая гармоника дает бесконечный вклад, вклад первой гармоники конечен и для значений параметров, принятых при расчете представленных на рис. 2б данных, примерно равен 11.139, а остальные гармоники дают нулевой вклад.

На рис. 3 показаны зависимости абсолютной величины поля на поверхности при $\varphi = 180°$ для различных значений параметра χ. Угол падения $\beta = 0$ на графике слева и $\beta = 1$ на графике справа. Результаты, представленные на рис. 3а, показывают, что с увеличением степени вытянутости тела значение поля на освещенной части поверхности уменьшается, но также уменьшается и ско-

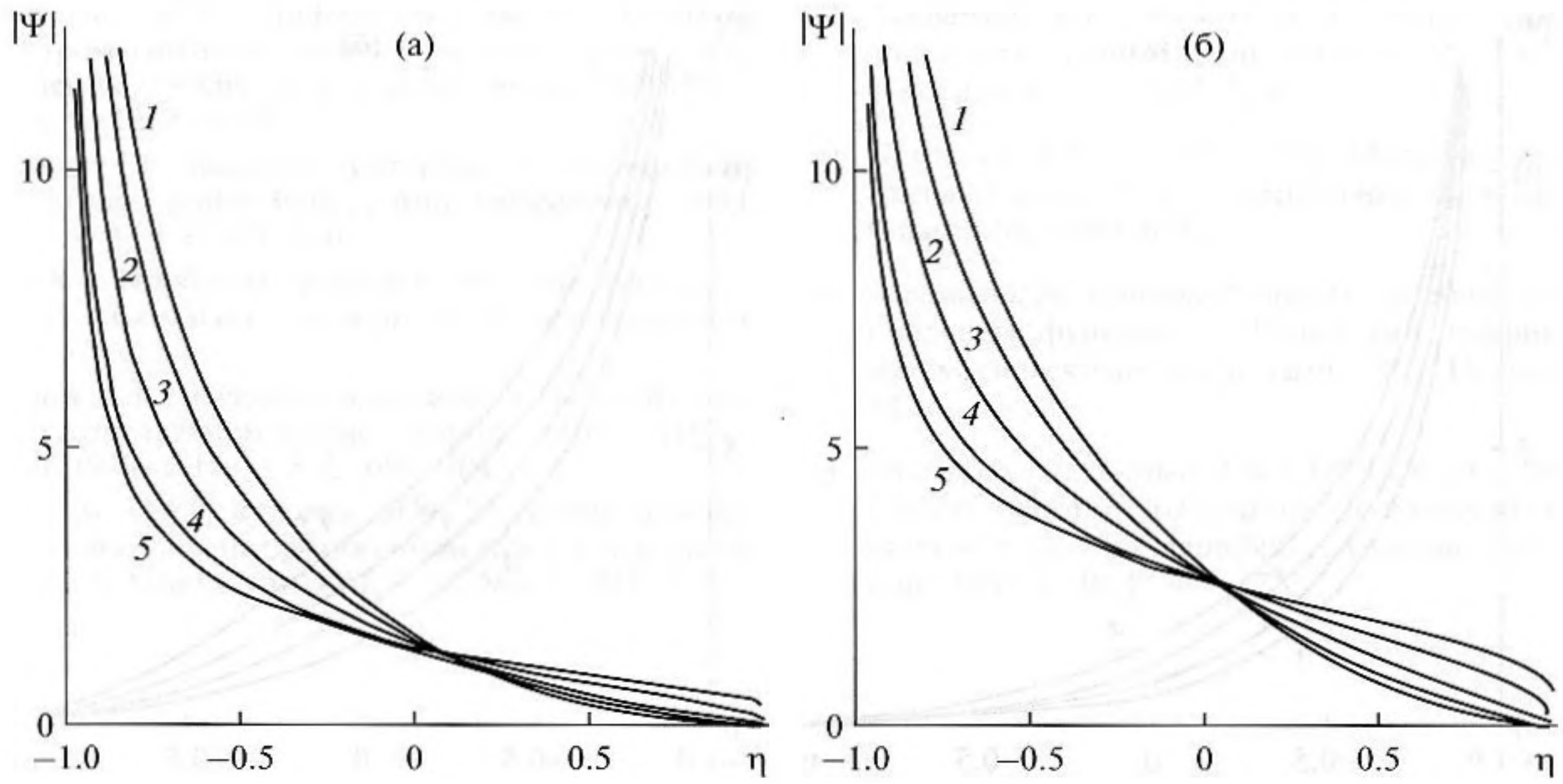

Рис. 5. Нормальная производная поля на идеально мягкой поверхности сфероида при $\varphi = 180°$ для $\chi = 15, 10, 5, 2$ и 1 (кривые *1–5* соответственно) при $\beta = 0$ (а) и при $\beta = 1$ (б).

рость его убывания, так что в области тени картина оказывается противоположной: поле тем больше, чем более вытянуто тело. В случае падения плоской волны под углом сторона тела, соответствующая $\varphi = 180°$, поворачивается к свету, при этом амплитуда поля на освещенной части поверхности возрастает, а в затененной части убывает. В результате скорость затухания поля вдоль поверхности увеличивается.

На рис. 4 представлены зависимости абсолютного значения поля на поверхности идеально жесткого сфероида при различных углах падения. Для графиков в верхнем ряду сфероид характеризуется параметром $\chi = 10$, в нижнем ряду $\chi = 1$. Слева представлены значения поля для $\varphi = 0°$, то есть со стороны, которая является более затененной при косом падении. На графиках справа $\varphi = 180°$. В случае осевого падения оптико-геометрическая граница света и тени проходит по сечению $\eta = 0$. Когда угол β увеличивается, граница света и тени смещается. На сечении $\varphi = 0°$ она смещается влево и затененная область увеличивается, на сечении $\varphi = 180°$ граница смещается вправо. Положение границы определяется формулой $\eta = \pm\beta/\sqrt{\beta^2 + \chi}$ и на рис. 4 помечены для кривых *2–4* жирными точками. Расчеты показывают, что в случае не очень сильно вытянутого тела, при $\chi = 10$, значения поля на границе свет–тень мало зависят от угла падения. В случае очень сильно вытянутого тела, при $\chi = 1$, зависимость амплитуды поля от угла падения становится более заметной. Наиболее отчетливо это видно на рис. 4г, иллюстрирующем распределение поля на менее затененной стороне тела. С ростом β поле в освещенной области возрастает, но одновременно с этим увеличивается и скорость его убывания от света к тени. По-видимому, это связано с тем, что при увеличении угла падения поверхность становится как бы менее вытянутой. Действительно, параметр, который характеризует степень вытянутости поверхности, изначально [4] определялся величиной

$$\tilde{\chi} = k\rho_t^{3/2}\rho^{-1/2},$$

где ρ и ρ_t – радиусы кривизны поверхности в продольном и в поперечном сечениях соответственно. В случае осевого падения $\tilde{\chi}$, вычисляемое на границе свет–тень, совпадает с используемым в данной статье параметром χ. Если же волна падает под углом, то ρ уменьшается, а ρ_t растет, что приводит к увеличению параметра $\tilde{\chi}$, и поверхность как бы становится менее вытянутой. При этом в освещенной части поле увеличивается, но одновременно с этим увеличивается и его скорость убывания, как показано на рис. 3.

Результаты расчетов для случая абсолютно мягкой поверхности приведены на рис. 5, 6. Рисунок 5 иллюстрирует влияние степени вытянутости тела, характеризуемой параметром χ, на величину и скорость убывания нормальной производной поля на поверхности. На левом графике волна падает вдоль оси сфероида, на правом под углом, отвечающим $\beta = 1$. И в том, и в другом случае при уменьшении параметра χ, то есть при переходе к более вытянутым сфероидам, происходит уменьшение $|\Psi|$ в освещенной части поверхности, но одновременно с этим уменьшается и

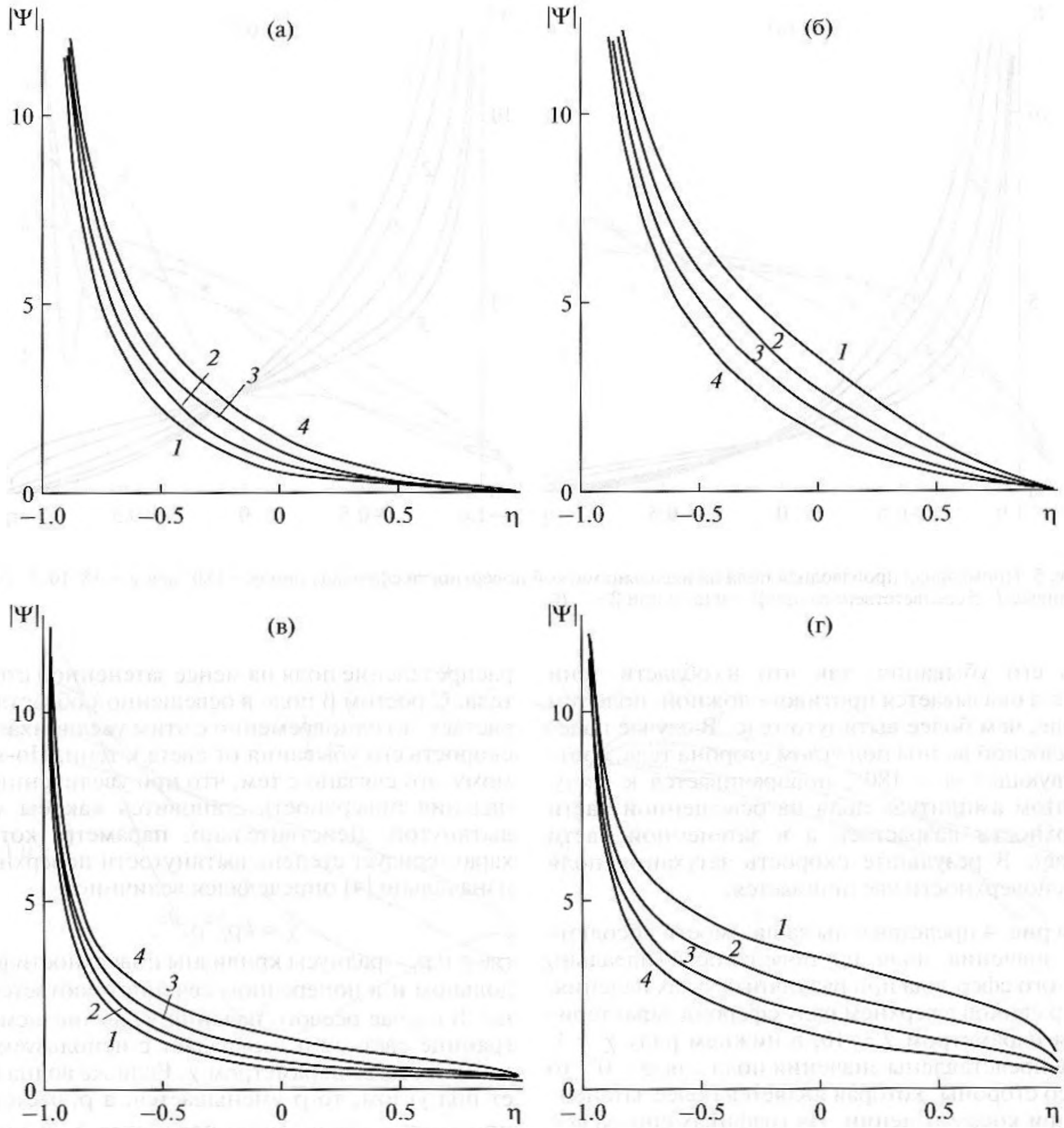

Рис. 6. Нормальная производная поля на поверхности абсолютно мягкого сфероида для углов падения $\beta = 0, 0.5, 1$ и 1.5 (кривые *1–4*): (а) $\chi = 10$, $\varphi = 0°$; (б) $\chi = 10$, $\varphi = 180°$; (в) $\chi = 1$, $\varphi = 0°$; (г) $\chi = 1$, $\varphi = 180°$.

скорость затухания волн, так что в затененной области нормальная производная поля возрастает. На рис. 6 представлено влияние угла падения β на распределение поля у поверхности. Мы видим, что со стороны, которая более освещена, нормальная производная поля увеличивается с ростом β (левые графики), а с противоположной, более затененной стороны, нормальная производная уменьшается. Такой характер зависимости согласуется с приведенным выше объяснением о том, что при увеличении β параметр $\tilde{\chi}$ увеличивается и сфероид становится как бы менее вытянутым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andronov I.V.* High-frequency asymptotics for diffraction by a strongly elongated body // Antennas and Wireless Propagation Letters. IEEE. 2009. V. 8. P. 872.

2. *Андронов И.В.* Дифракция на сильно вытянутом теле вращения // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 2. С. 147–152.

3. *Андронов И.В.* Дифракция высокочастотной электромагнитной волны на вытянутом теле вращения // Радиотехн. и электроника. 2011. Т. 56. № 11. С. 1317–1323.

4. *Andronov I.V., Bouche D.* Asymptotic of creeping waves on a strongly prolate body // Ann. Télécommun. 1994. V. 49. № 3–4. P. 205–210.

5. *Фок В.А.* Проблемы диффракции и распространения электромагнитных волн. М.: Советское радио, 1970. 520 с.

6. *Клещев А.А.* Рассеяние звука идеальными сфероидами в предельном случае высоких частот // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 5. С. 699–704.

7. *Тэтюхин М.Ю., Федорюк М.В.* Рассеяние плоской звуковой волны на протяженном теле произвольной формы // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 6. С. 811–815.

8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Гос. издат. физ.-матем. лит., 1963. 1100 с.

9. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции. М.: Физматлит, 2003. 664 с.

10. *Абрамовиц М., Стиган И. (ред.)* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.

11. *Thompson I.J., Barnett A.R.* COULCC: A continued-fraction algorithm for Coulomb functions of complex order with complex arguments // Comput. Phys. Commun. 1985. V. 36. P. 363–372.