АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2012, том 58, № 6, с. 677–682

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.833.5

О ПРИСОЕДИНЕННОЙ ДЛИНЕ ОТВЕРСТИЙ

© 2012 г. А. И. Комкин, М. А. Миронов*, С. И. Юдин

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005 Москва, ул. 2-я Бауманская 5
E-mail: akomkin@mail.ru
**Акустический институт им. Н.Н. Андреева*
117036 Москва, ул. Шверника 4
E-mail: mironov@akin.ru

Поступила в редакцию 21.01.2012 г.

Проведена оценка присоединенной длины отверстий в реактивных глушителях шума, основанная на численных расчетах методом конечных элементов. Результаты численных расчетов для перегородки в канале сравниваются с теоретическими результатами Рэлея, Фока, Карала, Ингарда. Приведена зависимость присоединенной длины от толщины перегородки. Полученные результаты обобщены для случая, когда отверстие является горлом резонатора Гельмгольца. Проанализировано влияние длины резонатора на присоединенную длину его горла.

Ключевые слова: присоединенная длина, импеданс, отверстие, перегородка, резонатор Гельмгольца, метод конечных элементов.

Отверстия являются составной частью резонаторных элементов глушителей шума. При прохождении звуковой волной отверстия происходит частичный переход поля этой волны в поле быстро затухающих неоднородных волн в окрестности отверстия. Формально это обстоятельство учитывается в терминах присоединенной длины отверстия. Релей показал [1], что для отверстия в бесконечной перегородке присоединенная длина (концевая поправка) отверстия с одной стороны перегородки l_a пропорциональна радиусу отверстия a, причем имеет место неравенство

$$\frac{\pi}{4}a < l_a < \frac{8}{3\pi}a. \qquad (1)$$

Здесь нижний предел получен в предположении постоянства по поперечному сечению отверстия звукового давления, а верхний – постоянства осевой колебательной скорости (поршневого движения среды в отверстии). Рэлей отмечает, что коэффициент пропорциональности является функцией толщины перегородки l, так что в нижнем пределе его значение $\pi/4 \approx 0.785$ соответствует толщине $l \to 0$, тогда как в верхнем пределе значение $8/(3\pi) \approx 0.849$, наоборот, – $l \to \infty$. Кроме того, Рэлей, рассматривая более близкий к действительности случай, когда профиль колебательной скорости в отверстии отличается от равномерного, нашел, что значение постоянной в верхнем пределе этих неравенств не может превышать 0.824. Позднее [2] было получено более точное значение для этой постоянной, равное 0.822.

Еще С.Н. Ржевкин [3] отмечал, что вопрос о том, какая из этих оценок ближе к истине, до конца не исследован. До настоящего времени единой позиции по этому вопросу не выработано. В связанных с этим вопросом работах для оценки l_a используется как нижнее, так и верхнее его граничные значения [4, 5]. Конечно, разница между этими оценками не очень значительна, однако, например, при вычислении собственной частоты резонатора даже небольшие погрешности в оценке присоединенной длины горла резонатора могут в результате привести к заметным ошибкам.

Данная работа посвящена исследованиям присоединенной длины отверстия в реактивных глушителях шума, проводимым как аналитическими методами, так и с помощью конечно-элементного моделирования, целью которых является устранение неоднозначности в оценке присоединенной длины отверстия, определяемой неравенством (1). Кроме того, проверялась точность расчетов с использованием конечно-элементного моделирования.

На первом этапе исследовалась присоединенная длина одиночного отверстия в перегородке, расположенной в поперечном сечении канала. Теоретически такая задача была рассмотрена Фоком, Каралом и Ингардом. Полученные ими результаты явились обобщением результатов Рэлея. По сути, их можно свести к модификации неравенства (1).

Нижний предел оценки l_a для данного случая получен В.А. Фоком [6] при рассмотрении беско-

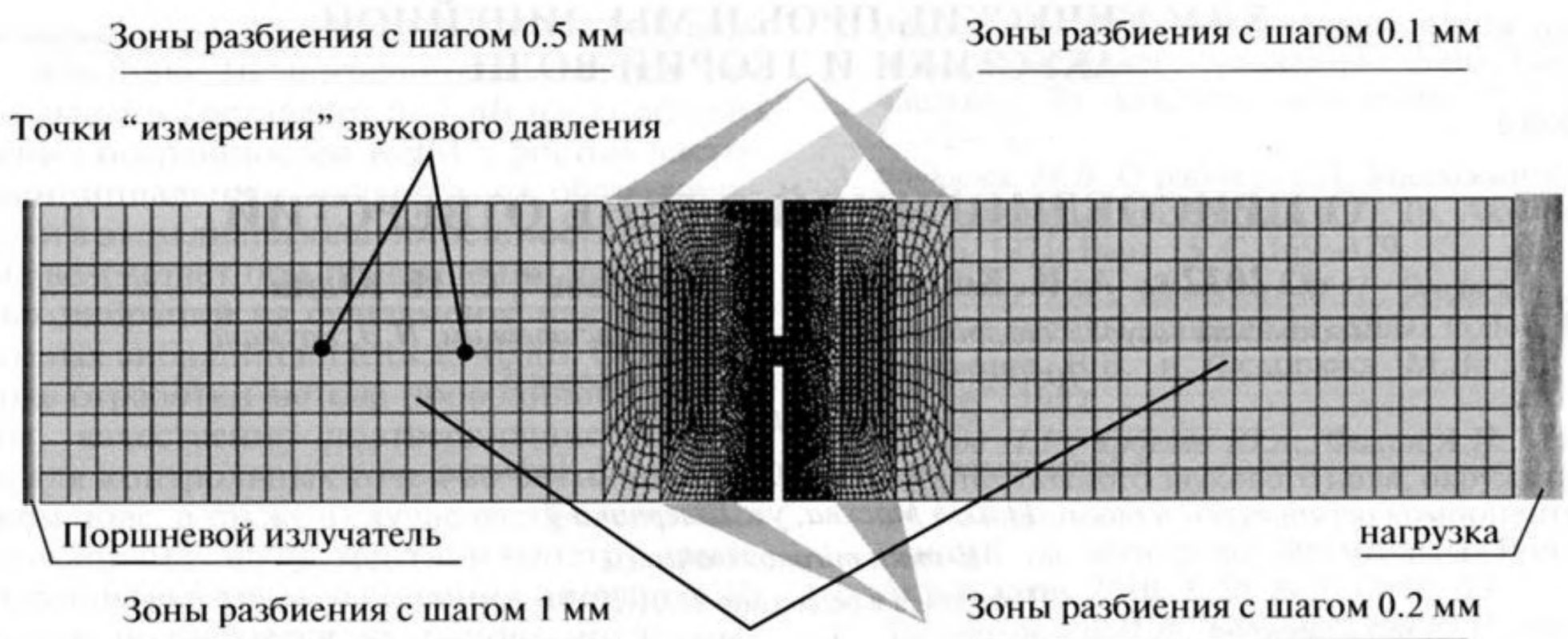

Рис. 1. Схема расчетов методом конечных элементов.

нечно тонкой перегородки с отверстием диаметром $d = 2a$, размещенной в канале диаметром $D = 2b$, определяется через функцию Фока $F(g)$, зависящую от параметра $g = a/b$, имеет вид

$$l_a = \frac{\pi}{4} a F(g) \approx 0.785a(1 - 1.41g + 0.34g^3 + 0.07g^5). \quad (2)$$

При $g \to 0$ функция Фока $F(g) \to 1$, а коэффициент α становится равным нижнему пределу в формуле (1). При $g \to 1$, когда диаметр отверстия d приближается к диаметру канала D, $F(g) \to 0$, а значит, согласно (2) и $l_a \to 0$.

С другой стороны, верхний предел оценки l_a получается при рассмотрении скачка сечения канала в предположении поршневого движения воздуха в узкой части канала (отверстии). Для канала круглого поперечного сечения такая оценка дана Каралом [7] и Ингардом [8]. Ингардом дана оценка l_a и для канала прямоугольного поперечного сечения. Можно показать, что в первом приближении результаты, полученные для круглого канала, можно применить и к прямоугольному каналу равной площади поперечного сечения. Различные аспекты, связанные с этой оценкой, рассмотрены в [9–11].

Оценка Карала для канала круглого поперечного сечения записывается в виде

$$l_a = \frac{8}{3\pi} a H(g) = \frac{8}{3\pi} a \left[\frac{3\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\alpha_n g)}{g \alpha_n^3 J_0^2(\alpha_n)} \right], \quad (3)$$

где J_0, J_1 – функция Бесселя соответственно нулевого и первого порядка; α_n – нули функции Бесселя первого порядка. В такой форме записи при $g \to 0$ функция Карала $H(g) \to 1$, как и приведенная выше функция Фока. Оценка (3) является низкочастотным приближением и не зависит от частоты. Эту оценку можно сделать правомерной во всем частотном диапазоне распространения в канале плоских звуковых волн [12], если входящую в нее функцию Карала $H(g)$ представить в более общем виде

$$H(g,k) = \frac{3\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\alpha_n g)}{g k_n \alpha_n^3 J_0^2(\alpha_n)}, \quad (4)$$

где $k_n = \sqrt{1 - (kb)^2 / \alpha_n^2}$; k – волновое число.

Однако в практических приложениях используется, как правило, низкочастотное приближение (3). С учетом изложенного, для случая перегородки в канале соотношение, аналогичное (1), запишется в виде

$$0.785F(g)a < l_a < 0.822H(g)a. \quad (5)$$

Для больших степеней расширения канала, когда $g < 0.25$, к функциям Фока и Карала может быть применена линейная аппроксимация, что приводит неравенство (5) к виду

$$0.785(1 - 1.4g)a < l_a < 0.822(1 - 1.3g)a. \quad (6)$$

Заметим, что неравенство (6), определяющее границы l_a для двух предельных случаев, отражает тот факт, что по Рэлею присоединенная длина является функцией толщины перегородки l. Исходя из этого, запишем выражение для присоединенной длины в виде

$$l_a = \alpha(1 - \beta g)a, \quad (7)$$

где α, β – коэффициенты, зависящие от l.

Для того чтобы определить значения коэффициентов α и β, было проведено конечно-элементное моделирование рассматриваемой задачи. Соответствующая расчетная схема приведена на рис. 1. Расчеты проводились для перегородки с осесимметричным отверстием диаметром $d = 10$ мм в канале круглого поперечного сечения с использованием расчетного пакета SYSNOISE. На концах канала задавались граничные условия: на одном в виде колебаний поршня с единичной скоростью, на другом в виде согласованной нагрузки с импедансом $Z_н = \rho c$, где ρ – плотность среды; c – скорость

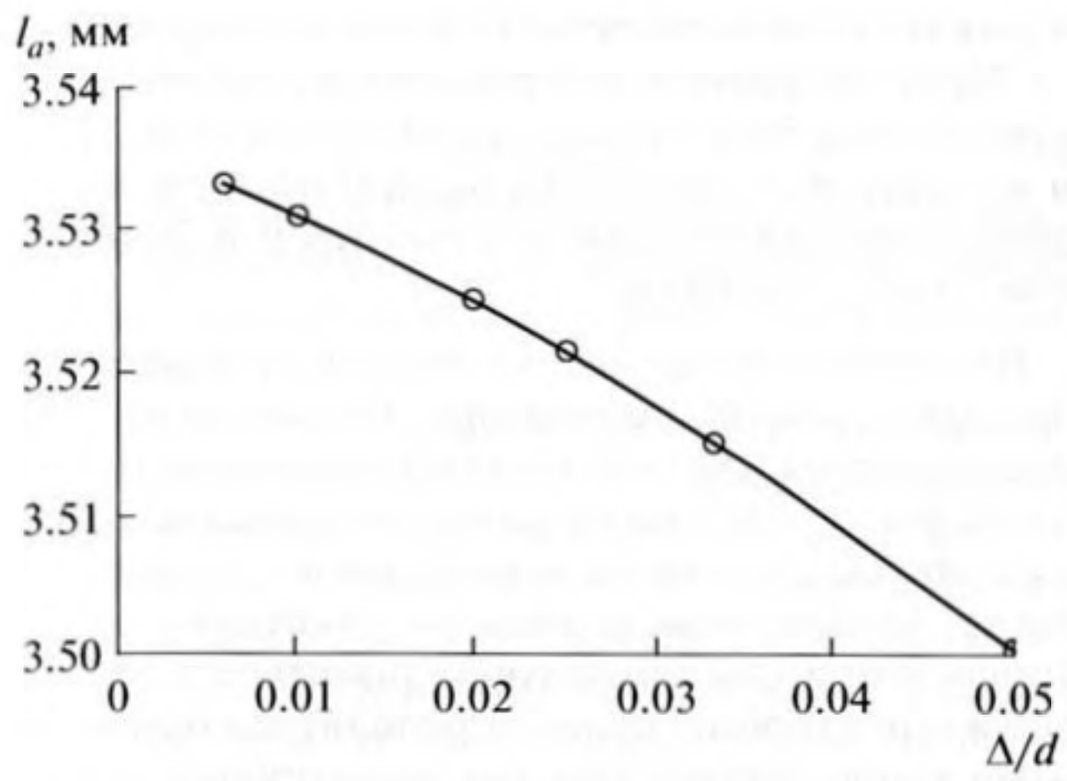

Рис. 2. Зависимость оценки присоединенной длины отверстия в перегородке от относительного размера конечных элементов.

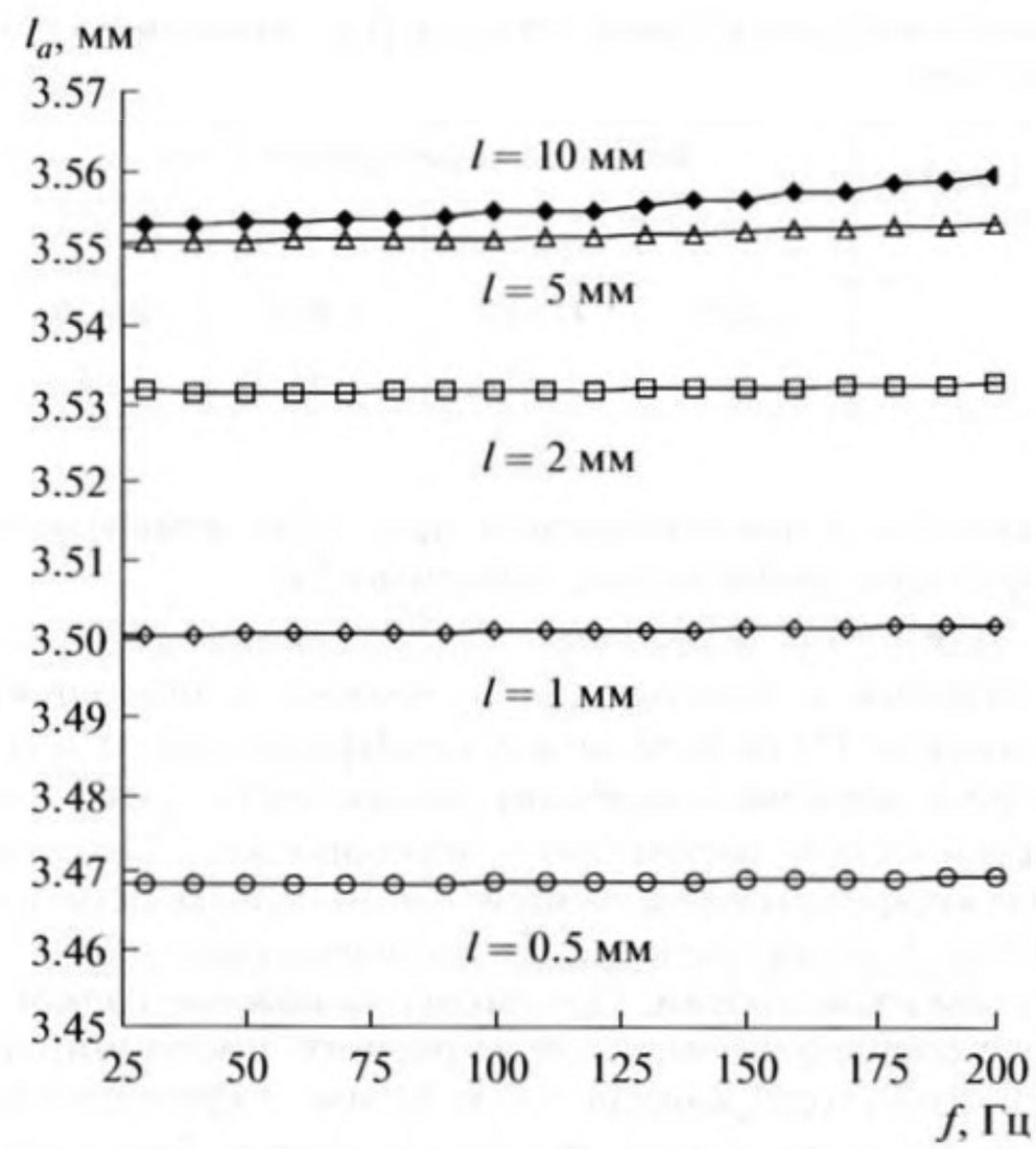

Рис. 3. Частотная зависимость присоединенной длины отверстия для разных толщин перегородки.

звука в ней. При проведении численных расчетов определялись звуковые давления в расчетных точках, которые затем использовались для оценки амплитуд прямой и отраженной плоских волн звукового давления в канале. Далее, используя найденные значения, вычислялись звуковое давление P и осевая колебательная скорость V в точке, примыкающей к передней поверхности отверстия перегородки, а затем и входной импеданс перегородки $Z_{\text{вх}} = P/V$ и его нормированное значение $\xi_{\text{вх}} = Z_{\text{вх}}/(\rho c)$. С другой стороны, импеданс $\xi_{\text{вх}}$ связан с нормированным импедансом отверстия в перегородке $\xi_{\text{о}}$ соотношением $\xi_{\text{вх}} = 1 + \xi_{\text{о}}/g^2 = 1 + ik(l + 2l_a)/g^2$. Здесь величина $\xi_{\text{о}}$ соответствует низкочастотному приближению, с условием $kl \ll 1$. Отсюда находим искомую присоединенную длину

$$2l_a = \frac{g^2}{k}\operatorname{Im}\xi_{\text{вх}} - l. \qquad (8)$$

Известно, что на точность численных результатов существенное влияние оказывает степень густоты разбиения расчетной схемы на конечные элементы, т.е. фактически размеры конечных элементов Δ в расчетной схеме. Поэтому вначале были проведены вычисления одной из конфигураций рассматриваемой системы с разными размерами конечных элементов. Так как с уменьшением размера конечных элементов резко увеличивается их общее количество и, как следствие, время вычислений, то было принято компромиссное решение. Разбиение рассматриваемой конфигурации равномерным образом на конечные элементы одного размера проводилось только для $\Delta = 1$ мм. При более подробном разбиении размеры элементов уменьшались только в окрестности перегородки (рис. 1).

Соответствующие расчеты были проведены для перегородки толщиной 2 мм и диаметром канала 100 мм. Для оценки присоединенной длины использовалась формула (8). Вначале была вычислена присоединенная длина отверстия при равномерном конечно-элементном разбиении с $\Delta = 1$ мм. При этом $l_a = 3.45$ мм. С уменьшением величины Δ вычисляемое значение присоединенной длины увеличивалось. Зависимость присоединенной длины отверстия от размера конечных элементов Δ при изменении Δ от 0.5 до 0.06 мм представлена на рис. 2, где для большей общности результатов на горизонтальной оси графика откладывалась относительная величина Δ/d. Из представленной зависимости следует, что не имеет смысла делать сетку с шагом менее 0.1 мм, так как уточнение значения присоединенной длины при этом не превышает 0.005 мм. В дальнейшем численные расчеты, связанные с оценкой присоединенной длины отверстия в перегородке, проводились с сеткой $\Delta = 0.1$ мм.

На рис. 3 представлена частотная зависимость присоединенной длины отверстия для различных толщин перегородки. Почти все графики представляют собой практически горизонтальные линии. Это говорит в соответствии с формулой (8) о линейной зависимости входного импеданса перегородки, а следовательно, и импеданса отверстия, от волнового числа. При больших толщинах перегородки, $l \geq 10$ мм, условия, при которых обеспечивается эта линейность, нарушаются, что и от-

Зависимость коэффициентов α и β от толщины перегородки

Коэффициенты	Толщина перегородки l, мм			
	0.5	1	2	5
α	0.804	0.808	0.815	0.820
β	1.37	1.34	1.34	1.34

ражается в появляющемся при этом изменении характера графической зависимости.

Далее, по известной присоединенной длине отверстия в перегородке l_a можно с помощью формулы (7) определить и коэффициенты α и β, определяющие линейную зависимость l_a от геометрических параметров перегородки. Так как эти коэффициенты зависят от толщины перегородки l, то их значения были вычислены для нескольких значений. При этом для каждой толщины перегородки численные расчеты проводились при диаметрах канала 100 и 80 мм, а кроме того, для повышения достоверности оценок, еще и для канала с диаметром 50 мм. Таким образом, получались три пары значений коэффициентов α и β, и за результаты принимались их средние значения, представленные в таблице. Как и следовало ожидать, с ростом l значения коэффициента α возрастают; значения коэффициента β изменяются незначительно и заметно увеличиваются лишь при очень малых толщинах перегородки. Но в целом все эти изменения укладываются в диапазон возможных значений этих коэффициентов, определяемый неравенствами (7).

Представленные данные показывают, что при $l \geq 1$ мм коэффициент β остается постоянным. Поэтому для практических приложений

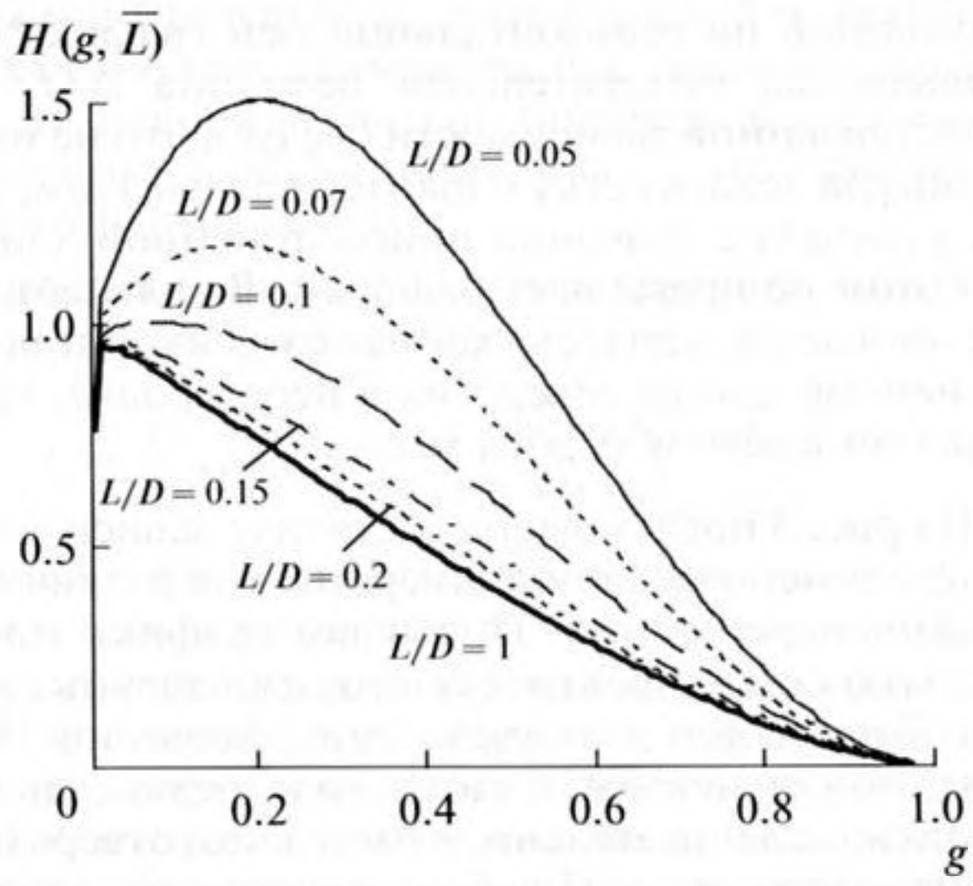

Рис. 4. Графики обобщенной функции Карала $H(g, \overline{L})$.

формулу (7) можно переписать в виде $l_a = \alpha(1 - 1.34g)a$, где меняться в зависимости от толщины перегородки будет только коэффициент α. Исходя из этого и с учетом (5), выражение для присоединенной длины можно записать и в более общем виде $l_a = \alpha H(g)a$.

На втором этапе исследовалась присоединенная длина горла резонатора Гельмгольца. При рассмотрении данной задачи использовалась такая же расчетная схема, что и при моделировании перегородки, только согласованная нагрузка на конце канала заменялась на жесткую стенку. Присоединенная длина горла такого резонатора с наружной стороны будет определяться приведенными выше формулами для перегородки в канале. Что касается присоединенной длины горла с внутренней стороны, то на эту величину может оказывать влияние задняя стенка резонатора. Подробный анализ такого влияния был проведен Ингардом [13], а все последующие связанные с этим вопросом работы, например [14, 15], основывались на полученных им результатах.

Приведенную Ингардом в [13] формулу можно получить на основе обобщений результатов, полученных для перегородки. Они сводятся к модификации функции Карала (4), которая для резонатора Гельмгольцы с камерой длиной L и диаметром D записывается в виде

$$H(g, \overline{L}, k) = \frac{3\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2(\alpha_n g)}{g k_n \alpha_n^3 J_0^2(\alpha_n)}\operatorname{ctg}(2\alpha_n k_n \overline{L}), \qquad (9)$$

где $\overline{L} = L/D$. Функция (9) зависит от трех переменных, в число которых помимо геометрических параметров входит и волновое число k и через которые, следуя Ингарду, и выражают присоединенную длину горла резонатора. Между тем при исследовании резонаторов, как правило, рассматривают частоты, близкие к их собственной частоте. При этом правомерна низкочастотная аппроксимация формулы (9), так что по аналогии с формулой (3) приходим к обобщенной функции Карала

$$H(g, \overline{L}) = \frac{3\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2(\alpha_n g)}{g \alpha_n^3 J_0^2(\alpha_n)}\operatorname{ctg}(2\alpha_n \overline{L}). \qquad (10)$$

Графики функции (10), вычисленные для 50 членов ряда, приведены на рис. 4. Форма кривых существенно зависит от относительной длины $\overline{L}$. При больших $\overline{L}$ значения функции (10) приближаются к значениям функции (3). Из представленных графиков непосредственно следует, что при оценке присоединенной длины горла длину камеры резонатора следует учитывать только при $\overline{L} < 0.2$.

Использование обобщенной функции Карала (10) позволяет по аналогии с перегородкой запи-

сать выражение для присоединенной длины с внутренней стороны горла резонатора в виде

$$l_a = \alpha H(g, \bar{L})a, \qquad (11)$$

где α – коэффициент пропорциональности, как и ранее зависящий от l, значения которого определяются в соответствии с данными, приведенными в таблице.

Для проверки правомерности использования формулы (11) было проведено конечно-элементное моделирование резонатора Гельмгольца в соответствии с расчетной схемой, представленной на рис. 1. Расчеты проводились для резонатора с длиной горла 2 мм и диаметром камеры 92 мм при различных длинах камеры резонатора. При этом определялась собственная частота резонатора, соответствующая нулевому значению мнимой части входного импеданса резонатора. Далее по известной собственной частоте резонатора вычислялась присоединенная длина его горла l_a, используя формулу [16]

$$f_0 = \frac{c}{2\pi}\frac{g}{\sqrt{L(l + l_a + Lg^2/3)}}. \qquad (12)$$

В формулу (12) входит общая присоединенная длина горла $l_a = l_{a1} + l_{a2}$. При этом наружная присоединенная длина горла l_{a1} равна рассмотренной выше присоединенной длине отверстия в перегородке. Отсюда можем определить искомую внутреннюю присоединенную длину горла l_{a2}.

Результаты численных расчетов представлены на рис. 5. Здесь же для сравнения приведена теоретическая зависимость присоединенной длины горла от длины камеры резонатора, построенная с использованием формулы (11) при $\alpha = 0.815$. При $L/D > 0.2$ вычисленное значение присоединенной длины горла совпадает со значением, полученным для перегородки. При меньших значениях L/D присоединенная длина начинает существенно возрастать. При этом получено хорошее совпадение аналитических и численных результатов. Полученное совпадение (отличия не превышают 2%) подтверждает правомерность использования для оценки присоединенной длины приведенных формул. С другой стороны, проведенное сопоставление результатов численных и аналитических расчетов указывает на высокую точность конечно-элементного метода расчета, что подтверждает возможность использования численного метода для точного количественного расчета акустических характеристик глушителей шума.

Таким образом, в работе получена общая формула для оценки присоединенной длины отверстий в резонаторных элементах глушителей шума. При малых значениях параметра g (больших степенях расширения) присоединенная длина оказывается пропорциональной этому параметру. Применение численных методов расчета впервые позволило получить зависимость коэффициентов

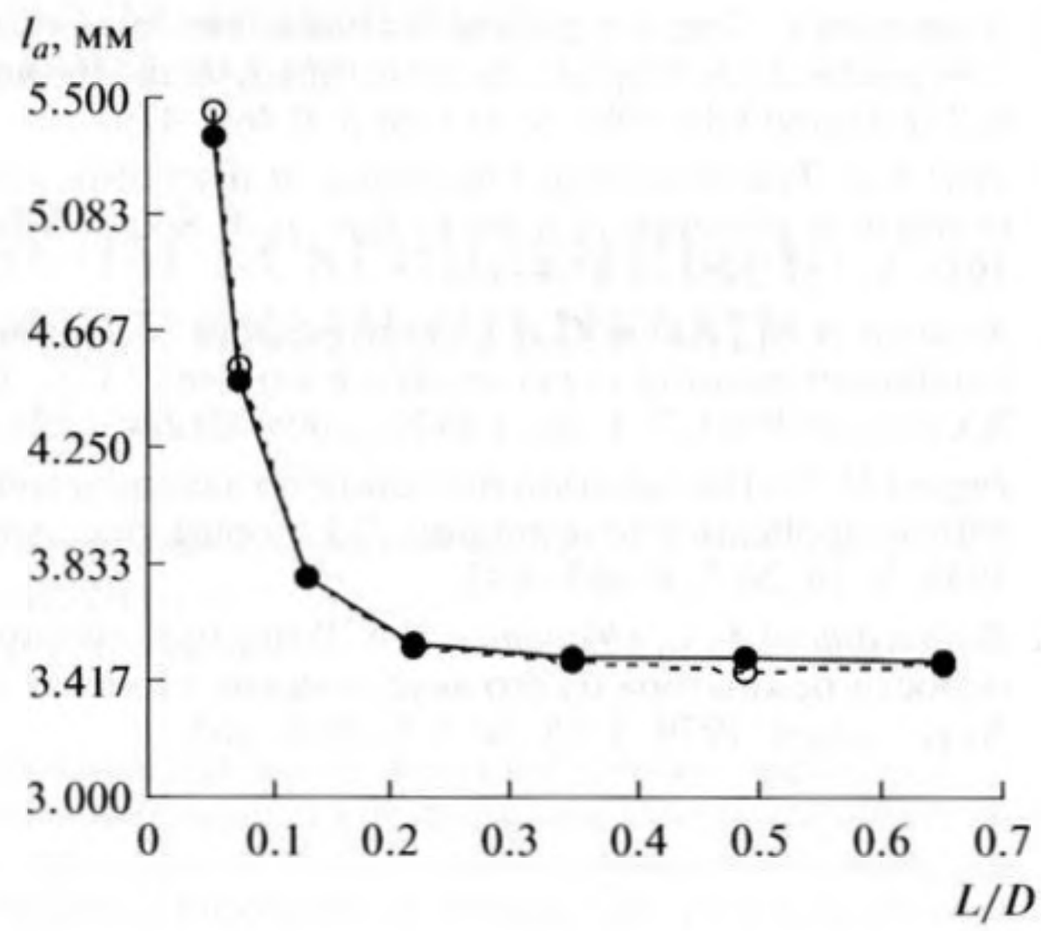

Рис. 5. Зависимость присоединенной длины горла резонатора от относительной длины его камеры, полученная аналитическим (–●–) и численным (–○–) методами.

пропорциональности от длины отверстия. Кроме того, часто для оценки зависимости присоединенной длины от геометрических параметров системы используются эмпирические формулы [17, 18]. Рассмотренный подход исключает такую необходимость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. 2. 476 с.
2. *Norris A.N., Sheng I.C.* Acoustic radiation from a circular pipe with an infinite flange // J. Sound Vibr. 1989. V. 135. № 1. P. 85–93.
3. *Ржевкин С.Н.* Курс лекций по теории звука. М.: МГУ, 1960. 336 с.
4. *Selamet A., Radovich P.M., Dickey N.S., Novak J.M.* Circular concentric Helmholtz resonator // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 101. № 1. P. 41–51.
5. *Соболев А.Ф.* Полуэмпирическая теория однослойных сотовых звукопоглощающих конструкций с лицевой перфорированной панелью // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 6. С. 861–872.
6. *Фок В.А.* Теоретическое исследование проводимости круглого отверстия в перегородке, поставленной поперек трубы // ДАН СССР. 1941. V. 31. № 9. С. 875–878.
7. *Karal F.C.* The analogous acoustical impedance for discontinuities and constrictions of circular cross section // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 25. № 2. P. 327–334.
8. *Ingard U.* On the theory and design of acoustic resonators // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 25. № 6. P. 1037–1061.
9. *Ржевкин С.Н.* К вопросу о присоединенной массе в неоднородных акустических волноводах // Акуст. журн. 1965. Т. 11. № 3. С. 371–379.

10. *Kergomard J., Garcia A.* Simple discontinuities in acoustic waveguides at low frequencies: critical analysis and formula // J. Sound Vibr. 1987. V. 114. № 3. P. 465–479.

11. *Peat K.S.* The acoustical impedance at discontinuities of ducts in presence of a mean flow // J. Sound Vibr. 1988. V. 127. № 1. P. 123–132.

12. *Комкин А.И., Юдин С.И.* Акустический импеданс перфорированной перегородки в канале // Сб. тр. XX сессии РАО. Т. 1. М.: ГЕОС, 2008. С. 246–250.

13. *Ingard U.* On the radiation of sound into a circular tube with an application to resonators // J. Acoust. Soc. Am. 1948. V. 20. № 5. P. 665–682.

14. *Велижанина К.А., Оборотов В.А.* Влияние глубины полости резонатора на его акустические свойства // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 5. С. 661–665.

15. *Selamet A., Ji Z.L.* Circular asymmetric Helmholtz resonators // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107. № 5. Pt. 1. P. 2360–2369.

16. *Panton R.L., Miller J.M.* Resonant frequencies of cylindrical Helmholtz resonators // J. Acoust. Soc. Am. 1975. V. 57. № 6. Pt. 2. P. 1533–1535.

17. *Kang Z.X, Ji Z.L.* Acoustic length correction of duct extension into a cylindrical chamber // J. Sound Vibr. 2008. V. 310. № 4–5. P. 782–791.

18. *Chaitanya P., Munjal M.L.* Effect of wall thickness on the end correction of the extended inlet and outlet of a double-tuned expansion chamber // Appl. Acoust. 2011. V. 72. № 1. P. 41–51.