АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2012, том 58, № 6, с. 683–691

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 519.958:531.33.1:535.4

ВОЛНЫ, ЗАХВАЧЕННЫЕ ТОНКИМ ИСКРИВЛЕННЫМ ЭКРАНОМ В ВОЛНОВОДЕ С ЖЕСТКИМИ СТЕНКАМИ

© 2012 г. С. А. Назаров

Институт проблем машиноведения РАН

199178 Санкт-Петербург, Васильевский остров, Большой пр. 61

E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 15.02.2012 г.

Выведены условия существования волн, захваченных симметричным жестким тонким экраном в двумерном волноводе с жесткими стенками. Найдены асимптотические формулы для соответствующих собственных чисел, причем асимптотические структуры отличаются от присущих собственным числам задач в ограниченных областях. Обсуждаются разнообразные обобщения результатов и формулируются открытые вопросы.

Ключевые слова: волновод, жесткие стенки, тонкий искривленный экран, ловушечные моды, дискретный и непрерывный спектры, асимптотика собственных чисел.

ВОЛНОВОД С ЭКРАНОМ

Пусть Π – полоса $\mathbb{R} \times (-1/2, 1/2)$, а симметричное относительно оси абсцисс препятствие

$$\Theta^\varepsilon = \{x = (x_1, x_2) : x_2 \in \theta = [-a, a], \\ -\varepsilon H_-(x_2) \le x_1 \le \varepsilon H_+(x_2)\} \tag{1}$$

зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$ и определяется числом $a \in (0, 1/2)$ и гладкими на замкнутом сегменте $\theta = [-a, a]$ функциями $H_\pm$, для которых справедливы соотношения

$$H(x_2) := H_-(x_2) + H_+(x_2) \ge 0, \quad x_2 \in (-a, a), \\ H_\pm(-x_2) = H_\pm(x_2), \quad H_\pm(a) = 0. \tag{2}$$

Иными словами, Θ^ε – тонкий слабоискривленный экран с острыми кромками, симметричный относительно средней линии полосы Π.

В области $\Omega^\varepsilon = \Pi \backslash \Theta^\varepsilon$ (волноводе с жесткими стенками и экраном; рис. 1) рассмотрим краевую задачу Неймана для уравнения Гельмгольца

$$-\Delta u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \quad \partial_\nu u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Omega^\varepsilon, \tag{3}$$

описывающую, например, акустические колебания среды. При этом Δ – оператор Лапласа, λ^ε – спектральный параметр (квадрат частоты колебаний), а ∂_ν – производная вдоль внешней нормали и $\partial_\nu = \pm\partial/\partial x_2$ на стенках $\mathbb{R} \times \{\pm 1/2\}$. Известно, что непрерывный спектр задачи (3) заполняет положительную вещественную полуось $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty)$: колебательные процессы происходят на любых частотах. Цель статьи – найти асимптотику и достаточные условия появления собственных чисел задачи, вкрапленных в непрерывный спектр, т.е. тех частот, при которых существуют захваченные волны – решения задачи (3), локализованные вблизи экрана и экспоненциально затухающие при удалении от него. Для этого применяется прием [1] постановки искусственных краевых условий Дирихле

$$u_\#^\varepsilon(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in \Upsilon^\varepsilon \tag{4}$$

на линии симметрии $\Upsilon^\varepsilon = \{x : x_2 = 0\} \backslash \Theta^\varepsilon$. Сузим задачу (3) на верхнюю половину волновода $\Omega_\#^\varepsilon = \{x \in \Omega^\varepsilon : x_2 > 0\}$

$$-\Delta u_\#^\varepsilon(x) = \lambda_\#^\varepsilon u_\#^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega_\#^\varepsilon, \\ \partial_\nu u_\#^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Omega_\#^\varepsilon \backslash \Upsilon^\varepsilon \tag{5}$$

и дополним ее искусственным краевым условием (4). Благодаря последнему возникает положительный порог (точка отсечки) непрерывного спектра задачи (5), (4), который теперь заполняет луч $[\pi^2, \infty)$, а ниже порога π^2 может располагаться дискретный спектр. Если $\lambda_\#^\varepsilon \in (0, \pi^2)$ – собственное число этой задачи, то нечетное продолжение с половины $\Omega_\#^\varepsilon$ на целый волновод Ω^ε соответствующей собственной функции $u_\#^\varepsilon \in H^1(\Omega_\#^\varepsilon)$ оказывается собственной функцией (локализованным решением) задачи (3) с тем же собственным числом $\lambda_\#^\varepsilon$. Поэтому всюду в работе исследуется именно искусственно образованная задача (5),

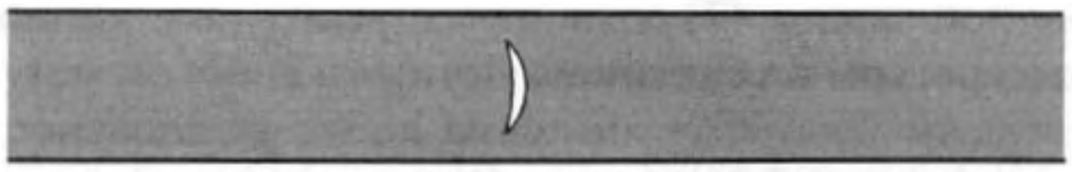

Рис. 1. Волновод с экраном.

(4), к которой применяются вариационный и асимптотический методы.

В работе [1] показано, что любое препятствие

$$\Xi = \{x : x_1 \in [-b, b],\ \ |x_2| \le h(x_1)\}, \tag{6}$$

где $b > 0$, и h – положительная функция на интервале $(-b,\ b)$, производит захват волны в волноводе Π, т.е. задача (3) в области $\Pi\backslash\Xi$ при некотором $\lambda = \lambda_\Xi \in (0, \pi^2)$ приобретает решение, затухающее при $x_1 \to \pm\infty$. Экран (1), вообще говоря, не удовлетворяет требованию (6). Поэтому полученные далее результаты отличаются от представленных в статье [1]. В частности, найдены экраны, для которых на интервале $(0, \pi^2)$ собственных чисел нет, т.е. заведомо не для всякого препятствия можно найти локализованное решения задачи (3) с параметром $\lambda \in (0, \pi^2)$. Кроме того, установлено достаточно общее достаточное условие существования захваченной волны в исследуемом частотном диапазоне. Проведено полное исследование одномерных экранов, для которых $H_+ = -H_-$ и $H = 0$ в определениях (1), и (2). Именно любой искривленный ($H_+ \ne 0$) симметричный экран захватывает по крайней мере одну волну в волноводе Π. Подчеркнем, что все выведенные далее асимптотические формулы для частот захваченных волн являются полностью новыми.

При $\varepsilon \to +0$ множество (1) истончается и в пределе превращается в сегмент $\Theta^0 = \{0\} \times \theta = \{x : x_1 = 0, |x_2| \le a\}$ на оси ординат; положим $\Pi_\# = \mathbb{R} \times (0, 1/2)$ и $\Theta^0_\# = \{x \in \Theta^0 : x_2 > 0\}$. Смешанная краевая задача в предельной ($\varepsilon = 0$) области $\Omega^0_\# = \Pi_\# \backslash \Theta^0_\#$ (полоса шириной 1/2 с краевым надрезом длиной a),

$$\begin{gathered} -\Delta u^0_\#(x) = \lambda^0_\# u^0_\#(x),\ \ x \in \Omega^0_\#,\ \ \partial_\nu u^0_\#(x) = 0, \\ x \in \partial\Omega^0_\# \backslash \Upsilon^0,\ \ u^0_\#(x_1, 0) = 0,\ \ x \in \Upsilon^0 \end{gathered} \tag{7}$$

имеет явное решение (стоячую волну)

$$w^0(x) = \sin(\pi x_2), \tag{8}$$

которое и будет использовано далее как отправная точка асимптотического анализа. Функция (8) удовлетворяет условию Неймана на сторонах $\theta^{0\pm}_\# = \{x : x_1 = \pm 0, |x_2| \le a\}$ прямого экрана $\Theta^0_\#$ нулевой толщины потому, что они перпендикулярны оси абсцисс, а функция w^0 не зависит от координаты x_1. В статье [2] показано, что у однородной задачи (7) есть другое решение с линейным ростом на бесконечности:

$$\begin{gathered} w^1(x) = (x_1 \pm b_\#)\sin(\pi x_2) + O\big(\exp(-2\sqrt{2}\pi\,|x_1|)\ \big), \\ x_1 \to \pm\infty. \end{gathered} \tag{9}$$

Явная формула для этого решения, нечетного относительно переменной x_1, недоступна, однако при построении асимптотики такая формула, в частности конкретное значение постоянной $b_\#$, не нужна.

Следующее простое утверждение показывает, что у задачи (7) не может быть собственных чисел на интервале $(0, \pi^2)$.

Предложение 1. *Для любой функции* $v \in \mathring{H}^1(\Omega^0_\#; \Upsilon^0_\#)$ *справедливо соотношение*

$$\int\limits_{\Omega^0_\#} |\nabla v(x)|^2\, dx \ge \pi^2 \int\limits_{\Omega^0_\#} |v(x)|^2 dx, \tag{10}$$

где ∇ *– оператор-градиент, а* $\mathring{H}^1(\Omega^0_\#; \Upsilon^0)$ *– подпространство функций из класса Соболева* $H^1(\Omega^0_\#)$, *обращающихся в нуль на* $\Upsilon^0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Доказательство. Формула (10) получается интегрированием по $x_1 \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (вырожденный экран нулевой толщины не мешает этому) одномерного неравенства Фридрихса

$$\int\limits_0^{1/2} \left|\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right|^2 dx_2 \ge \pi^2 \int\limits_0^{1/2} |v(x_1, x_2)|^2\, dx_2, \tag{11}$$

справедливого для функций, которые обращаются в нуль при $x_2 = 0$.

Дискретный спектр у задачи (7) отсутствует, однако вопрос о существовании точечного спектра (собственных чисел, вкрапленных в непрерывный спектр) остается открытым. Последнее в равной мере относится и к задаче (3) при $\varepsilon = 0$.

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД [1]

В статьях [3, 4] был сформулирован вариационный метод поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра, собранный из нескольких источников и состоящий, в основном, из двух технических приемов, безразличных к присутствию малого параметра ε. Продемонстрируем их. Согласно [5; гл. 10] нижняя грань $\underline{\sigma}^\varepsilon$ спектра задачи (5), (4) определяется по формуле

$$\underline{\sigma}^\varepsilon = \inf_{v \in \mathring{H}^1(\Omega^\varepsilon_\#; \Upsilon^\varepsilon)} \frac{\|\nabla v; L_2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2}{\|v; L_2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2}. \tag{12}$$

[1] Вариационный метод пригоден и для препятствий, вытянутых вдоль оси абсцисс (см. работу [1]), которые все-таки не поддаются разрабатываемому в статье асимптотическому анализу.

При этом $\|\cdot; L_2(\Omega_\#^\varepsilon)\|$ – норма в пространстве Лебега $L_2(\Omega_+^\varepsilon)$. С целью придти к противоречию предположим, что дискретный спектр σ_d^ε задачи (5), (4) пуст, т.е. $\underline{\sigma}^\varepsilon = \pi^2$ согласно формуле (12), а значит, благодаря той же формуле справедливо соотношение

$$\| \nabla v; L_2(\Omega_\#^\varepsilon) \|^2 - \pi^2 \| v; L_2(\Omega_\#^\varepsilon) \|^2 \geq 0, \quad v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_\#^\varepsilon; \Upsilon^\varepsilon). \tag{13}$$

Подставим в него пробную функцию $v^\delta(x) = \exp(-\delta|x_1|)\sin(\pi x_2)$, где δ – малое положительное число. Затухающий экспоненциальный множитель обеспечивает включение $v^\delta \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_\#^\varepsilon; \Upsilon^\varepsilon)$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\| v^\delta; L_2(\Omega_\#^\varepsilon) \|^2 = \| v^\delta; L_2(\Pi_\#) \|^2 - \| v^\delta; L_2(\Theta_\#^\varepsilon) \|^2 = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\delta|x_1|)\, dx_1 \int_0^{1/2} \sin^2(\pi x_2) dx_2 - \\
&- \int_{\Theta_\#^\varepsilon} \exp(-2\delta|x_1|) \sin^2(\pi x_2) dx = \\
&= \frac{1}{4\delta} - \varepsilon \int_0^a H(x_2) \sin^2(\pi x_2) dx_2 + O(\delta), \\
&\| \nabla v^\delta; L_2(\Omega_\#^\varepsilon) \|^2 \frac{\pi^2}{\delta} \int_0^{1/2} \cos^2(\pi x_2) dx_2 + \\
&+ \delta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\delta|x_1|)\, dx_1 \int_0^{1/2} \sin^2(\pi x_2) dx_2 - \\
&- \int_{\Theta_\#^\varepsilon} \exp(-2\delta|x_1|) \left|\nabla v^\delta(x)\right|^2 dx = \frac{\pi^2}{4\delta} - \pi^2 \varepsilon \times \\
&\times \int_0^a H(x_2) \cos^2(\pi x_2) dx_2 + O(\delta).
\end{aligned} \tag{14}$$

Подставив формулы (14) в неравенство (13), видим, что члены порядка δ^{-1} взаимно уничтожаются, и в результате это неравенство принимает вид

$$\pi^2 \varepsilon \int_0^a H(x_2) \cos(2\pi x_2) dx_2 \leq c\delta. \tag{15}$$

Если интеграл в левой части (15) положителен, то искомое противоречие обнаруживается при малом δ, т.е. соотношение

$$\int_0^a H(x_2) \cos(2\pi x_2) dx_2 > 0 \tag{16}$$

обеспечивает формулу $\underline{\sigma}^\varepsilon < \pi^2$, которая в свою очередь означает, что дискретный спектр σ_d^ε задачи (5), (4) не пуст, и $\lambda_{\#1}^\varepsilon = \underline{\sigma}^\varepsilon$ – наименьшее собственное число в нем.

При условии

$$\int_0^a H(x_2) \cos(2\pi x_2) dx_2 < 0, \tag{17}$$

вариационный метод не позволяет получить информацию о дискретном спектре (см. далее предложения 3 и 6, указывающие на его отсутствие при малом $\varepsilon > 0$), однако в "вырожденном" случае

$$\int_0^a H(x_2) \cos(2\pi x_2) dx_2 = 0, \tag{18}$$

характерном для экранов нулевой толщины, это сделать удается. Следуя работе [4], изменим пробную функцию и положим $\mathbf{v}^\delta(x) = \exp(-\delta|x_1|)\sin(\pi x_2) + \sqrt{\delta}\mathbf{v}(x)$; при этом $\mathbf{v}$ – произвольная гладкая функция с носителем в окрестности экрана $\Theta_\#^\varepsilon$. При помощи соотношения (14) придаем неравенству (13), справедливому вследствие предположения об отсутствии дискретного спектра, такой вид:

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{\delta}\pi^2 (\sin(\pi x_2), \mathbf{v})_{\Omega_\#^\varepsilon} - c_\mathbf{v}\delta \leq \\
&\leq 2\sqrt{\delta}\pi (\cos(\pi x_2), \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2})_{\Omega_\#^\varepsilon} + c_\mathbf{v}\delta.
\end{aligned} \tag{19}$$

Теперь, применив формулу Грина, т.е. "перебросив" производную $\partial/\partial x_2$ с $\mathbf{v}(x)$ на $\cos(\pi x_2)$ и выполнив дифференцирование вместе с простыми преобразованиями, получаем вместо (19) неравенство

$$\sqrt{\delta} \int_{\partial\Theta_\#^\varepsilon \setminus \partial\Pi} \mathbf{v}(x) \frac{\partial}{\partial \nu} \sin(\pi x_2)\, ds_x \leq c_\mathbf{v}\delta, \tag{20}$$

которое нетрудно сделать ложным при малом $\delta > 0$ путем подбора пробной функции $\mathbf{v}$. В самом деле, производные вдоль внешних нормалей на дугах $\theta_\#^{\varepsilon\pm} = \{x : x_2 \in (0, a), x_1 = \pm\varepsilon H_\pm(x_2)\}$ половины $\Theta_\#^\varepsilon$ экрана приобретают вид

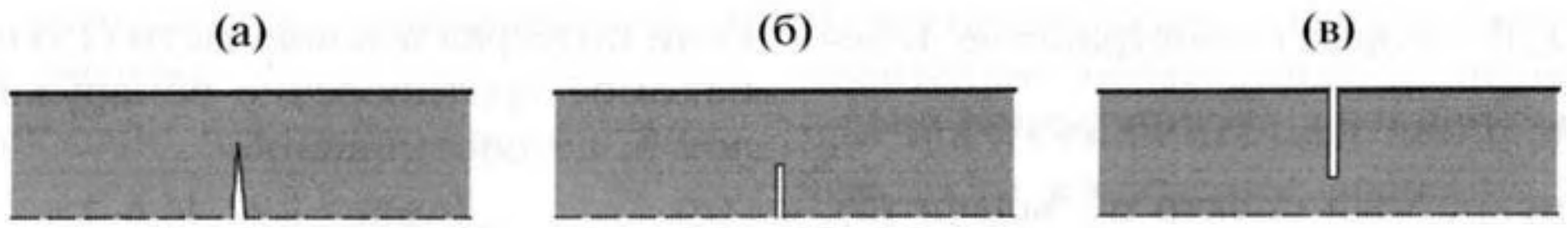

Рис. 2. Половины волноводов с половинами экранов.

$$\frac{\partial}{\partial \nu^{\pm}} = \left(1 + \varepsilon^2 \left|\frac{dH_{\pm}}{dx_2}(x_2)\right|^2\right)^{-1/2} \times \left(\mp\frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon\frac{dH_{\pm}}{dx_2}(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad (21)$$

т.е. $\partial_\nu \sin(\pi x_2) \neq 0$ по крайней мере в одной точке на $\theta_{\#}^{\varepsilon+} \cup \theta_{\#}^{\varepsilon+}$, если только функции $H_{\pm}$ из формул (1), (2) не равны нулю тождественно. Осталось локализовать пробную функцию $\mathbf{v}$ вблизи упомянутой точки и выбрать ее знак так, чтобы интеграл из левой части (20) стал положительным.

Предложение 2. *Если выполнено одно из соотношений* (16) *или* (18), *то при любом* $\varepsilon > 0$ *задача* (5), (4), *а значит, и задача* (3) *имеют собственное число на интервале* $(0, \pi^2)$.

Ниже при помощи совершенно иных соображений будут установлены следующие утверждения.

Предложение 3. 1) *В условиях предложения* 2 *при малом* $\varepsilon > 0$ *на интервале* $(0, \pi^2)$ *имеется в точности одно собственное число.*

2) *Если выполнено неравенство* (17), *то при малом* $\varepsilon > 0$ *у задачи* (5), (4) *собственных чисел на интервале* $(0, \pi^2)$ *нет.*

Поскольку $\cos(2\pi x_2) > 0$ при $x_2 < 1/4$, в силу предложений 2 и 3 требование $a \leq 1/4$ обеспечивает существование в точности одного собственного числа задач (5), (4) и (3). Иными словами, симметричный тонкий экран положительной толщины, перекрывающий не более половины волновода, обязательно захватывает волну; при этом толщина экрана не обязана быть малой, но малость параметра ε в формуле (1) заведомо обеспечивает единственность собственного числа задачи (5), (4) на интервале $(0, \pi^2)$. В случае $a > 1/4$ захваченная волна может существовать, а может и отсутствовать, – это определяется функцией толщины H. Если $H = 0$, а экран – одномерная дуга, то выполнено соотношение (18), и экспоненциально затухающая волна возникает при любом зазоре между экраном и стенками волновода, а степень изогнутости экрана по-прежнему не играет роли.

Пусть, например, $H_{\pm}(x_2) = k(a - |x_2|)$ (рис. 2а). Тогда

$$\int_0^a H(x_2)\cos(2\pi x_2)dx_2 = 2k\int_0^a (a - x_2)\cos(2\pi x_2)dx_2 = \frac{k}{\pi^2}\sin^2(\pi a)$$

и, следовательно, захваченная волна существует для всех $a \in (0, 1/2)$ при условии малости $\varepsilon \in (0, \varepsilon_a)$; здесь ε_a – положительная величина, зависящая от параметра a.

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННОГО ЧИСЛА

Множество (1) следует интерпретировать как регулярное возмущение (см. [6; § 7.6.5] и [7; § 5.5] прямого экрана Θ^0 нулевой толщины, и поэтому асимптотику решения задачи (5), (4) ищем в виде

$$u_{\#}^{\varepsilon}(x) = w^0(x) + \varepsilon w'(x) + \ldots . \quad (22)$$

Здесь и далее многоточие заменяет несущественные для предпринимаемого асимптотического анализа члены. В качестве главного члена взято решение (8) предельной задачи (7) с "наилучшим" поведением на бесконечности, т.е. ограниченное (ср. решение w^1 с линейным ростом (9)). Подчеркнем, что формула (22) нуждается в существенной коррекции при больших значениях $|x_1|$, так как захваченная волна обязана затухать на бесконечности. Именно требование затухания позволяет выяснить асимптотику собственного числа.

Подставим сумму (22) в краевое условие (3) на дугах $\theta^{\varepsilon\pm}$. При учете формулы (21) для нормальной производной находим

$$\partial_\nu u_{\#}^{\varepsilon}(\pm\varepsilon H_{\pm}(x_2), x_2) = \varepsilon(\mp\partial_2 w'(\pm 0, x_2) + \pi\cos(\pi x_2)\partial_2 H_{\pm}(x_2)) + \ldots, \quad (23)$$

где $\partial_j = \partial/\partial x_j$. Уничтожая главную часть невязки (23), назначим краевые условия

$$\mp\partial_2 w'(\pm 0, x_2) = -\pi\cos(\pi x_2)\partial_2 H_{\pm}(x_2), \quad x_2 \in \theta. \quad (24)$$

Считая, что

$$\lambda_{\#}^{\varepsilon} = \pi^2 - \varepsilon^2\lambda' + \ldots, \quad (25)$$

выводим из равенств (5) и (4) соотношения

$$-\Delta w'(x) = \pi^2 w'(x), \quad x \in \Omega_\#^0, \quad \partial_2 w'\left(x_1, \frac{1}{2}\right) = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R},$$
$$w'(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in \Upsilon^0. \tag{26}$$

Согласно результатам [2] задача (26), (24) имеет решение с линейным ростом на бесконечности, которое определено с точностью до слагаемого $c_0' w^0 + c_1' w^1$ с произвольными постоянными коэффициентами c_0' и c_1'. При учете формул (8) и (9) подбираем эти коэффициенты так, чтобы

$$w'(x) = \pm(b_1' x_1 + b_0')\sin(\pi x_2) + O(\exp(-2\sqrt{2}\pi|x_1|), \quad \pm x_1 \to \pm\infty, \tag{27}$$

но далее все-таки учитываем упомянутый произвол. Отметим, что свойство (27) обеспечено четностью и нечетностью функций w^0 и w^1 относительно переменной x_1.

Вычислим коэффициент b_1' при помощи метода [8] и подставим функции w^0 и w' в формулу Грина на усеченной области $\Omega_+^0(R) = \{x \in \Omega_\#^0 : |x_1| < R\}$:

$$\frac{b'}{2} = \int_0^{1/2} \sin^2(\pi x_2)\, dx_2 =$$
$$= \lim_{R\to\infty} \sum_{\pm} \pm \int_0^{1/2} \sin(\pi x_2)\partial_1 w'(\pm R, x_2)\, dx_2 =$$
$$= \lim_{R\to\infty}\Big(\int_{\Omega_+^0(R)} \sin(\pi x_2) \times (\Delta w'(x) + \pi^2 w'(x))\, dx +$$
$$+ \sum_{\pm} \pm \int_0^a \sin(\pi x_2)\partial_1 w' \times (\pm 0, x_2)\, dx_2\Big) = \tag{28}$$
$$= \frac{\pi}{2}\sum_{\pm}\int_0^a \sin(2\pi x_2)\partial_2 H_\pm(x_2) dx_2 =$$
$$= -\pi^2 \int_0^a H(x_2)\cos(2\pi x_2) dx_2.$$

Покажем, что неравенство (16) обеспечивает соотношение $\lambda' > 0$, помещающее собственное число (25) на интервал $(0, \pi^2)$, разумеется, в случае малого $\varepsilon > 0$. В этих условиях экспоненциально затухающему решению $u_\#^\varepsilon$ уравнения Гельмгольца следует предписать такие разложения при $x_1 \to \pm\infty$:

$$u_\#^\varepsilon(x) = c_\pm^\varepsilon \sin(\pi x_2) e^{\mp|x_1|(\pi^2 - \lambda_\#^\varepsilon)^{1/2}} + \ldots =$$
$$= (c_\pm^0 + \varepsilon c_\pm' + \ldots)\sin(\pi x_2)(1 \mp |x_1|(\varepsilon^2\lambda' + \ldots)^{1/2}) + \tag{29}$$
$$+ \ldots = c_\pm^0 \sin(\pi x_2) + \varepsilon\left(c_\pm' \mp c_\mp^0 x_1 \sqrt{\lambda'}\right)\sin(\pi x_2) + \ldots$$

В силу представлений (8), (9), (27) и при учете упомянутого ранее произвола линейной комбинации $c_0' w^0 + c_1' w^1$ в выборе решения задачи (26), (24) получаем

$$w^0(x) + \varepsilon(w'(x) + c_0' w^0(x) + c_1' w^1(x)) =$$
$$= \sin(\pi x_2)\Big(1 + \varepsilon\Big(\pm b_1' x_1 \pm b_0' + c_0' + c_1'(x_1 \pm b_\#)\Big) + \ldots\Big), \tag{30}$$
$$x_1 \to \pm\infty.$$

Сравнивая коэффициенты в разложениях (29) и (30) одного и того же решения $u_\#^\varepsilon$, сразу же обнаруживаем, что $c_\pm^0 = 1$, а затем, решая совокупность четырех алгебраических уравнений

$$\mp\sqrt{\lambda'} = \pm b_1' + c_1', \quad c_\pm' = \pm b_0' + c_0' \pm c_1' b_\#,$$

находим, что $c_1' = 0$ и

$$\lambda' = (b_1')^2 = 4\pi^4\left(\int_0^a H(x_2)\cos(2\pi x_2) dx_2\right)^2. \tag{31}$$

Коэффициент c_0', а значит, и коэффициенты $c_\pm'$, остались произвольными. Их можно определить на следующем шаге асимптотической процедуры, однако они не понадобятся, так как поправка λ' в представлении (25) собственного числа $\lambda_\#^\varepsilon$ уже дана равенством (31).

Подчеркнем, что в случае $b_1' > 0$ вывести соотношение (31) не удается, так как равенство $\sqrt{\lambda'} = -b_1'$ становится бессмысленным. Иными словами, формула (31) обеспечена ограничением (16).

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННОГО ЧИСЛА В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

Согласно выражению (28) условие (18) означает, что решение w' задачи (26), (24) ограничено, т.е. формула (31) перестает быть содержательной. Для исправления ситуации дополним сумму (22) слагаемым $\varepsilon^2 w''(x)$, а вместо формулы (25) напишем

$$\lambda_\#^\varepsilon = \pi^2 - \varepsilon^4\lambda'' + \ldots. \tag{32}$$

Принимая во внимание равенство (21), уточняем соотношение (23) следующим образом:

$$\left(1 + \varepsilon^2|\partial_2 H_\pm(x_2)|^2\right)^{1/2}\partial_\nu u_\#^\varepsilon(\pm\varepsilon H_\pm(x_2), x_2) =$$
$$= \varepsilon(\mp\partial_1 w'(\pm 0, x_2) + \pi\cos(\pi x_2)\partial_2 H_\pm(x_2)) +$$
$$+ \varepsilon^2(\mp\partial_1 w''(\pm 0, x_2) + \partial_2 H_\pm(x_2)\partial_2 w'(\pm 0, x_2) - \tag{33}$$
$$- H_\pm(x_2)\partial_1^2 w'(\pm 0, x_2)) + \ldots.$$

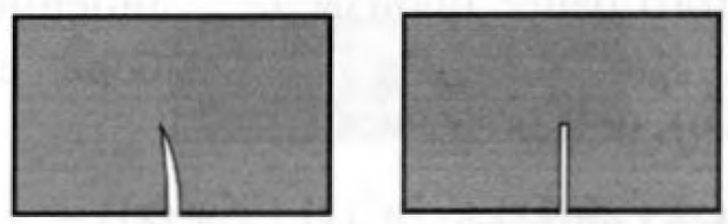

Рис. 3. Прямоугольники с надрезами, криволинейным (а) и прямым (б).

Здесь применена формула Тейлора

$$\partial_1 w'(\pm\varepsilon H_\pm(x_2), x_2) = \partial_1 w'(\pm 0, x_2) \pm$$
$$\pm\varepsilon H_\pm(x_2)\partial_1^2 w'(\pm 0, x_2) + \ldots.$$

Множитель при ε в правой части (33) равен нулю благодаря (24). Множитель при ε^2 исчезает, если функция w'' является решением задачи

$$\begin{gathered}-\Delta w''(x) = \pi^2 w''(x), \quad x \in \Omega_\#^0, \quad w''(x) = 0, \quad x \in \Upsilon^0,\\ \partial_2 w''\left(x_1, \frac{1}{2}\right) = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad \mp\partial_1 w''(\pm 0, x_2) =\\ = -\partial_2 H_\pm(x_2)\partial_2 w'(\pm 0, x_2) +\\ + H_\pm(x_2)\partial_1^2 w'(\pm 0, x_2), \quad x_2 \in (0, a).\end{gathered} \tag{34}$$

Задача (34) имеет решение w' с линейным ростом на бесконечности, и для $w'(x)$ выполнена формула (27) с коэффициентами b_0'' и b_1'' вместо b_0' и b_1'. Повторив выкладки (28) и продолжив преобразования при помощи многократного интегрирования по частям, видим, что

$$\begin{gathered}\frac{b_1''}{2} = \sum_{\mp}\int_0^a \sin(\pi x_2)\big(\partial_2 H_\pm(x_2)\partial_2 w'(\pm 0, x_2) -\\ -H_\pm(x_2)\partial_1^2 w'(\pm 0, x_2)\big)\,dx_2 = \sum_{\pm}\int_0^a \sin(\pi x_2)(\partial_2 H_\pm(x_2)\times\\ \times\,\partial_2 w'(\pm 0, x_2) + H_\pm(x_2)(\partial_2^2 w'(\pm 0, x_2) +\\ + \pi^2 w'(\pm 0, x_2)))\,dx_2 = \sum_{\pm}\int_0^a w'(\pm 0, x_2)\pi\cos(\pi x_2)\times\\ \times\,\partial_2 H_\pm(x_2)\,dx_2 = \sum_{\pm}\pm\int_0^a w'(\pm 0, x_2)\partial_1 w'(\pm 0, x_2)\,dx_2 =\\ = -\int_{\Omega_\#^0(R)} (w'(x)\Delta w'(x) + |\nabla w'(x)|^2)\,dx +\\ + \sum_{\pm}\pm\int_0^{1/2} w'(\pm, x_2)\partial_1 w'(\pm R, x_2)\,dy =\\ = -\int_{\Omega_\#^0(R)} \left(|\nabla w'(x)|^2 - \pi^2|w'(x)|^2\right)dx + o(1) \text{ при } R \to +\infty.\end{gathered} \tag{35}$$

В силу представления (27) с коэффициентом b_1' 0 производная $\partial_1 w'(x)$ и последнее подынтегральное выражение в (35) экспоненциально затухают при $x_1 \to \pm\infty$. Таким образом, возможен предельный переход $R \to +\infty$.

Осталось убедиться в том, что $b_1'' < 0$. Тогда такие же рассуждения, как и в предыдущем разделе, приведут к формуле

$$\lambda'' = (b_1'')^2 = 4\left(\int_{\Omega_\#^0}\left(|\nabla w'(x)|^2 - \pi^2|w'(x)|^2\right)dx\right)^2 \tag{36}$$

для поправочного члена в асимптотике (32) собственного числа $\lambda_\#^\varepsilon \in (0, \pi^2)$.

Предложение 4. *Если* b_1' 0 *в разложении* (27) *решения* w' *задачи* (26), (24), *то*

$$\int_{\Omega_\#^0}\left(|\nabla w'(x)|^2 - \pi^2|w'(x)|^2\right)dx > 0.$$

Доказательство. Представим функцию w' в виде

$$w'(x) = w_0'(x_1)\sin(\pi x_2) + w_\perp'(x),$$
$$\int_0^{1/2}\sin(\pi x_2)w_\perp'(x_1, x_2)\,dx_2 = 0.$$

Ввиду последнего условия ортогональности справедливо неравенство Пуанкаре

$$\int_0^{1/2}\left|\partial_2 w_\perp'(x_1, x_2)\right|^2 dx_2 \ge 9\pi^2\int_0^{1/2}\left|w_\perp'(x_1, x_2)\right|^2 dx_2.$$

Подчеркнем, что β_2 $9\pi^2$ – второе собственное число смешанной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения $-\partial_2 W(x_2)$

$\beta W(x_2)$ на отрезке $(0, 1/2) \in x_2$. Применяя это неравенство, дополнительно проинтегрированное по $x_1 \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, получаем

$$\begin{gathered}\int_{\Omega_\#^0(R)}\left(|\nabla w'(x)|^2 - \pi^2|w'(x)|^2\right)dx =\\ = \int_{\Omega_\#^0(R)}\left|\partial_1 w_0'(x_1)\right|^2\sin^2(\pi x_2)\,dx +\\ + \int_{\Omega_\#^0(R)}\left(\left|\nabla_x w_\perp'(x)\right|^2 - \pi^2\left|w_\perp'(x)\right|^2\right)dx \ge\\ \ge \frac{1}{4}\times\int_{-R}^{R}\left|\partial_1 w_0'(x_1)\right|^2 dx_1 + 8\pi^2\int_{\Omega_\#^0(R)}\left|w^\perp(x)\right|^2 dx.\end{gathered}$$

Сумма последних двух интегралов равна нулю только при $w_0'(x_1)$ c' и $w_\perp'$ 0, т.е. при w' $c'\sin(\pi x_2)$, что невозможно (проверятся непосредственно).

КОММЕНТАРИИ К АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

В прямоугольнике $\Xi = (0, 1/2) \times (-1/2, 1/2)$ с удаленной половиной $\Theta_\#^\varepsilon$ экрана (1) (рис. 3а) рассмотрим вспомогательную смешанную краевую задачу

$$-\Delta v^\varepsilon(x) = \mu^\varepsilon v^\varepsilon(x), \quad x \in \Xi^\varepsilon = \Xi\backslash\Theta_\#^\varepsilon, \quad v^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi^\varepsilon \cap \Upsilon^\varepsilon, \quad \partial_\nu v^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi^\varepsilon\backslash\Upsilon^\varepsilon, \tag{37}$$

в которой условия Дирихле (4) поставлены только на нижнем основании прямоугольника, а на остальной части границы $\partial\Xi^\varepsilon\backslash\Upsilon^\varepsilon$, в том числе и на вновь образованных боковых сторонах прямоугольника, – условия Неймана.

По понятным причинам предельная ($\varepsilon = 0$) задача (37) в прямоугольнике с разрезом $\Xi^0 = \Xi\backslash\{x : : x_1 = 0, x_2 \in (0, a]\}$ (рис. 3б) имеет собственное число $\mu_1^0 = \pi^2$, которому отвечает собственная функция $v_1^0(x) = \sin(\pi x_2)$. Подчеркнем, что эта функция положительна внутри Ξ^0, а значит, по принципу максимума собственное число μ_1^0 – первое (наименьшее) и простое.

Асимптотика собственных чисел краевых задач в ограниченных областях с регулярно возмущенной границей известна (см., например, [6; § 7.6.5] и [7; § 5.5 и гл. 9]). Асимптотическая формула для собственной функции сохраняет вид (22), однако асимптотическое представление собственного числа изменяется коренным образом, даже в порядке малости основной поправки. Именно,

$$v_1^\varepsilon(x) = v_1^0(x) + \varepsilon v_1'(x) + \ldots = \sin(\pi x_2) + \varepsilon v_1'(x) + \ldots, \quad \mu_1^\varepsilon = \pi^2 - \varepsilon\mu_1' + O(\varepsilon^2). \tag{38}$$

При этом число μ' и функция v_1' находятся при решении краевой задачи

$$-\Delta v_1'(x) - \pi^2 v_1'(x) = f_1'(x) := -\mu_1' \sin(\pi x_2), \quad x \in \Xi^0,$$
$$\mp\partial_1 v_1'(\pm 0, x_2) = g_{1\pm}'(x_2) := -\pi\cos(\pi x_2)\partial_2 H_\pm(x_2), \quad x_2 \in (0, a), \tag{39}$$
$$v_1'(x_1, 0) = 0, \quad 0 < |x_1| < \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial v_1'}{\partial x_2}\left(x_1, \frac{1}{2}\right) = 0, \quad |x_1| < \frac{1}{2},$$
$$\frac{\partial v_1'}{\partial x_1}\left(\pm\frac{1}{2}, x_2\right) = 0, \quad 0 < x_1 < \frac{1}{2}.$$

Поскольку $\mu_1^0 = \pi^2$ – простое собственное число, задача (39) имеет решение $v_1' \in H^1(\Xi^0)$ при выполнении следующего условия ортогональности (альтернатива Фредгольма)

$$\int_{\Xi^0} v_1^0(x) f_1'(x)\,dx + \sum_\pm \int_0^a v_1^0(\pm 0, x_2) g_{1\pm}'(x_2)\,dx_2 = 0. \tag{40}$$

Считая это равенство выполненным, а решение – найденным, при помощи формулы Грина и явных выражений для правых частей f_1' и $g_{1\pm}'$ получаем следующую эквивалентную формулировку условия (40):

$$\mu_1' = 4\mu_1' \int_{\Xi^0} \sin^2(\pi x_2)\,dx = 4\int_{\Xi^0} \sin(\pi x_2)(\Delta_x v_1'(x) + \pi^2 v_1'(x))\,dx = 4\sum_\pm \mp \int_0^a \sin(\pi x_2)\partial_1 v_1'(\pm 0, x_2)\,dx_2 =$$
$$= -2\pi\int_0^a \sin(2\pi x_2)\partial_2 H(x_2)\,dx_2 = 4\pi^2 \int_0^a \cos(2\pi x_2) H(x_2)\,dx_2. \tag{41}$$

Итак, множитель μ_1' в асимптотической формуле (38) вычислен. Он положителен в случае (16), а значит, собственное число μ_1^ε попадает на интервал $(0, \pi^2)$, но одновременно $\mu_1^\varepsilon > \pi^2$ в случае (17). Эти положения будут использованы при доказательстве предложения 6.

При условии (18) формула (38) перестает быть информативной, так как $\mu_1' = 0$. Вместе с тем, у задачи (39) есть решение v_1', и поступая аналогично предыдущему разделу, можно вычислить поправочный член в асимптотике

$$\mu_1^\varepsilon = \pi^2 - \varepsilon^2\mu_1'' + O(\varepsilon^3), \tag{42}$$

причем $\mu_1^\varepsilon \in (0, \pi^2)$ при малом $\varepsilon > 0$ в силу соотношения

$$\mu_1'' = 4\int_{\Xi^0}\left(\left|\nabla v_1'(x)\right|^2 - \pi^2\left|v_1'(x)\right|^2\right)dx > 0, \tag{43}$$

которое проверяется аналогично доказательству предложения 4.

Предложение 5. *Первое собственное число* μ_1^ε *задачи* (37) *допускает представление* (38) *или представление* (42) *в случае* (18). *Поправочные слагаемые вычисляются по формулам* (41) *и* (43).

Оценки остатков в асимптотических разложениях собственного числа задачи (37) устанавливаются по стандартной схеме (см., например, [7; гл. 9 и 10]) при помощи классической леммы о "почти собственных" числах и векторах (см. статью [9], а также ср. спектральное разложение резольвенты в книге [5; § 6.3]). У формул (25) и (32) в неограниченном волноводе $\Omega_\#^\varepsilon$ строение иное, нежели у формул (38) и (43) в ограниченной области Ξ^ε, хотя выражения (31), (36) для поправок включают такие же интегралы, как и в соотношениях (41) и (43). Подчеркнем, что различается и происхождение названных формул: в волноводе

$\Omega_{\#}^{\varepsilon}$ – условие затухания решения при $x \to \pm\infty$, а в области Ξ^{ε} – условие существования решения задачи (39). Совершенно иная и процедура обоснования асимптотики собственных чисел в волноводе. Наиболее простой подход (см., например, [2, 10]) опирается на теорию спектральной меры [5; гл. 5.6]. Не будем проводить сопутствующие выкладки, в достаточной степени рутинные, и лишь упомянем, что многоточие в разложениях (25) и (32) можно заменить бесконечно малыми $O(\varepsilon^3)$ и $O(\varepsilon^5)$ соответственно.

О КРАТНОСТИ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

При учете предложения 5 следующие утверждения устанавливают сформулированные ранее предложения 2 и 3.

Предложение 6. 1) *Если* $\mu_1^{\varepsilon} \geq \pi^2$, *то интервал* $(0, \pi^2)$ *свободен от спектра задачи* (5), (4).

2) *При малом* $\varepsilon > 0$ *на интервале* $(0, \pi^2)$ *не может быть более одного собственного числа задачи* (5), (4).

Доказательство. 1) К неравенству Фридрихса, обслуживающему задачу (37),

$$\| \nabla v;\ L_2(\Xi^{\varepsilon}) \|^2 \geq \mu_1^{\varepsilon} \| v;\ L_2(\Xi^{\varepsilon}) \|^2 \geq \pi^2 \| v;\ L_2(\Xi^{\varepsilon}) \|^2$$

прибавим одномерное неравенство (11), проинтегрированное по $x_1 \in (-\infty, -1/2) \cup (1/2, +\infty)$, и получим соотношение (10) на области $\Omega_{\#}^{\varepsilon}$ вместо области $\Omega_{\#}^{0}$.

2) Предположим, что имеются два собственных числа $\lambda_1^{\varepsilon}, \lambda_2^{\varepsilon} \in (0, \pi^2)$ задачи (5), (4). Воспользуемся максиминимальным принципом [5; теорема 10.2.2]

$$\pi^2 > \lambda_2^{\varepsilon} = \max_{\mathscr{E}_1} \inf_{v \in \mathscr{E}_1 \setminus \{0\}} \frac{\| \nabla v; L_2(\Omega_{\#}^{\varepsilon}) \|^2}{\| v; L_2(\Omega_{\#}^{\varepsilon}) \|^2}. \qquad (44)$$

Здесь $\mathscr{E}_1 \subset \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_{\#}^{\varepsilon}; \Upsilon^{\varepsilon})$ – любое подпространство коразмерностью один. В качестве $\mathscr{E}_1$ можно взять множество

$$\left\{ v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_{\#}^{\varepsilon}; \Upsilon^{\varepsilon}) : \int_{\Xi^{\varepsilon}} v(x) v_1^{\varepsilon}(x)\, dx = 0 \right\}, \qquad (45)$$

поскольку одно условие ортогональности как раз и обеспечивает нужную коразмерность. В формуле (45) фигурирует собственная функция v_1^{ε} задачи (37), отвечающая ее собственному числу μ_1^{ε}. Для второго собственного числа имеет место соотношение $\mu_2^{\varepsilon} = \mu_2^0 + O(\varepsilon)$, которое проверяется так же, как представления первого собственного числа $\mu_1^{\varepsilon} + \mu_1^0 + O(\varepsilon)$ (см., например, [7; § 5.5]), и включает собственное число $\mu_2^0 > \mu_1^0 = \pi^2$ (см. комментарии после формулы (37)). Следовательно, $\mu_2^{\varepsilon} \geq \pi^2$ при малом $\varepsilon > 0$. Теперь по прежней схеме неравенство Пуанкаре

$$\| \nabla v;\ L_2(\Xi^{\varepsilon}) \|^2 \geq \mu_1^{\varepsilon} \| v;\ L_2(\Xi^{\varepsilon}) \|^2,$$

которое справедливо при условиях

$$v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Xi^{\varepsilon}; \partial\Xi^{\varepsilon} \cap \Upsilon^{\varepsilon}), \quad \int_{\Xi^{\varepsilon}} v(x) v_1^{\varepsilon}(x)\, dx = 0$$

и, будучи дополнено проинтегрированным по x_1 одномерным неравенством Фридрихса (11), показывает, что дробь Рэлея из правой части (44) больше $\min\{\pi^2, \mu_2^{\varepsilon}\} = \pi^2$. Обнаруженное противоречие заканчивает проверку утверждения.

ОБОБЩЕНИЯ

Экраны с затупленной кромкой. Последнее требование (2) означает, что экран утончается около концов (рис. 1 и 2а). Это условие введено для упрощения выкладок (28) и (35), где применялось интегрирование по частям на сторонах $\theta^{0\pm}$ сегмента Θ^0. Усовершенствованные асимптотические методы позволяют изучить волновод с препятствием (1) и в случае $H(a) > 0$ (вариационный метод нечувствителен к достаточно произвольным изменениям формы), однако задача (5), (4) становится сингулярно возмущенной, и нужно исследовать явление пограничного слоя около точек $(0, \pm a)$ (ср. [7; гл. 5], [11], а также [2; § 4]). При этом финальные формулы сохраняются полностью. Если, например, экран Θ^{ε} – прямоугольник размером $\varepsilon \times 2a$ и $H_{\pm}(x_2) = 1/2$ (рис. 2б), то величина b_1' из (27) и (28) равна

$$-2\pi^2 \int_0^a \cos(2\pi x_2)\, dx_2 = -2\sin(2\pi a)$$

и, следовательно, собственное число $\lambda_{\#}^{\varepsilon} \in (0, \pi^2)$ существует при любом $a \in (0, 1/2)$, приобретая асимптотику $\pi^2(1 - 4\varepsilon^2 \sin^2(2\pi a) + O(\varepsilon^3))$. Такой же результат (без асимптотической формулы) получен в работе [1].

Экран со сглаженной кромкой. Результаты [13] (см. также [12], [7; § 5.5] и [2; § 4] позволяют построить пограничные слои, возникающие около сглаженных кромок экрана, например эллиптического

$$\Theta^{\varepsilon} = \left\{ x : \varepsilon^{-2} x_1^2 + a^{-2} x_2^2 \leq 1 \right\},$$

т.е. при $H_{\pm}(x_2) = \sqrt{1 - a^{-2} x_2^2}$. Пограничные слои имеют другое строение, нежели для затупленных кромок, однако по-прежнему достаточное условие (16) существования собственного числа $\lambda_{\#}^{\varepsilon} \in (0, \pi^2)$ и асимптотические формулы (25), (31) сохраняют силу.

Несколько экранов. При соблюдении симметрии проекция экрана на ось ординат не обязана

быть (связным) сегментом $[-a, a]$. Например, в волноводе могут располагаться два экрана

$$\Theta_{\pm}^{\varepsilon} = \{x : \pm x_2 \in [b, a], -\varepsilon H_-(x_2) \le x_1 \le \varepsilon H_+(x_2)\};$$

здесь $b \in (0, a)$. Пар экранов может быть несколько и их можно парами сдвигать вдоль оси абсцисс. Кроме того, теперь не исключается случай $a = 1/2$ (к стенкам волновода присоединены перегородки; рис. 2в). Если $H_{\pm}(x_2) = 1/2$, то достаточное условие (16) заменяется таким:

$$\int_b^a H(x_2)\cos(2\pi x_2)\,dx_2 > 0. \qquad (46)$$

Интересно, что в случае $a = 1/2$ левая часть (46) равна $-(2\pi)^{-1}\sin(2\pi b)$, а значит, при всяком $b \in (0, 1/2)$ справедливо неравенство (17), и при малом $\varepsilon > 0$ на интервале $(0, \pi^2)$ собственных чисел задачи (5), (4) нет.

Пространственные волноводы. Если волновод $\Pi = \varpi \times \mathbb{R}$ с сечением $\varpi \subset \mathbb{R}^2 \in y$, а также экран

$$\Theta^{\varepsilon} = \\ = \{x = (y, z) : y = (y_1, y_2) \in \overline{\omega}, -\varepsilon H_-(y) \le z \le \varepsilon H_+(y)\} \qquad (47)$$

обладают плоскостью симметрии, содержащей ось аппликат z, то применение вариационного и асимптотического методов не встречает затруднений. В определении (47) под ω подразумевается подобласть двумерной области ϖ, а под $H_{\pm}$ – гладкие функции на замыкании $\overline{\omega}$; при этом $H = H_+ + H_- > 0$ в ω и $H = 0$ на $\partial\omega$. В случае условий Дирихле на (акустически мягкой) цилиндрической поверхности $\partial\Pi$ многомерные задачи подробно рассмотрены в публикации [2]. Для задачи Неймана (3) ограничимся формулировкой необходимого и достаточного условия

$$\int_{\omega} H(y)\left(\left|\nabla U_{\dagger}(y)\right|^2 - \Lambda_{\dagger}\left|U_{\dagger}(y)\right|^2\right)dy \ge 0 \qquad (48)$$

существования (при малом $\varepsilon > 0$) собственного числа $\lambda_{\#}^{\varepsilon} \in (0, \Lambda_{\dagger})$ смешанной краевой задачи в области $\Omega_{\#} = \{(y, z) \in \Pi \backslash \Theta^{\varepsilon} : y_1 > 0\}$ с искусственными условиями Дирихле на срединной плоскости $\Upsilon = \{(y, z) \in \Pi \backslash \Theta^{\varepsilon} : y_1 = 0\}$. Интеграл (48) сформирован при участии первого собственного числа $\Lambda_{\dagger} > 0$ и соответствующей собственной функции $U_{\dagger}$ модельной задачи на полусечении $\varpi_+ = \{y \in \varpi : y_1 > 0\}$:

$$-\Delta U(y) = \Lambda U(y), \quad y \in \varpi_+, \quad U(y) = 0, \quad y \in \varpi,$$
$$y_1 = 0, \quad \partial_{\nu} U(y) = 0, \quad y \in \partial\varpi, \quad y_1 > 0.$$

При наличии нескольких плоскостей симметрии можно попытаться построить более одного собственного числа задачи (3) путем тиражирования усекающих плоскостей и постановки на каждой из них искусственных краевых условий Дирихле. Если, например, ϖ и ω – концентрические круги, то в качестве $\Omega_{\#}^{\varepsilon}$ можно взять секториальную часть волновода Ω^{ε} с раствором π/N, где N – любое натуральное число. На основе принципа максимума нетрудно убедиться в том, что при переходе от N к $2N$ найденные собственные числа связаны неравенством $\lambda_{(N)}^{\varepsilon} < \lambda_{(2N)}^{\varepsilon}$, т.е. в принципе можно построить экран, захватывающий любое наперед заданное количество волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00348).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Evans D.V., Levitin M., Vasil'ev D.* Existence theorems for trapped modes // J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 21–31.
2. *Назаров С.А.* Асимптотика ловушечных мод и собственных чисел под порогом непрерывного спектра волновода с тонким экранирующим препятствием // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23. № 3. С. 216–260.
3. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* Упругие волны, локализованные около периодических семейств дефектов // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 6. С. 771–773.
4. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жесткой периодической решетке // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 1. С. 138–140.
5. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: ЛГУ, 1980. 264 с.
6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
7. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении области. Тбилиси: ТГУ, 1981. 208 с.
9. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
10. *Назаров С.А.* Локализованные волны в Т-образном волноводе // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 6. С. 747–758.
11. *Назаров С.А., Олюшин М.В.* О возмущениях собственных значений задачи Неймана вследствие вариации границы области // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. № 2. С. 169–188.
12. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
13. *Ильин А.М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с тонкой щелью. I. Двумерный случай // Матем. сб. 1976. Т. 99. № 2. С. 514–537.