АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2012, том 58, № 6, с. 747–755

АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

УДК 534.14 534.283

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ С ВЯЗКОУПРУГИМ ЗАТУХАНИЕМ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ АКУСТИКИ МЕЛКОГО МОРЯ

© 2012 г. П. С. Петров, А. Д. Захаренко, М. Ю. Трофимов

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева
690041 Владивосток, ул. Балтийская 43
Дальневосточный федеральный университет
690950 Владивосток, ул. Суханова 8
E-mail: petrov@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 02.12.2011 г.

Задачи моделирования распространения низкочастотных импульсных акустических сигналов в мелком море удобно решать путем численного интегрирования нестационарного волнового уравнения. Специфика этих задач, однако, состоит в том, что фактически звуковые волны распространяются не только в воде, но и в верхних слоях дна, формирующих вместе геоакустический волновод. По этой причине возникает необходимость корректного учета зависимости затухания звука в дне от частоты. В работе получено интегро-дифференциальное волновое уравнение для вязкоупругой жидкости, которое позволяет моделировать произвольную зависимость затухания акустических волн от частоты при вычислениях во временной области. Далее рассмотрена процедура численного решения этого уравнения, основанная на его аппроксимации с помощью системы дифференциальных уравнений, описаны методы искусственного ограничения расчетной области. Также в работе построена простая разностная схема, пригодная для численного решения нестационарных задач акустики мелкого моря с помощью предложенного уравнения.

Ключевые слова: волновое уравнение, затухание, моделирование распространения звука, мелкое море.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование распространения импульсных акустических сигналов в мелком море в настоящее время является неотъемлемой частью решения таких важных практических задач, как, например, сейсморазведка или мониторинг антропогенных шумов на различных акваториях [1, 2]. Известно, что низкочастотные акустические волны распространяются не только в воде, но и в приповерхностных слоях океанского дна, вместе образующих геоакустический волновод. По этой причине математические модели распространения звука в мелком море должны корректно учитывать различные эффекты, связанные с распространением акустических волн в дне. Наиболее существенное влияние на акустическое поле при этом оказывают сдвиговая упругость пород, слагающих дно, а также затухание звука в этих породах, величина которого значительно больше, чем в морской воде. В настоящее время в практических задачах прямое численное решение динамических уравнений теории упругости, как правило, не представляется возможным [3] (главным образом из-за того, что более короткие сдвиговые волны накладывают существенно более жесткие ограничения на шаги расчетных сеток). По этой причине основным инструментом для моделирования распространения звука во временной области по-прежнему остаются акустическое волновое уравнение [3–5], не учитывающие напрямую сдвиговые волны в дне:

$$p_{tt} - c^2\rho\nabla\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = 0, \qquad (1)$$

где $p = p(x, y, z)$ – акустическое давление, c – скорость звука, ρ – плотность. В ряде случаев, когда сдвиговые скорости в приповерхностных слоях дна малы, такое приближение (модель жидкого дна) вполне удовлетворительно само по себе [4]. Если учет сдвиговых волн все же необходим, то его разумнее выполнить с помощью техники, предложенной в [3]. Эта техника состоит в том, что сначала поля напряжений и скоростей вычисляются на основе модели жидкого дна, затем полученные поля подставляются в полные уравнения теории упругости, где появляется невязка, которую затем можно использовать как дополнительную функцию источника в акустическом волновом уравнении. Повторное решение акустиче-

ского волнового уравнения с этой функцией источника позволяет получить поправку к исходному решению, учитывающую эффекты сдвиговой упругости. Таким образом, несмотря на наличие в дне сдвиговых волн, задачи акустики мелкого моря вполне можно решать во временной области с помощью обычного волнового уравнения. Несколько сложнее обстоит дело с учетом затухания звука в дне. Стандартный прием [6], основанный на введении в волновое уравнение производной первого порядка по времени, позволяет решить задачу лишь для случая простейшей зависимости величины затухания от частоты (а именно, для случая постоянного затухания для волн разной частоты на единице длины). Известно, что во многих случаях такая модель неприемлема, так как часто разумно предположить, что затухание звука постоянно на длине волны для всех частот [4] (случай постоянного значения добротности Q). В данной работе мы предлагаем непосредственное обобщение нестационарного волнового уравнения, которое позволяет учитывать произвольную зависимость величины затухания в среде от частоты звука. Мы получим это обобщение, исходя из динамических уравнений вязкоупругой жидкости [5] (конечно же, это не означает, что затухание обязано иметь именно вязкую природу). Далее мы рассмотрим процедуру численного решения этого уравнения в приложении к задачам акустики мелкого моря. Полученное уравнение может быть применено в тех случаях, когда решение динамических уравнений теории упругости невозможно ввиду ограниченности ресурсов и задачу приходится решать в рамках модели жидкого дна, однако частотная зависимость затухания звука в нем играет важную роль (пример такой задачи представлен в заключительной части нашей работы). Отметим также, что даже в классических монографиях [4, 5] затухание звука в дне рассматривается лишь при решении задач акустики мелкого моря в частотной области. Полученное нами уравнение позволяет включить произвольные зависимости затухания от частоты в модели распространения звука во временной области.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Динамические уравнения вязкоупругой среды могут быть записаны в терминах тензорного поля напряжений и деформаций, а также векторного поля смещений во всех точках волновода (x, y, z). В отсутствие сдвиговых напряжений (вязкоупругая жидкость) тензорные поля определяются своими диагональными компонентами напряжений $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz})$ и деформаций $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz})$. Обозначив компоненты поля смещений через (u_x, u_y, u_z), мы можем записать уравнения динамики в следующем виде [7]:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \int\limits_{-\infty}^{t} M(t-\tau)d(\varepsilon_{xx}(\tau)+\varepsilon_{yy}(\tau)+\varepsilon_{zz}(\tau)); \cdots; \cdots; \\ \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}u_x; \quad \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial y}u_y; \quad \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial}{\partial z}u_z; \\ \rho\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx}; \quad \rho\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy}; \quad \rho\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u_z = \dfrac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz}. \end{cases} \tag{2}$$

Первое из уравнений (2) представляет собой обобщенный закон Гука, устанавливающий связь между напряжением и деформацией в текущий и предыдущие моменты времени Здесь $M(t)$ – релаксационный модуль, описывающий напряжение, возникающее в среде под воздействием деформации $\varepsilon(t) = H(t)$ где $H(t)$ – функция Хевисайда. Рассмотрим производную по времени от выражения вида $\int_{-\infty}^{t} M(t-\tau)d\varepsilon(\tau)$, считая теперь, что $\varepsilon(t)$ непрерывная функция, равная нулю при $t < 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{t} M(t-\tau)d\varepsilon(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial t}M(t-\tau)d\varepsilon(\tau) + M(0)\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon(t) =$$

$$= -\left(M(t-\tau)\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon(\tau)\right)\Bigg|_{\tau=-\infty}^{\tau=t} + \int\limits_{-\infty}^{t} M(t-\tau)d\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\varepsilon(\tau)\right) +$$

$$+ M(0)\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} M(t-\tau)d\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\varepsilon(\tau)\right).$$

Второе равенство мы получили с помощью интегрирования по частям. Используя это соотношение, мы можем дважды продифференцировать первое уравнение системы (2) по времени, предварительно подставив в него значение $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz})$ из второй строки системы (2):

$$\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial t^2} = \int\limits_{-\infty}^{t} M(t-\tau)d\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_x + \frac{\partial}{\partial y}u_y + \frac{\partial}{\partial z}u_z\right)\right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{t} M(t-\tau)d\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz}\right)\right).$$

В жидкой среде $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = p$, поэтому последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \int\limits_{-\infty}^{t} M(t-\tau)d\left(\nabla\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\right). \tag{3}$$

Уравнение (3) описывает распространение акустических волн в вязкоупругой жидкости и является непосредственным обобщением обычного волнового уравнения (1). Свертка в правой части (3) не позволяет использовать его непосредственно, так как ее вычисление требует хранения информации о значениях давления во все моменты времени с начала расчета и для этого недостаточно объема памяти современных компьютеров. По этой причине при решении нестационарных задач моделирование зависимости затухания от частоты общего вида долгое время было практически невозможным. Прорыв в этом направлении совершили авторы работы [8], где был предложен общий подход к аппроксимации сверток, подобных интегралу в (3). Существенное развитие этот подход получил в [9, 10]. Ниже мы применим его при построении численной схемы для (3), однако перед этим исследуем, как именно уравнение (3) позволяет учитывать затухание в среде. Это легко увидеть, если рассмотреть одномерный аналог уравнения (3) в частотной области (для простоты считаем среду однородной)

$$-\omega^2 p = M^* \frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

где комплексный модуль $M^*(\omega)$ может быть выражен через $M(t)$ с помощью соотношения $M^*(\omega) = i\omega \int_0^\infty M(t)\exp(-i\omega t)dt$ (по определению можно положить, что $M^*(\omega)$ представляет собой коэффициент пропорциональности в обобщенном законе Гука в частотной области $\sigma(\omega) = M^*(\omega)\varepsilon(\omega)$, где $\varepsilon \equiv \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$). В случае, если вязкость мала, т.е. $M(t)$ мало отличается от функции Хевисайда, это уравнение допускает асимптотическое решение в виде затухающей плоской волны:

$$p \approx p_0 \exp[\alpha(\omega)x]\exp\left[i\omega t - \frac{ix\omega}{c(\omega)}\right].$$

Здесь $\alpha(\omega)$ – затухание на единицу длины, которое может быть найдено из соотношения

$$\frac{2c(\omega)\alpha(\omega)}{\omega} = \arg(M^*(\omega)) \equiv \frac{1}{Q(\omega)},$$

где добротность $Q(\omega)$ характеризует соотношение между запасаемой и рассеиваемой энергией за один цикл. Для задач акустики мелкого моря, как правило, бывает достаточно ограничиться случаем постоянного $Q(\omega)$. В этом случае получаем $\pi/Q = \lambda\alpha(\omega)$.

Таким образом, затухание на единицу длины для волн в среде с постоянным Q прямо пропорционально волновому числу, а затухание на длине волны одинаково для всех частот. В этом случае в акустических задачах поглощение звука в среде часто описывают величиной β в дБ на 1 длину волны. Эта величина связана с Q соотношением

$$\beta = 20\pi \lg_{10} e/Q.$$

МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ СВЕРТКИ

Перейдем теперь к рассмотрению способа аппроксимации свертки в уравнении (3), необходимой при его численном решении. Следуя [8, 9], представим релаксационный модуль $M(t)$ в виде спектрального разложения:

$$M(t) = \left[M_u - \delta M \int_0^\infty r(\omega')e^{-\omega' t}d\omega'\right]H(t),$$

где $r(\omega)$ – нормализованный релаксационный спектр. Будем приближать этот спектр суммами вида

$$r(\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta(\omega - \omega_j), \tag{4}$$

где $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$, т.е. будем считать, что нормализованный релаксационный спектр содержит лишь конечный набор частот. Отметим, что замена непрерывного релаксационного спектра $r(\omega)$ дискретным (4) физически соответствует допущению о том, что в рассматриваемой вязкоупругой среде существует лишь конечное число времен релаксации, например, соответствующих различным веществам, составляющим среду. Такая механическая модель вязкой упругости называется обобщенным телом Максвелла. Более подробное обсуждение физического смысла аппроксимации см. также в [9]. В этом случае получаем, что

$$M_n^*(\omega) = M_u - \delta M \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j \omega_j}{\omega_j + i\omega}.$$

Далее мы приближаем обобщенный закон Гука в частотной области соотношением

$$\sigma_{xx}(\omega) \approx M_n^*(\omega)\varepsilon(\omega). \tag{5}$$

Это изменение дает удобную для численного решения аппроксимацию (3). Чтобы ее получить, введем дополнительные переменные

$$\hat{\zeta}_j(\omega) \equiv \frac{\delta M}{M_u} \frac{a_j \omega_j}{\omega_j + i\omega} \varepsilon(\omega)$$

и перепишем первое уравнение (6) в виде

$$\sigma_{xx}(\omega) = M_u \left(\varepsilon(\omega) - \sum_{j=1}^{n} \hat{\zeta}_j(\omega)\right).$$

Применяя к двум последним соотношениям обратное преобразование Фурье, получим

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(t) = M_u\left(\varepsilon(t) - \sum_{j=1}^{n}\zeta_j(t)\right), \\ \dfrac{d\zeta_j}{dt} + \omega_j\zeta_j = a_j\omega_j\dfrac{\delta M}{M_u}\varepsilon(t). \end{cases} \tag{6}$$

Теперь мы запишем аналог уравнения (3), который получается заменой из системы (2), в которой первое уравнение заменено системой уравнений (6) (в данном случае промежуточные выкладки тривиальны):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho c^2\left(\nabla\left(\dfrac{1}{\rho}\nabla p\right) - \sum_{l=1}^{n}\zeta_l\right), \\ \dfrac{d\zeta_l}{dt} + \omega_l\zeta_l = \omega_l a_l\nabla\left(\dfrac{1}{\rho}\nabla p\right). \end{cases} \tag{7}$$

Заметим, что для систем уравнений (6) и (7) переменные ζ_j вводятся отдельно для каждой точки расчетной области, т.е. $\zeta_j = \zeta_j(t, x)$, однако их эволюция во времени определяется обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые связаны друг с другом только через вынуждающий член.

Значения ω_l в аппроксимации релаксационного спектра $r(\omega)$ могут быть выбраны, например, равномерно распределенными на интервале частот (в логарифмической шкале), представляющем интерес в рассматриваемой задаче. Для выбора a_l мы потребуем, чтобы на серединах $\tilde{\omega}_k = \omega_k\sqrt{\omega_2/\omega_1}$ интервалов $[\omega_k, \omega_{k+1}]$ выполнялось соотношение $Q(\omega) = Q_n(\omega)$. При этом $Q_n(\omega)$ может быть вычислено из соотношения

$$Q_n^{-1}(\omega) = \arg(M_n^*(\omega)) \approx \frac{\delta M}{M_r}\sum_{j=1}^{n}a_j\frac{\omega/\omega_j}{1+(\omega/\omega_j)^2}.$$

В результате мы получаем переопределенную систему линейных уравнений на коэффициенты a_j, которую легко решить методом наименьших квадратов.

АППРОКСИМАЦИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Выполним теперь конечно-разностную дискретизацию системы (7). Нашей целью при этом является получение простой разностной схемы для (7), непосредственно обобщающей стандартную схему типа "крест" [11, 12] для уравнения (1). Для простоты мы будем рассматривать (7) в цилиндрических координатах в приближении несвязанных азимутов, т.е. считая, что переменные задачи не зависят от угловой координаты φ, хотя из дальнейших формул будет видно, что они тривиальным образом переносятся и на трехмерные задачи в декартовых координатах. Введем в волноводе равномерную сетку (t^i, r_j, z_k) с шагами Δt, Δr и Δz соответственно. Рассмотрим теперь сеточные функции $p^i_{j,k} = p(t^i, r_j, z_k)$ и $\zeta^i_{l,j,k} = \zeta_l(t^i, r_j, z_k)$ и запишем разностную аппроксимацию второго порядка для первого уравнения системы (7) в точке (t^i, r_j, z_k), а для второго уравнения (7) – в точке $(t^i + t^{i+1}, r_j, z_k)$. Мы получим следующую "двухэтапную" численную схему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^i_{j,k}}\dfrac{p^{i+1}_{j,k} - 2p^i_{j,k} + p^{i-1}_{j,k}}{\Delta t^2} - \left[\rho\nabla\left(\dfrac{1}{\rho}\nabla p\right)\right]^i_{j,k} + \sum_{l=1}^{n}\zeta^i_{l,j,k}, \\ \dfrac{\zeta^{i+1}_{l,j,k} - \zeta^i_{l,j,k}}{\Delta t} + \omega_l\dfrac{\zeta^{i+1}_{l,j,k} + \zeta^i_{l,j,k}}{2} = \omega_l a_l\dfrac{1}{2}\left(\left[\rho\nabla\left(\dfrac{1}{\rho}\nabla p\right)\right]^{i+1}_{j,k} + \left[\nabla\left(\dfrac{1}{\rho}\nabla p\right)\right]^i_{j,k}\right). \end{cases} \tag{8}$$

Здесь выражение $\left[\rho\nabla\left(\dfrac{1}{\rho}\nabla p\right)\right]^i_{j,k}$ означает разностную аппроксимацию второго порядка для акустического оператора Лапласа, взятую в точке (t^i, r_j, z_k). Такая аппроксимация может быть выполнена стандартным образом [12]. Запись (8) удобна своей инвариантностью относительно различных систем координат в пространстве и одинакова для всех размерностей. При реализации численной схемы (8) на каждом шаге по времени последовательно выполняются два действия:

1. по данным $p^i_{j,k}$ и $\zeta^i_{l,j,k}$ с помощью первого уравнения (8) вычисляются значения $p^{i+1}_{j,k}$;

2. по найденным $p^{i+1}_{j,k}$ вычисляется оператор Лапласа, а затем с помощью второй строки системы (8) находятся значения $\zeta^{i+1}_{l,j,k}$.

Отметим еще раз, что численная схема (8) представляет собой непосредственное обобщение схемы "крест" на случай вязкоупругой жидкости и имеет второй порядок точности. Она отличается простотой и вычислительной эффективностью. Несложно построить и

обобщения (8), аппроксимирующие (7) с более высоким порядком точности. Заметим также, что объем оперативной памяти, требуемый при расчетах с использованием (7) на компьютере, превышает объем памяти, необходимый для решения (1) в $n(n+3)/3$ раз. Тестовые расчеты показывают, что при моделировании распространения импульсных сигналов в задачах акустики мелкого моря для удовлетворительной аппроксимации одинакового затухания звука на длине волны для всех частот в полосе от 20 до 200 Гц ($Q(\omega) = const$) достаточно ограничиться значением $n = 3$. Более широкие полосы частот и более сложные зависимости затухания от частоты требуют больших значений n. Точность аппроксимации можно оценить, сравнивая $Q_n(\omega)$ и $Q(\omega)$, как описано в [9]. Уменьшить требуемое для приемлемой аппроксимации значение n можно, используя подход, предложенный в работе [10], где предложена крупнозернистая модель вязкоупругой среды, в которой параметры a_j и ω_j в различных узлах сетки периодически меняются. Период изменения при этом соответствует длине самых коротких звуковых волн, распространение которых представляет интерес в конкретной задаче. Обычно при этом достаточно всего одной дополнительной переменной $\zeta = \zeta(t, x, y, z)$.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ АКУСТИКИ МЕЛКОГО МОРЯ

В задачах акустики мелкого моря уравнения (1) или (7) приходится решать в областях, которые не имеют физических границ. Действительно, геоакустический волновод, как правило, ничем не ограничен в горизонтальных направлениях (x, y), а в направлении z (обозначающем глубину ниже уровня моря) он ограничен лишь сверху – поверхностью океана $z = 0$, на которой акустическое давление обращается в ноль (граничное условие типа Дирихле: $p(t, z, y, 0) = 0$). Решение задачи методом конечных разностей в бесконечных или даже полубесконечных областях невозможно, поэтому для численного интегрирования уравнений акустики необходимо предварительно ограничить область. При этом, так как границы будут искусственными, необходимо, чтобы они вели себя таким образом, как будто за ними волновод продолжается. Это означает, что акустические волны должны свободно проходить через такую границу из расчетной области во внешнюю среду. Для обеспечения свободного прохождения волн через границы на них должны быть заданы граничные условия особого вида – т.н. условия искусственной границы. Эти условия, вообще говоря, весьма нетривиальны, их теория для волнового уравнения была развита в достаточной для практического использования степени лишь в последние 10 лет [13–15]. Поскольку затухание, обеспечиваемое (7), является лишь малой добавкой к исходному уравнению (1), дающей значительный вклад в уровни акустического давления лишь на протяженных трассах, для системы (7) представляется возможным использование тех же условий искусственной границы, что и для обычного волнового уравнения (1). Наш опыт моделирования распространения импульсных акустических сигналов в мелком море позволяет предложить использование следующих условий искусственной границы для (7). На вертикальных границах расчетной области (например, на границе $r = r_{max}$, где r_{max} – протяженность трассы, на которой требуется вычислить акустическое поле) удобно использовать условия искусственной границы типа Тапперта, полученные в [15, 16] и имеющие вид

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - \int_{-\infty}^{t}\left(\frac{c}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial z} - \frac{c}{2\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{\partial p}{\partial z} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - \frac{1}{4c}\left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{4\rho}\frac{\partial c}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)p\right)dt = 0. \quad (9)$$

Дискретизация (9) методом конечных разностей подробно описана в работах [15, 16]. На нижней горизонтальной границе волновода $z = z_{max}$ можно использовать условие искусственной границы типа Хигдона в форме, полученной в работах [13, 14]. Такое условие идеально подходит для моделирования однородного полупространства, лежащего ниже расчетной области. Это условие записывается в терминах вспомогательных переменных $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{k+1}$, определенных на этой границе и зависящих только от переменной r (указывающей направление вдоль искусственной границы). Оно имеет следующий вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\partial \phi_1}{\partial t}, \\ 4\dfrac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2 \phi_2}{\partial r^2} + 2\dfrac{\partial^2 p}{\partial r^2}, \\ 4\dfrac{\partial^2 \phi_j}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 \phi_{j-1}}{\partial r^2} + 2\dfrac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2 \phi_{j+1}}{\partial r^2}, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \\ \phi_{k+1} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Численная реализация (10) весьма нетривиальна [13, 14], так для устойчивости численной (8) схемы с условием (10) требуется, чтобы в окрестности границы шаг сетки по z был вдвое меньше, чем в остальной части расчетной области.

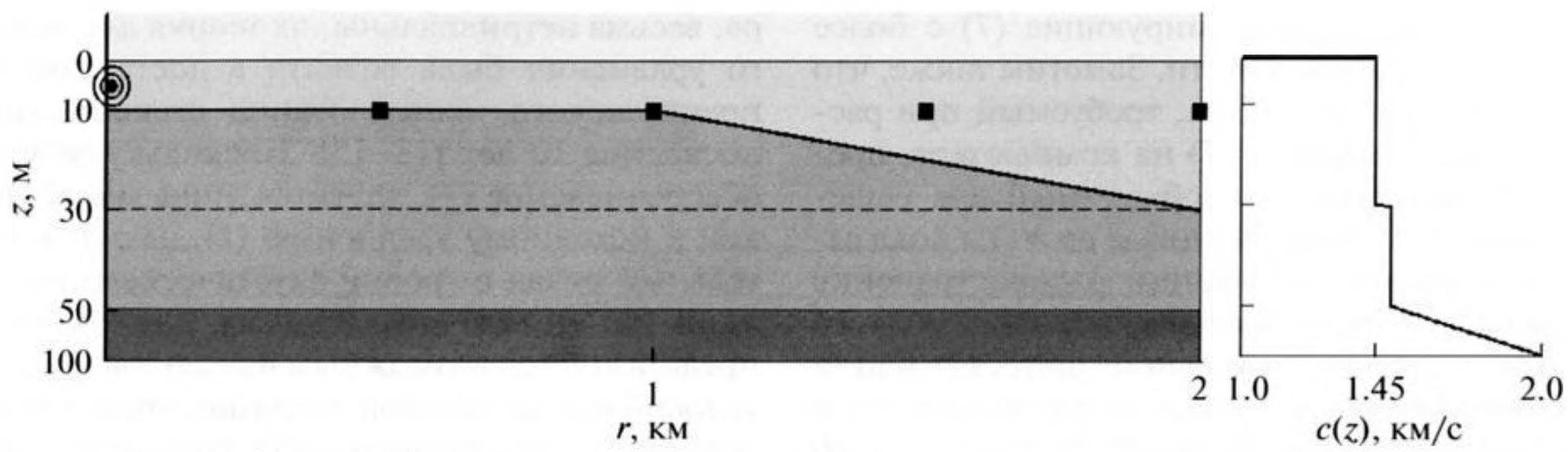

Рис. 1. Схема модельного геоакустического волновода и зависимость скорости звука от глубины. Кольцами отмечен источник звука, а квадратами – приемники.

Разностная схема на основе уравнения (7) в искусственно ограниченной области $0 \le r \le r_{max}$, $0 \le z \le z_{max}$, с условиями (9) и (10) на границах $r = r_{max}$, $z = z_{max}$ представляет собой удобную математическую модель для численного решения задач акустики мелкого моря, эффективность которой была проверена нами в работе [1].

ПРИМЕР РАСЧЕТА С ПОЛУЧЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ

Типичным примером задачи, в которой существенна поправка, обеспечиваемая системой (7) по сравнению с (1), может служить задача вычисления акустического поля в волноводе переменной глубины, где звук излучается точечным источником, расположенным в его мелководной части. В этом случае низкочастотные акустические волны на мелководье распространяются, главным образом, в приповерхностном слое дна, а затем в более глубоководной части могут вновь перейти в водный слой. При этом уровень акустического поля в водном слое зависит от того, насколько сильное затухание звук претерпел при распространении в дне. Рассмотренный здесь пример может служить иллюстрацией того, что даже на относительно короткой трассе эффекты, связанные с затуханием, сильно зависят от частоты звука и обеспечивают изменение потерь при распространении на десятки децибелов, что указывает на необходимость использования полученных уравнений при расчетах во временной области вместо (1).

Модельный геоакустический волновод

Рассмотрим схему акустической трассы на рис. 1 (общая длина 2 км). Представленный на рисунке модельный волновод состоит из водного слоя, а также приповерхностного слоя дна. Глубина моря на участке трассы $0 \le r \le 1$ км постоянна и равна 10 м, а на участке $1 \le r \le 2$ км линейно возрастает от 10 до 30 м. Справа представлен профиль скорости звука в этом волноводе. Скорость звука в воде составляет 1450 м/с, плотность – 1 г/см^3, скорость звука в верхнем слое осадочных пород с глубиной залегания до 50 м равна 1500 м/с, а плотность 1.5 г/см^3. При увеличении глубины от 50 до 100 м скорость звука линейно возрастает до величины 2000 м/с, а плотность до 2 г/см^3, на больших глубинах эти параметры мы считаем постоянными. На глубине $z_{max} = 200$ м мы искусственно ограничиваем волновод, используя $z = z_{max}$ граничное условие (10).

Источник и приемники импульсного сигнала

Точечный источник звука, расположенный на глубине $z_s = 5$ м (при $r = 0$, на мелководном участке трассы), излучает импульсный акустический сигнал, форма которого определяется соотношением

$$f(t) = A(t - t_0)\exp(-(t - t_0)^2/\sigma^2)$$

(производная от гауссовой функции с полушириной $\sigma = 7$ мс, A – постоянная, характеризующая энергию источника). Подобные сигналы часто используются при расчетах в качестве модели сейсморазведочных импульсов [1]. Спектр сигнала $f(t)$, вычисленный аналитически, имеет вид

$$\hat{f}(\omega) = -\frac{1}{2}Ai\sqrt{\pi}\sigma^3\omega\exp\left(-\frac{1}{4}\omega^2\sigma^2\right).$$

Около 95% энергии сигнала сосредоточено в полосе частот от 10 до 70 Гц, а максимум спектра соответствует частоте около 40 Гц. Целью наших расчетов было моделирование импульсных сигналов в приемниках, расположенных на глубине 10 м с шагом 250 м вдоль акустической трассы, а также оценка влияния затухания звука в дне на уровни сигнала в этих точках приема.

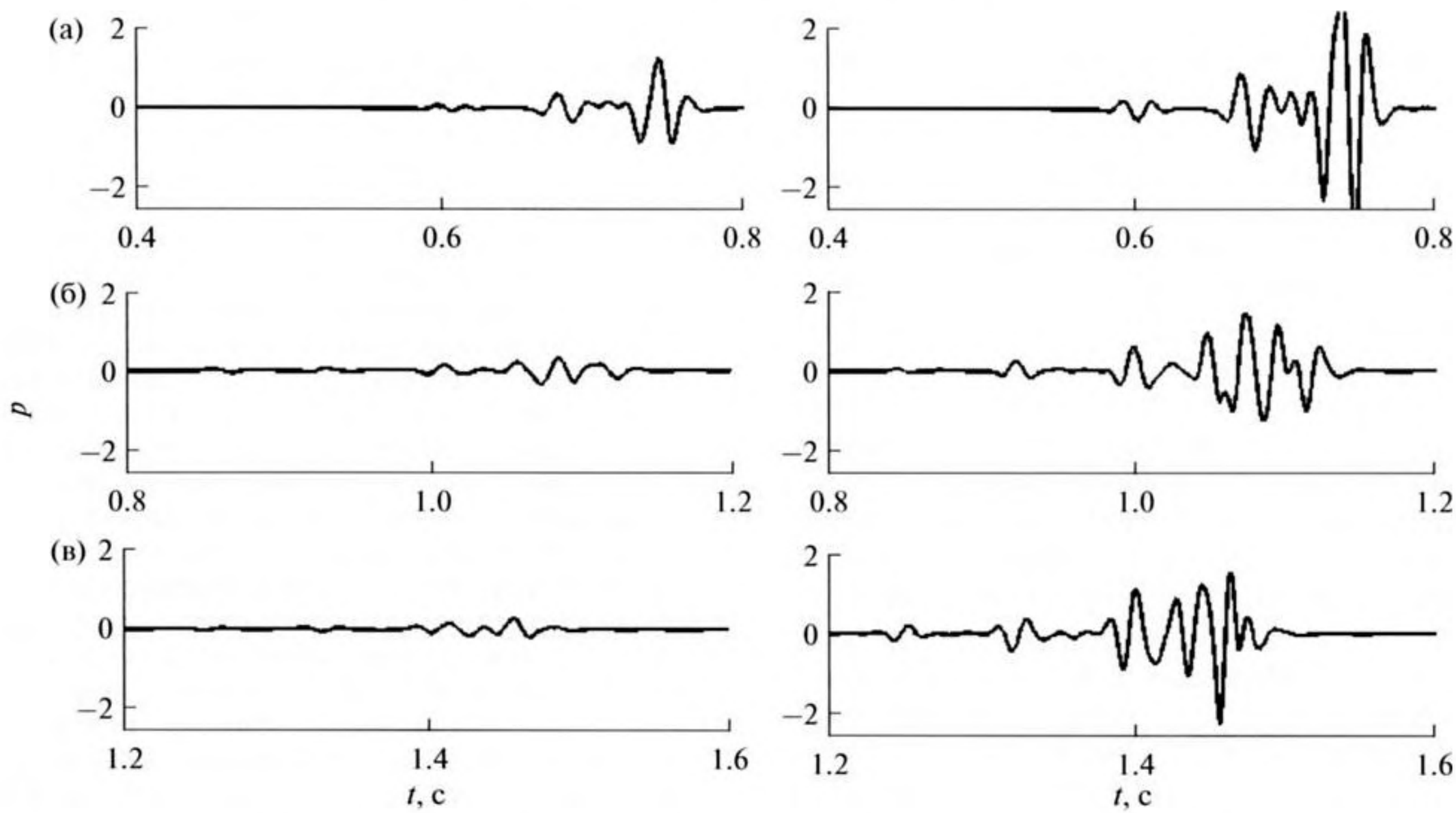

Рис. 2. Импульсные сигналы, зафиксированные в точках (а), (б), (в) в случае наличия в среде поглощения (слева) и в его отсутствие (справа).

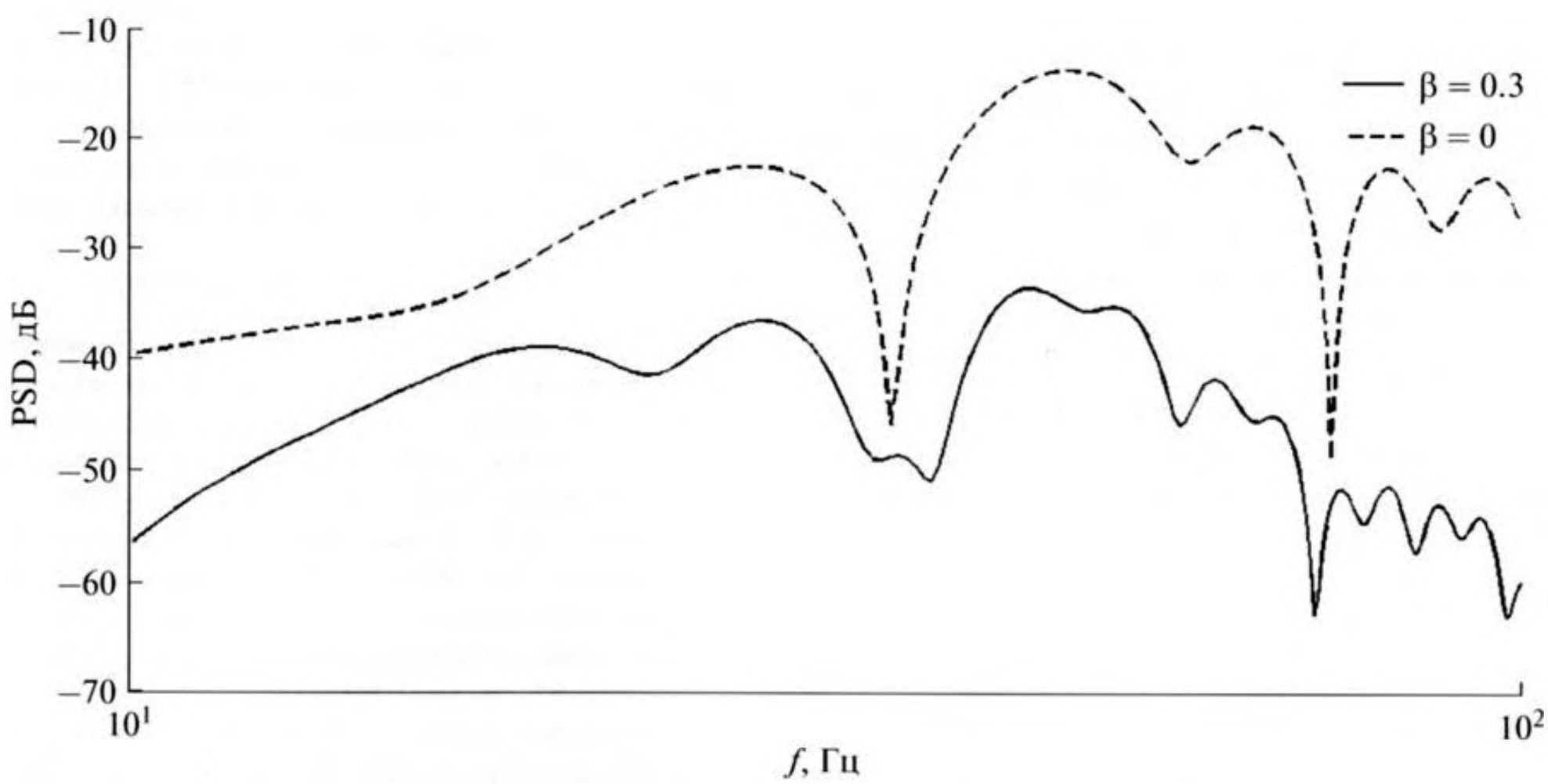

Рис. 3. Спектральная плотность мощности сигнала на расстоянии 2 км от источника при наличии в среде затухания (сплошная линия) и в его отсутствие (пунктирная линия).

Результаты расчетов: временные ряды в точках приема

Мы провели расчеты распространения импульсного звукового сигнала в модельном волноводе для двух случаев. В первом случае затухание звука в дне (на всех глубинах) было принято равным $\beta = 0.3$ дБ на длину волны (случай постоянного Q), а во втором оно равнялось нулю. По результатам расчетов мы построили временные ряды акустического давления (в безразмерных единицах) в точках приема на расстоянии 1 км

(точка (а)), 1.5 км (точка (б)) и 2 км от источника (точка (в)). Графики полученных зависимостей давления от времени показаны на рис. 2. Кроме того, мы построили оценку спектра сигнала в последней точке приема (в), представленную на рис. 3. Эти графики показывают, что наличие поглощения в дне в условиях мелкого моря даже на относительно короткой трассе длиной 2 км способно вызвать увеличение потерь для сигналов, излучаемых и принимаемых в водном слое, на 20–30 дБ. При этом затухание акустических волн для частоты 100 Гц в условиях постоянного Q (а такая модель часто является наиболее адекватной) на единице длины в четыре раза больше, чем для волн с частотой 25 Гц, так что этот эффект во временной области нельзя правильно учесть без решения интегрального уравнения типа (3). Отметим, что это уравнение необходимо не только при излучении звука на глубине, где для представляющей интерес полосы частот отсутствуют акустические моды, распространяющиеся в водном слое, но и в случае, когда на акустической трассе имеются отмели или возвышенности (как, например, в экспериментах из [1]).

Графики на рис. 3 показывают, что в сложных геоакустических волноводах учет затухания звука в дне нетривиальным образом изменяет потери на различных частотах. Это связано со сложной многомодовой структурой звукового поля для каждой фиксированной частоты в таком волноводе, а также тем, что акустическая энергия, переносимая различными модами, испытывает различное затухание при распространении на единицу длины вдоль трассы (см. формулы для модальных коэффициентов затухания в [4]). Так, например, на частоте 40 Гц, соответствующей максимуму спектра исходного сигнала $f(t)$, в волноводе из нашего примера существует три захваченные моды. Максимумы модовых функций находятся в слое осадков при $r = 0$, при $r = 2$ км, максимумы первой и второй моды находятся в водном слое. Отметим, что в нашем численном эксперименте волноводная дисперсия не успевает проявить себя в полной мере, так как групповые скорости (см. [4]) равны 1465, 1404 и 1514 м/с для первой, второй и третьей мод соответственно (эти значения мало зависят от r), что на расстоянии 2 км дает разность времен прихода 0.04–0.1 с при длине исходного сигнала около 0.05 с. Заметим, однако, что эффекты, связанные с волноводной дисперсией, корректно воспроизводятся в рамках модели (7), что подтверждается расчетами в работе [1] для акустических трасс длиною в 10–16 км.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Моделирование распространения широкополосных импульсных сигналов в задачах акустики мелкого моря с применением стандартного волнового уравнения (1) может привести к существенным ошибкам при расчете уровней акустического давления. Эти ошибки будут связаны с некорректным учетом частотной зависимости затухания звука в дне. В то же время, на протяженных акустических трассах представляется невозможным решение динамических уравнений теории упругости (а значит, и непосредственное использование результатов [8, 9]). Математическое моделирование нестационарного звукового поля в геоакустическом волноводе с произвольной зависимостью затухания звука в дне от частоты может быть проведено с помощью полученного в работе уравнения (3) и его аппроксимации (7). Эти уравнения могут быть успешно решены, например, методом конечных разностей с помощью численной схемы (8). В вычислительном отношении эта схема лишь несущественно сложнее стандартной схемы типа "крест" для (1). Такая модель была с успехом применена нами при моделировании сейсморазведочных импульсов в работе [1].

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность компании "Эксон Нефтегаз Лимитед" за финансовую поддержку настоящей работы. Нам также приятно поблагодарить лично доктора М.Р. Дженкерсона за внимание к нашим исследованиям. Авторы также весьма признательны д.ф.-м.н. А.Н. Рутенко за советы и обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рутенко А.Н., Боровой Д.И., Гриценко В.А., Петров П.С. и др.* Акустический мониторинг и результаты исследований распространения сейсморазведочных импульсов в прибрежную зону // Акуст. журн. 2012. Т. 57. № 3. С. 356–369.
2. *Рутенко А.Н., Гаврилевский А.В., Ковзель Д.Г., Коротченко Р.А., Путов В.Ф., Соловьев А.А.* Мониторинг сейсмоакустических сигналов и антропогенных шумов на шельфе о. Сахалин // Акуст. журн. 2012. Т. 57. № 2. С. 248–257.
3. *Chapman C., Hobro J., Robertsson J.* Elastic corrections to acoustic finite-difference simulations / Proceedings of SEG Denver 2010 Annual Meeting. SEG. 2010. P. 3013–3017.
4. *Кацнельсон Б.Г., Петников В.Г.* Акустика мелкого моря. М.: Наука, 1997. 191 с.
5. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика неоднородных сред. Т. 1. М.: Наука, 2007. 445 с.
6. *Stephen R.A., Swift S.A.* Modeling seafloor geoacoustic interaction with a numerical scattering chamber // J. Acoust. Soc. Am. 1994. V. 96. P. 973–990.
7. *Nowick A.S., Berry B.S.* Anelastic relaxation in crystalline solids. London: Academic press, 1972. 677 p.

8. *Day S.M., Minster J.B.* Numerical simulation of attenuated wavefields using a Padé approximant method // Geophys. J. R. Astron. Soc. 1984. V. 78. P. 105–118.
9. *Emmerich H., Korn M.* Incorporation of attenuation into time-domain computations of seismic wave fields // Geophysics. 1987. V. 52. № 9. P. 1252–1264.
10. *Day S.M.* Efficient simulation of constant Q using coarse-grained memory variables // Bull. Seismolog. Soc. Am. 1998. V. 88. № 4. P. 1051–1062.
11. *Завадский В.Ю.* Метод конечных разностей в волновых задачах акустики. М.: Наука, 1982. 298 с.
12. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
13. *Hagstrom T., Mar-Or A., Givoli D.* High-order local absorbing conditions for the wave equation: extensions and improvements // J. Computat. Phys. 2008. V. 227. P. 3322–3357.
14. *Hagstrom T., Castro, M., Givoli D., Tzemach D.* Local high-order absorbing conditions for time-dependent waves in guides // J. Computat. Acoust. 2007. V. 15. P. 1–22.
15. *Petrov P.S., Trofimov M.Yu.* A nonstationary form of the range refraction parabolic equation and its application as an artificial boundary condition for the wave equation in a waveguide // Europhysics Letters. 2009. V. 85. P. 34001-p1–34001-p6.
16. *Трофимов М.Ю., Петров П.С.* Об использовании нестационарного уравнения Тапперта в качестве условия прозрачной границы // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15. № 2. С. 191–206.