АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2013, том 59, № 1, с. 8–18

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.21

ЭФФЕКТ АНОМАЛЬНОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ ГРАНИЦЫ ВОДА–ВОЗДУХ ДЛЯ ОБЪЕМНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

© 2013 г. Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, О. А. Годин*

Кубанский госуниверситет, 350040 Краснодар, ул. Ставропольская 149

**University of Colorado and NOAA/Earth System Research Laboratory, Boulder, Colorado 80505, USA*

E-mail: evg@math.kubsu.ru

Поступила в редакцию 10.03.2012 г.

Эффект аномальной прозрачности заключается в прохождении на определенных частотах большей части энергии источника через контрастную границу раздела слоев, дающую обычно сильное отражение. Ранее этот эффект был установлен для низкочастотных точечных источников, расположенных в жидкости, граничащей с воздушной средой. В случае объемных источников возникает дополнительное переотражение волн между границей раздела сред и поверхностью излучателя, поэтому характер проявления эффекта здесь не очевиден. В настоящей работе на основе решения интегрального уравнения соответствующей краевой задачи рассматривается излучение волновой энергии сферическими источниками различного радиуса и ее распределение между потоком энергии, проходящей через границу вода–воздух в верхнее полупространство, и потоком энергии, идущей в нижнее полупространство. Установлено, что размер источника практически не влияет на распределение энергии в низкочастотном диапазоне, т.е. и на эффект аномальной прозрачности. Анализируется также влияние относительных размеров сферических источников на энергетические характеристики в диапазоне средних и высоких частот.

Ключевые слова: сферический излучатель, интегральное уравнение, волновая энергия, аномальная прозрачность.

DOI: 10.7868/S0320791912060056

ВВЕДЕНИЕ

Из-за сильной контрастности плотностей воды и воздуха граница раздела этих сред является практически идеальным отражателем гидроакустических сигналов. Однако для точечных источников, работающих в низкочастотном диапазоне, был выявлен эффект ее аномальной прозрачности [1, 2], когда значительная (а при стремлении частоты к нулю – и подавляющая) часть волновой энергии, излучаемой источником в жидкость, захватывается энергетическими потоками, идущими к ее поверхности, проходит через границу и уходит в воздушную среду. Эффект имеет место на границе однородных и неоднородных жидкостей и газов [2–4], а также твердого тела и газа [5, 6]. Характерной особенностью точечных источников является их прозрачность, т.е. отсутствие повторного рассеяния для отраженных волн, приходящих к ним от границ раздела сред и других препятствий. В случае излучателей конечного размера возникает дополнительное переотражение между их поверхностью и границей раздела сред, которое влияет на процесс излучения и переноса звуковой энергии.

Для подтверждения возможности и анализа особенностей проявления эффекта аномальной прозрачности для реальных источников звука в настоящей работе рассматривается краевая задача об установившихся гармонических колебаниях сферического излучателя, расположенного в нижнем полупространстве двуслойного пространства вода–воздух. Строгий учет взаимодействия отраженных волн с источником приводит к интегральному уравнению относительно неизвестного распределения плотности волнового потенциала q на его поверхности. Его численное решение строится путем дискретизации интегральных представлений с выделением вклада сингулярной составляющей ядра в явном виде. Тем самым возбуждаемое волновое поле фактически аппроксимируется суперпозицией полей элементарных источников-монополей, расположенных на поверхности сферы. Их амплитуды определяются из линейной алгебраической системы, к которой интегральное уравнение сводится в результате дискретизации. Данный подход известен как метод волновой суперпозиции [7].

Анализ эффективности различных методов, проведенный на тестовой задаче излучения звука сферическим источником [8], показал, что среди сравниваемых подходов этот метод обеспечивает самую высокую точность при самых низких чис-

ленных затратах. Однако он не дает решения в окрестности дискретного набора частот – точек спектра интегрального оператора, совпадающего с дискретным спектром задачи Дирихле для внутреннего объема излучателя. Причина в том, что в общем случае поле, излучаемое источником, должно складываться из полей монополей и диполей и на указанных собственных частотах разложения только по монополям становится недостаточно для удовлетворения граничных условий. Однозначную разрешимость и на точках спектра внутренней задачи Дирихле обеспечивает использование более сложных представлений, таких, например, как комбинированное интегральное представление Гельмгольца, известное под акронимом CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) [9]. С другой стороны, добавление источников-диполей в набор базисных функций приводит к росту вычислительных затрат. В рассматриваемом случае безразмерные частоты фиктивных резонансов $\omega_n = n\pi d/a$, $n = 1, 2, \ldots$, расположены намного правее от представляющего основной интерес низкочастотного диапазона, а нарушение численной устойчивости наблюдается только в очень малой окрестности этих частот, поэтому использование более простого метода волновой суперпозиции здесь вполне оправданно.

Поскольку фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (поле точечного монополя), используемое в классическом подходе в качестве ядра интегрального оператора, не удовлетворяет граничным условиям на границе раздела сред, в предлагаемой математической модели используется функция Грина для рассматриваемого двухслойного пространства в целом. Каждое из слагаемых построенного волнового поля тождественно удовлетворяет граничным условиям на границе вода–воздух, а суммарное поле элементарных источников удовлетворяет и условиям на поверхности излучателя. В этом смысле используемый подход можно рассматривать как вариант метода слоистых элементов, главная идея которого состоит в использовании в качестве базиса набора элементарных решений, автоматически удовлетворяющих граничным условиям на горизонтальных границах слоев [10]. В отличие от статьи [11], где при решении родственной задачи использовалась высокочастотная асимптотика функции Грина [12], в настоящей работе функция Грина вычисляется точно как интеграл по плоским волнам.

Наряду с численным проводится также асимптотический анализ рассматриваемых волновых процессов, дающий в пределе те же количественные оценки. Здесь существенным является вывод и использование асимптотик для рассеяния отраженных сферических волн препятствием, так как амплитуда отраженной волны может сильно меняться на расстояниях порядка размера препятствия.

Анализ, проведенный в рамках рассматриваемой модели, показал, что эффект аномальной прозрачности сохраняется и для объемных источников. Более того, оказалось, что в низкочастотном диапазоне мощность сферических источников различного типа и распределение излучаемой энергии E между уходящей в воздушную среду E^+ и остающейся в жидкости E^- слабо зависят от их размера. Самостоятельный интерес представляют также результаты, полученные для более высоких частот.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ

Рассматриваются установившиеся гармонические колебания $\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$, акустической среды, состоящей из двух полупространств с различными свойствами, задаваемыми скоростью звука c_n и плотностью ρ_n, $n = 1, 2$. Источником колебаний является сферический излучатель радиуса a, расположенный в нижнем полупространстве ($n = 2$) на глубине d (рис. 1а). Скорость $ve^{-i\omega t}$ смещения его поверхности $S_a : R_0 = a$ предполагается заданной:

$$v_R\big|_{\mathbf{x}\in S_a} = v. \tag{1}$$

Здесь $R_0 = R_0(-d) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}$; $v_R = (\mathbf{v}, \mathbf{n}_s)$ – нормальная (радиальная) компонента вектора скорости колебания частиц среды $\mathbf{v} = -i\omega\mathbf{u}$; $\mathbf{n}_s = \{\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta\}$ – вектор единичной внешней нормали к поверхности S_a; гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опущен. Наряду с декартовыми координатами (x, y, z) используются и сферические координаты (R_0, φ, θ) (рис. 1б), связанные соотношениями

$$x = R_0\cos\varphi\sin\theta, \quad R_0 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, \mathbf{x}_0 = (0, 0, -d),$$
$$y = R_0\sin\varphi\sin\theta, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$
$$z = R_0\cos\theta - d, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Векторные поля смещений и скоростей выражаются через скалярное поле давлений $p(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\omega^2\rho}\nabla p \text{ и } \mathbf{v} = \frac{1}{i\omega\rho}\nabla p, \tag{2}$$

которое в каждом из полупространств удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + \kappa_n^2 p = 0 \tag{3}$$

с волновым числом $\kappa_n = \omega/c_n$, $n = 1, 2$ ($n = 1$ для $z > 0$ и $n = 2$ для $z < 0$). Предполагается, что поле давлений p и вертикальная компонента вектора смещений $u_z = \dfrac{1}{\omega^2\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}$ непрерывны на границе раздела сред $z = 0$:

$$[p] = 0, \quad [u_z] = 0. \tag{4}$$

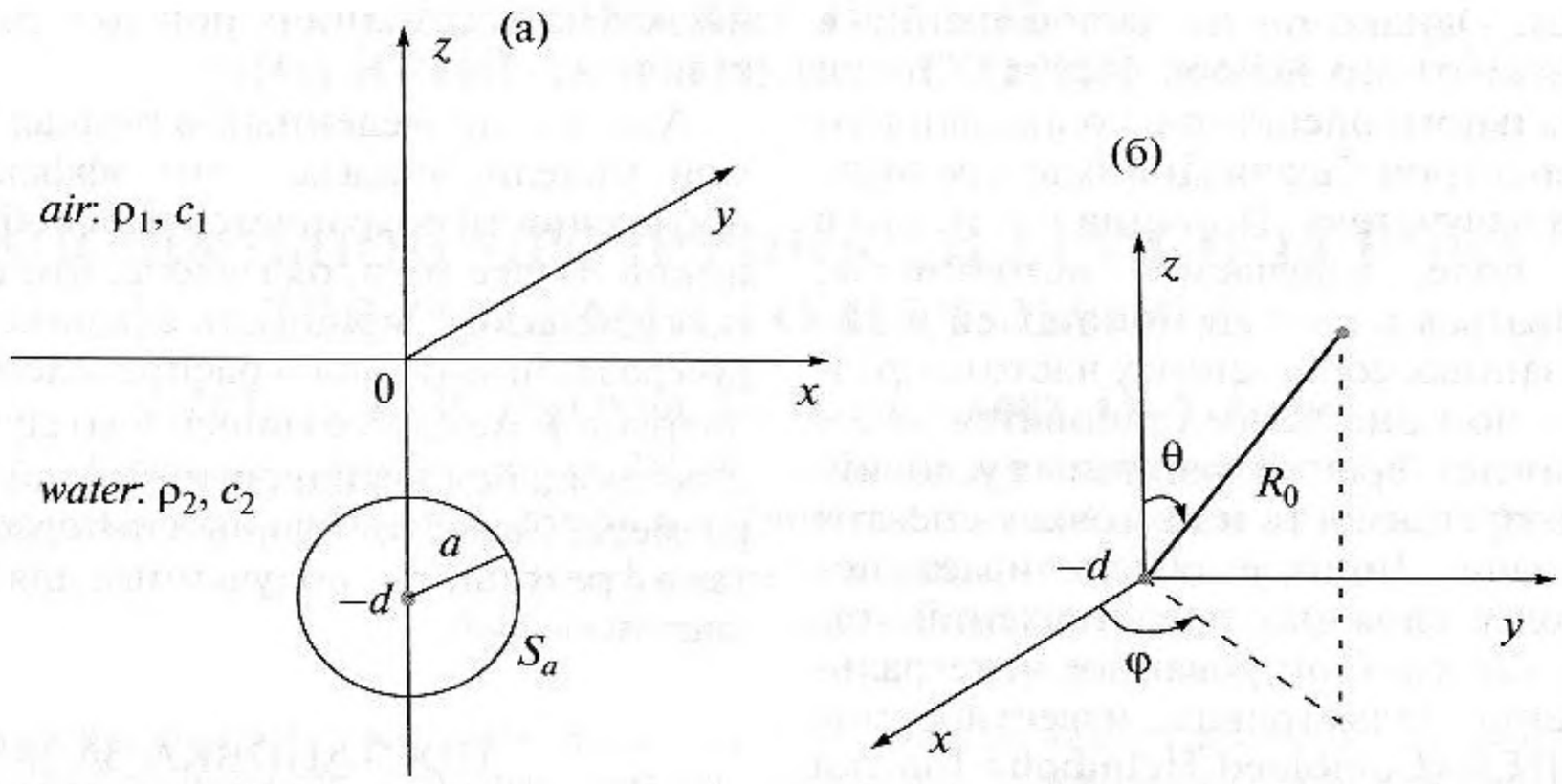

Рис. 1. Геометрия задачи (а) и локальные сферические координаты (б).

Квадратными скобками обозначен скачок соответствующей функции на поверхности $z = 0$: $[f] = \lim_{\varepsilon \to 0}(f(z-\varepsilon) - f(z+\varepsilon))$. Кроме того, для обеспечения однозначной разрешимости краевой задачи (1)–(4) требуется выполнение условий излучения на бесконечности, вытекающих из принципа предельного поглощения [13].

Интегральное представление общего решения данной задачи строится с помощью функции Грина $g(\mathbf{x}, \xi)$, которая вводится как фундаментальное решение, соответствующее точечному источнику $\delta(\mathbf{x} - \xi)$ (δ – дельта-функция Дирака), расположенному в точке $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ нижнего полупространства:

$$\Delta g + \kappa_1^2 g = 0, \quad z > 0,$$
$$\Delta g + \kappa_2^2 g = \delta(\mathbf{x} - \xi), \; z < 0, \tag{5}$$

$$[g] = 0, \quad \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial z}\right] = 0, \quad z = 0. \tag{6}$$

Функция g может быть представлена в виде суммы классического фундаментального решения уравнения Гельмгольца

$$g_0(\mathbf{x} - \xi) = g_0(R) = -\frac{1}{4\pi} e^{i\kappa_2 R} \Big/ R, \quad R = |\mathbf{x} - \xi|, \tag{7}$$

т.е. частного решения второго из уравнений (5), описывающего поле точечного источника в безграничном пространстве, и поправочного слагаемого $g_{sc}(\mathbf{x}, \xi)$, возникающего при взаимодействии поля g_0 с границей раздела сред $z = 0$:

$$g(\mathbf{x}, \xi) = \begin{cases} g_{sc}(\mathbf{x}, \xi), & z \geq 0, \\ g_0(\mathbf{x} - \xi) + g_{sc}(\mathbf{x}, \xi), & z \leq 0. \end{cases} \tag{8}$$

Отраженное ($z < 0$) и преломленное ($z > 0$) поле g_{sc} строится в явном виде с помощью преобразования Фурье по горизонтальным координатам x, y. В результате

$$g(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{\Gamma_1 \Gamma_2} G(\alpha, z, \zeta) e^{-i[\alpha_1(x-\xi) + \alpha_2(y-\eta)]} d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{9}$$

$$G = \begin{cases} G_{sc} = -\dfrac{1}{2\sigma_2} b_1(\alpha) e^{\sigma_2 \zeta} e^{-\sigma_1 z}, & z \geq 0, \\ G_0 + G_{sc} = -\dfrac{1}{2\sigma_2}[e^{-\sigma_2|z-\zeta|} + b_2(\alpha) e^{\sigma_2(z+\zeta)}], & z \leq 0, \end{cases}$$

$$b_1(\alpha) = \frac{2\rho_1\sigma_2}{\rho_1\sigma_2 + \rho_2\sigma_1}, \quad b_2(\alpha) = \frac{\rho_1\sigma_2 - \rho_2\sigma_1}{\rho_1\sigma_2 + \rho_2\sigma_1},$$

$$\sigma_n = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_n^2}, \quad \mathrm{Re}\,\sigma_n \geq 0, \quad \mathrm{Im}\,\sigma_n \leq 0, \quad n = 1, 2.$$

Величины b_1 и b_2 имеют смысл коэффициентов прохождения и отражения для плоских волн с горизонтальным волновым вектором $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ [12]. Контуры интегрирования Γ_1, Γ_2 идут вдоль вещественных осей комплексных плоскостей α_1, α_2, отклоняясь от них при обходе точек ветвления $\alpha = \pm\kappa_n$, $n = 1, 2$ в соответствии с принципом предельного поглощения.

Для любой точки ξ, находящейся внутри сферы S_a, функция $g(\mathbf{x}, \xi)$ удовлетворяет исходным уравнениям (3) и условиям на границе раздела сред (4). Этим же свойством обладает и любая суперпозиция таких функций, в том числе и интеграл

$$p(\mathbf{x}) = \iint\limits_{S_a^-} g(\mathbf{x}, \xi) q(\xi) d\xi, \tag{10}$$

взятый по поверхности сферы S_a^- меньшего радиуса $\bar{a} = a - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, $\varepsilon/a \ll 1$). Данное представление дает искомое решение исходной задачи (1)–(4), если неизвестная плотность потенциала $q(\xi)$ выбрана так, что радиальная компонента скорости

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\omega\rho_2} \iint\limits_{S_a^-} \nabla g(\mathbf{x}, \xi) q(\xi) d\xi, \tag{11}$$

удовлетворяет также и условиям на поверхности сферы (1). Подстановка представления (11) в условие (1) приводит к интегральному уравнению относительно неизвестной q

$$\mathcal{K}q \equiv \iint\limits_{S_a} k(\mathbf{x},\xi)q(\xi)d\xi = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_a \tag{12}$$

с ядром

$$k(\mathbf{x},\xi) = (\nabla g(\mathbf{x},\xi),\mathbf{n}_s) = \frac{\partial g(\mathbf{x},\xi)}{\partial \mathbf{n}_s}$$

и заданной правой частью $f(\mathbf{x}) = i\omega\rho_2 v(\mathbf{x})$. В соответствии с представлением g в виде суммы $g_0 + g_{sc}$ ядро также разбивается на два слагаемых: $k = k_0 + k_{sc}$, из которых k_{sc} – бесконечно гладкая функция, а k_0 обладает сингулярностью:

$$k_0(\mathbf{x},\xi) = \frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{n}_s} \sim -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_s}\left(\frac{1}{R}\right) \text{ при } R \to 0.$$

В пределе при $\varepsilon \to 0$, т.е. при стремлении радиуса внутренней сферы $\bar{a}$ к a, точка сингулярности $\mathbf{x} = \xi$ появляется на поверхности интегрирования и поверхностный интеграл в уравнении (12) понимается как интеграл в смысле главного значения плюс вклад интеграла по внутренней бесконечно малой полусфере S_ε: $|\mathbf{x} - \xi| = R = \varepsilon$, обходящей изнутри точку сингулярности $\mathbf{x}$. При $\varepsilon \to 0$ этот интеграл сводится к интегралу Гаусса, дающему значение телесного угла, под которым эта полусфера видна из точки $\mathbf{x}$:

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_s}\left(\frac{1}{R}\right)dS = \int_0^\pi\int_0^0 \sin\psi\, d\chi\, d\psi = -2\pi.$$

Тем самым уравнение (12) принимает классический вид уравнения второго рода с выделенным в явном виде вкладом сингулярной составляющей ядра:

$$\frac{1}{2}q(\mathbf{x}) + \text{v.p.}\iint\limits_{S_a} k(\mathbf{x},\xi)q(\xi)d\xi = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_a. \tag{13}$$

Следует отметить, что при приближении ξ к $\mathbf{x}$ вдоль поверхности S_a сингулярность ядра фактически становится устранимой за счет того, что вектор $\mathbf{i}_R = \nabla R = (\mathbf{x} - \xi)/R$, входящий в

$$k_0 = (\nabla g_0, \mathbf{n}_s) = (i\kappa_2 - 1/R)(\mathbf{i}_R, \mathbf{n}_s)g_0,$$

в пределе ортогонален вектору нормали $\mathbf{n}_s$: $(\mathbf{i}_R, \mathbf{n}_s) \to 0$ при $\xi \to \mathbf{x}$. Поэтому численное интегрирование, проводимое в окрестности точки сингулярности $\mathbf{x}$ в локальных полярных координатах ($d\xi = RdRd\varphi$), не требует измельчения шага сетки при $R \to 0$.

Решение интегрального уравнения (13) ищется в виде разложения по системе некоторых базисных функций q_j, заданных на поверхности интегрирования S_a:

$$q(\xi) \approx q_N(\xi) = \sum_{j=1}^{N} t_j q_j(\xi). \tag{14}$$

Неизвестные коэффициенты разложения t_j, сгруппированные в вектор $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_N)^T$, определяются из линейной алгебраической системы

$$A\mathbf{t} = \mathbf{f}, \tag{15}$$

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_N)^T,$$

к которой уравнение (13) сводится после подстановки в него q вида (14) и дальнейшей дискретизации по схеме Галеркина или по методу коллокации.

Наиболее простым для реализации является выбор в качестве базиса q_j функций, равных единице, в элементарных ячейках S_j, на которые разбивается поверхность S_a при дискретизации, и нулю – на остальной ее части. В этом случае при использовании метода коллокации элементы матрицы A и правой части $\mathbf{f}$ системы (15) имеют вид

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} + \text{v.p.}\iint\limits_{S_i} k(\mathbf{x}_i,\xi)d\xi, \quad f_i = f(\mathbf{x}_i),$$

здесь δ_{ij} – символ Кронекера, $\mathbf{x}_i \in S_i$ – точки коллокации. С ростом N имеет место сходимость $t_j \to q(\xi_j)$, $\xi_j \in S_a$, т.е. разложение (14) дает кусочно-постоянную аппроксимацию искомой плотности потенциала q на поверхности S_a.

В случае осевой симметрии, когда в условии (1), задающем источник, функция $v = v(\theta)$ не зависит от угловой переменной φ, решение q также зависит только от одного полярного угла ψ сферической системы координат (a, χ, ψ): $\xi = a\cos\chi\sin\psi$, $\eta = a\sin\chi\sin\psi$, $\zeta = a\cos\psi - d$, $0 \le \chi < 2\pi$, $0 \le \psi \le \pi$, определяющей положение точки ξ на S_a. В этих координатах интеграл по χ от ядра k берется в явном виде, т.е. интегральный оператор уравнения (12) становится однократным, а для разложения q достаточно задать систему базисных функций $q_j(\psi)$ на отрезке изменения полярного угла $0 \le \psi \le \pi$, зафиксировав точки коллокации $\mathbf{x}_i$ на меридиане $R_0 = a$, $\varphi = 0$, $0 \le \theta \le \pi$. Наряду с кусочно-постоянной аппроксимацией здесь использовалось также и разложение по сплайнам-шапочкам

$$q_j(\psi) = s((\psi - \psi_j)/h), \quad s(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

$$\psi_j = (j - 1/2)h, \quad h = \pi/N, \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

дающим кусочно-линейное приближение.

После нахождения коэффициентов t_j характеристики волнового поля могут быть вычислены в произвольной точке пространства $\mathbf{x}$ (вне S_a) с по-

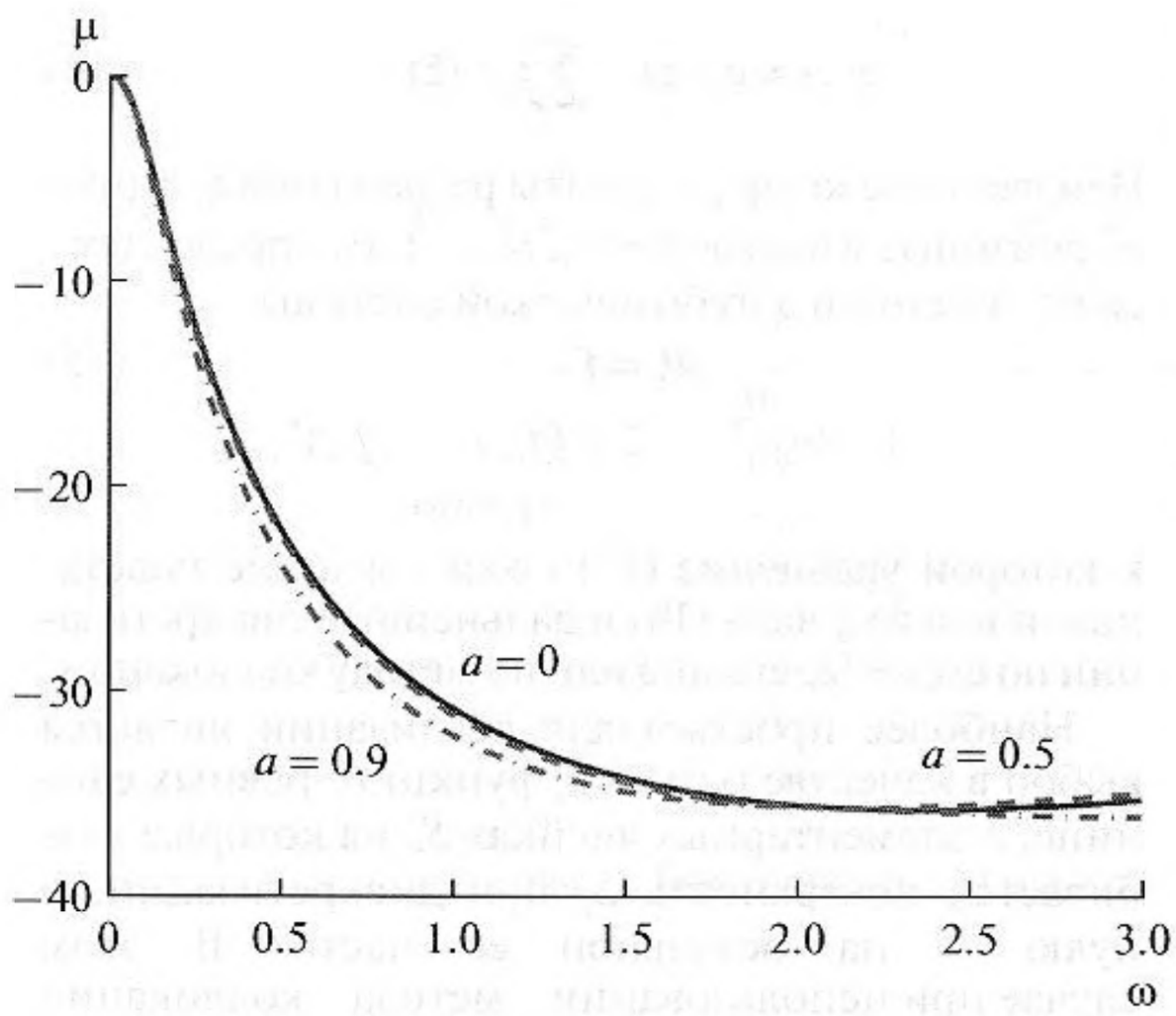

Рис. 2. Частотные зависимости коэффициента прозрачности μ, иллюстрирующие слабое влияние относительного размера сферического излучателя на данную характеристику.

мощью суперпозиции полей элементарных источников q_j:

$$p(\mathbf{x}) \approx \sum_j t_j p_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \sum_j t_j \mathbf{u}_j(\mathbf{x}),$$
$$p_j = \iint_{S_j} g(\mathbf{x},\xi) q_j(\xi) d\xi, \quad \mathbf{u}_j = \frac{1}{\omega^2 \rho} \nabla p_j. \tag{16}$$

Осредненный за период колебаний $T = 2\pi/\omega$ поток энергии E, переносимой в гармоническом волновом поле через некоторую поверхность S, определяется с помощью интегрирования по этой поверхности нормальной компоненты e_n вектора плотности потока энергии $\mathbf{e}$ [14]:

$$E = \iint_S e_n dS, \quad e_n = (\mathbf{e}, \mathbf{n}) = \frac{\omega}{2} \mathrm{Im}(\tau_n, \mathbf{u}). \tag{17}$$

Здесь $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности S в текущей точке интегрирования ξ, τ_n – вектор напряжений на элементарной площадке с нормалью $\mathbf{n}$. В жидкости $\tau_n = -p\mathbf{n}$ и, как следствие, $e_n = \mathrm{Im}\left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} p^*\right)/(2\omega\rho)$, $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = (\nabla p, \mathbf{n})$; звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения.

Проницаемость границы раздела сред для потока волновой энергии оценивается с помощью коэффициента прозрачности [1]

$$\mu = 10 \lg_{10}(E^+/E) \text{ (дБ)}, \tag{18}$$

в котором E^+ – количество энергии, проходящей в верхнее полупространство, а E – общее количество энергии, отдаваемой источником в среду. Для вычисления E^+ в представлении (17) в качестве S следует взять поверхность $z = 0$, а для E – поверхность S_a. Однако в силу закона сохранения энергии $E = E_b$, где E_b – суммарный поток энергии через любую сферическую поверхность S_b радиуса $b > a$, коцентральную с S_a. Кроме того, ввиду отсутствия оттока энергии на бесконечность в горизонтальном направлении, $E^+ = E_z$, где E_z – поток энергии через любую горизонтальную плоскость $z = \mathrm{const}$, расположенную выше источника ($z > a - d$). Аналогично, количество энергии E^-, уходящей от источника в нижнее полупространство, равно E_z при любом $z < -a - d$. Численная проверка закона сохранения энергии, а также энергетического баланса $E = E_b = E^+ + E^-$ использовалась для контроля достоверности получаемых результатов.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ СФЕРИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА

Анализ влияния относительного размера источника a/d на распределение излучаемой энергии E между потоками E^+ и E^- и, как следствие, на коэффициент прозрачности μ, привел к сравнительно неожиданному результату. Расчеты показали, что несмотря на строгий учет в рамках рассматриваемой модели переотражений между границей раздела сред и его поверхностью, с ростом a/d соотношение E^+/E (и тем самым μ) остается практически тем же, что и полученное ранее [1, 2] для точечного источника! Данный вывод иллюстрируют приведенные на рис. 2, 3 зависимости μ, E и $E^\pm$ от безразмерной частоты ω для точечного монополя и сферических источников относительного радиуса $a/d = 0.1$, 0.5 и 0.9.

Все результаты приводятся в безразмерном виде, в котором за единицу взяты глубина центра источника d, скорость звука в жидкости c_2 и ее плотность ρ_2. При этом безразмерная круговая частота $\omega = \kappa_2 d = 2\pi f d/c_2$, где f – размерная частота в герцах, а безразмерная осредненная мощность источника $E = \hat{E}\rho_2 c_2^3 d^2$, где $\hat{E}$ – размерная мощность в ваттах. Безразмерные параметры среды $c_1 = 0.222$, $\rho_1 = 0.0013$ и $c_2 = 1$, $\rho_2 = 1$ соответствуют размерным $c_1 = 330$ м/с, $\rho_1 = 1.3$ кг/м^3 и $c_2 = 1485$ м/с, $\rho_2 = 1000$ кг/м^3 для воздуха и воды соответственно.

Рассматривались осесимметричные источники трех типов: M-источник (монополь) с равномерным распределением скорости v_R по S_a в условии (1) ($v = v_0 = \mathrm{const}$), а также V и H-источники

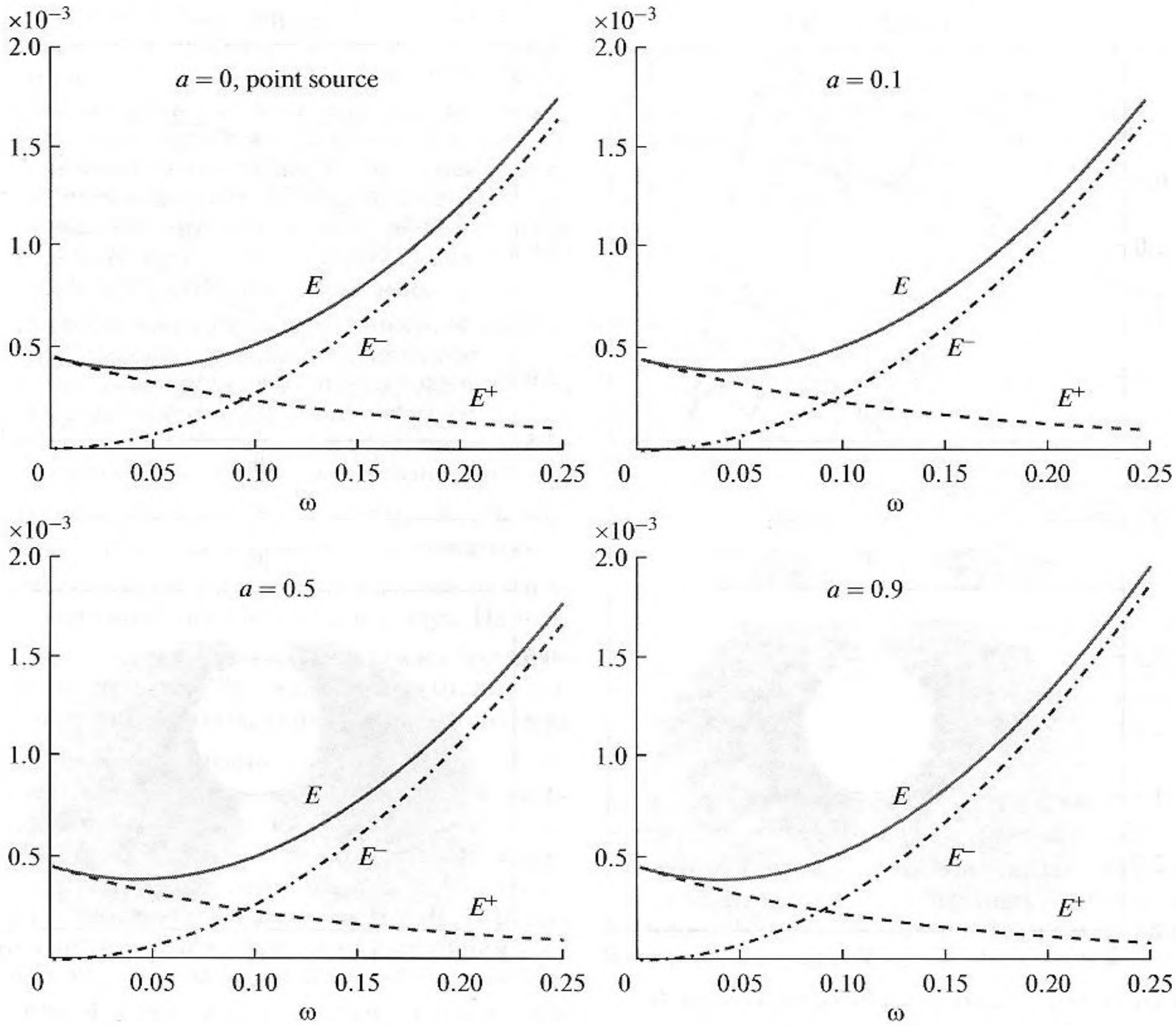

Рис. 3. Низкочастотное распределение суммарной мощности E между потоками энергии E^+ и E^- для точечного ($a = 0$) и сферических M-источников различного радиуса a.

с доминированием соответственно вертикальных или горизонтальных компонент скорости $\mathbf{v}$ на S_a:

$$V : v(\theta) = 6\left|\cos^5\theta\right| v_0, \quad H : v(\theta) = \frac{32}{5\pi}\sin^5\theta\, v_0,$$
$$0 \le \theta \le \pi.$$

Коэффициенты здесь подобраны так, чтобы во всех трех случаях объемная скорость источников $\hat{v}$ была одинаковой:

$$\hat{v} = \frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{S_a} v\,dS = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi v(\theta)\sin\theta\,d\theta = v_0.$$

Кроме того, для сопоставимости результатов константа v_0 выбрана так, чтобы на низких частотах сферический M-источник был энергетически эквивалентен точечному δ-источнику, т.е. чтобы при $\omega \to 0$ у них совпадала энергия E_0, излучаемая в безграничное пространство. Для точечного источника с полем g_0 вида (7) $E_0 = 1/(8\pi c_2\rho_2)$, а для сферического M-источника

$$E_0 = \frac{2\pi a^4\rho_2 c_2\omega^2}{c_2^2 + a^2\omega^2}\left|v_0\right|^2,$$

поэтому требуемая эквивалентность обеспечивается при $v_0 = 1/(4\pi\rho_2\omega a^2)$, причем не только при $\omega \to 0$, но и при $a \to 0$.

Осевая симметрия упрощает анализ, в частности, поверхностные интегралы (17) сводятся к однократным:

$$E = 2\pi a^2\int\limits_0^\pi e_n(\theta)\sin\theta\,d\theta, \quad e_n = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[p(\theta)v^*(\theta))], \tag{19}$$
$$p(\theta) = p\big|_{R_0=a},$$

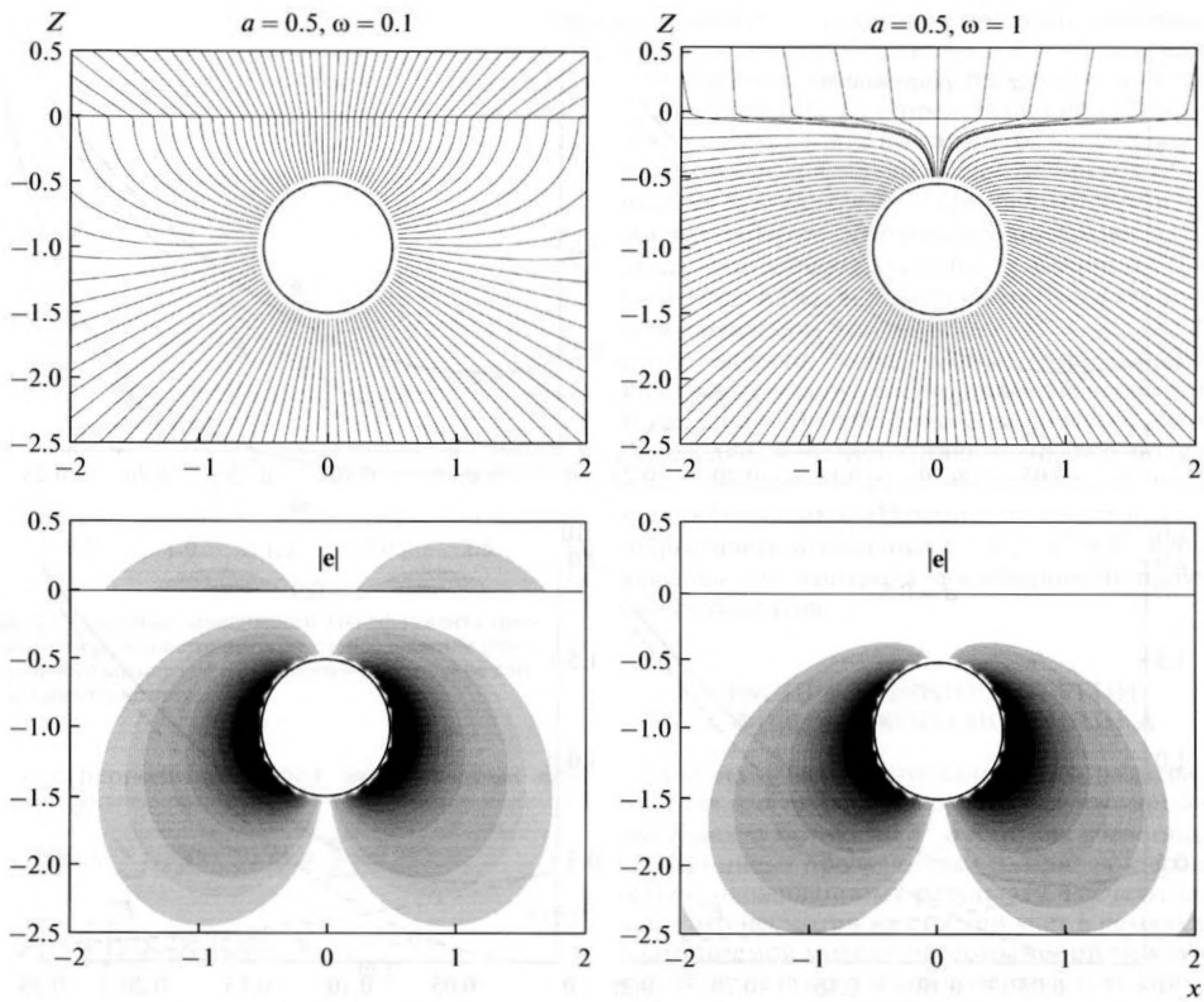

Рис. 4. Линии тока (вверху) и плотность потока энергии $|\mathbf{e}(x, z)|$ (внизу) для M-источника радиуса $a = 0.5$ на низкой ($\omega = 0.1$, слева) и средней ($\omega = 1$, справа) частоте.

$$E^{+} = \frac{1}{8\pi\omega\rho_2} \times$$

$$\times \left[\int_0^{\kappa_2} \frac{1 - |b_2(\alpha)|^2}{2\sqrt{\kappa_2^2 - \alpha^2}} |Q|^2 \alpha d\alpha + \int_{\kappa_2}^{\kappa_1} \frac{\mathrm{Im} b_2(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 - \kappa_2^2}} |Q|^2 \alpha d\alpha \right],$$

$$E^{-} = \frac{1}{16\pi\omega\rho_2} \times$$

$$\times \int_0^{\kappa_2} - \frac{(|Q_1|^2 + |b_2(\alpha)Q_2|^2 + 2\mathrm{Re}[b_2(\alpha)Q_1^* Q_2])}{\sqrt{\kappa_2^2 - \alpha^2}} \alpha d\alpha,$$

$$Q(\alpha) = 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \hat{q}(\psi) e^{\sigma_2 \zeta} d\psi,$$

$$Q_{1,2}(\alpha) = 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \hat{q}(\psi) e^{\sigma_2 (z \mp \zeta)} d\psi,$$

$\hat{q}(\psi) = q(\psi) J_0(\alpha a \sin\psi) \sin\psi$, $\zeta = a\cos\psi - d$, J_0 – функция Бесселя.

На рис. 2 сплошной линией показана совпадающая с полученной ранее [1, 2] зависимость коэффициента прозрачности μ от $\omega = \kappa_2 d$ для точечного монополя. Пунктиром и штрих-пунктиром нанесены значения μ для среднего ($a = 0.5$) и большого ($a = 0.9$) сферических M-источников. Во всех трех случаях $\mu \to 0$ при $\omega \to 0$, т.е. граница $z = 0$ становится аномально прозрачной. Более того, данные графики показывают, что прозрачность μ практически не зависит от относительно размера M-источника во всем рассматриваемом диапазоне изменения частоты ω. К аналогичным выводам приводит и анализ зависимостей $\mu(\omega)$, построенных для V и H-источников.

Зависимости $E^{\pm}(\omega)$, приведенные на рис. 3, показывают, что в низкочастотном диапазоне размер источника практически не влияет не только на отношение E^{+}/E^{-}, но и на количество излу-

чаемой энергии E^+ и E^- в отдельности. Более того, такие же зависимости, как на рис. 3, получаются и для V и H-источников. Интересно отметить, что точка ω, в которой E^- становится равной E^+, во всех случаях примерно одна и та же: $\omega \approx 0.1$. Более детальный анализ показывает, что ее значение все же зависит от a, но только в третьем знаке. Так, например, для M-источников (рис. 3) $E^+ = E^-$ при $\omega = 0.097$, 0.097, 0.095, и 0.089 для $a = 0$, 0.1, 0.5 и 0.9 соответственно.

Наглядную картину осредненного за период колебаний переноса волновой энергии от источника на бесконечность дают линии тока энергии, порождаемые векторным полем $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ (в любой точке $\mathbf{x}$ вектор $\mathbf{e}$ касается линии тока, проходящей через эту точку) (рис. 4). Поверхность источника S_a разбивается на две части: $S_a^+ : 0 \le \theta < \theta_0$ и $S_a^- : \theta_0 \le \theta \le \pi$. Линии тока, начинающиеся с поверхности S_a^+, пересекают границу $z = 0$, показывая путь переноса энергии E^+ из жидкости в воздух. На низких частотах, когда $E^+ > E^-$, S_a^+ занимает большую часть поверхности S_a ($\theta_0 \to \pi$ при $\omega \to 0$), но с ростом ω полярный угол θ_0, определяющий границу между S_a^+ и S_a^-, монотонно уменьшается и в соответствии с поведением кривых $E^\pm$ (рис. 3) пересекает экватор ($\theta_0 = \pi/2$) при $\omega \approx 0.1$ (рис. 4, слева). При $\omega = 1$ (рис. 4, справа) угол θ_0 уже сравнительно мал и в воздух поступает энергия только из узкой окрестности полюса сферы $\theta = 0$. В целом картина линий тока и характер ее изменения с частотой те же, что и для точечного источника [15].

На рис. 4 ниже линий тока энергии показано соответствующее распределение плотности потока энергии $|\mathbf{e}(x, z)|$. Его характерными чертами являются повышенная плотность потока, излучаемого вбок (темные зоны вдоль боковой поверхности источника), и почти нулевая плотность потока, идущего из приполярных областей (вертикальные светлые полосы над и под источником). Низкая плотность потока энергии из приполярной области наряду с уменьшением площади S_a^+ приводит к быстрому падению доли E^+ с ростом ω.

Энергия источника E может быть также представлена в виде суммы $E = E_0 + E_{sc}$, в которой E_{sc} дает поправку к энергии E_0, возникающую за счет отраженных волн. На низких частотах эта поправка отрицательна, причем $E_{sc} \approx -E_0$ при $\omega \to 0$, в результате $E \ll E_0$ (рис. 5). С ростом ω вклад E_{sc} уменьшается. Для выбранной зависимости v_0 от ω, имеющей степенное убывание, энергия E_0 сферического M-источника также имеет степенное убывание: $E_0 \sim c_2/(8\pi a^2 \rho_2 \omega^2)$ при $\omega \to \infty$. Поэтому кривые $E(\omega)$ на рис. 5, достигая максимума в определенном диапазоне средних частот, далее,

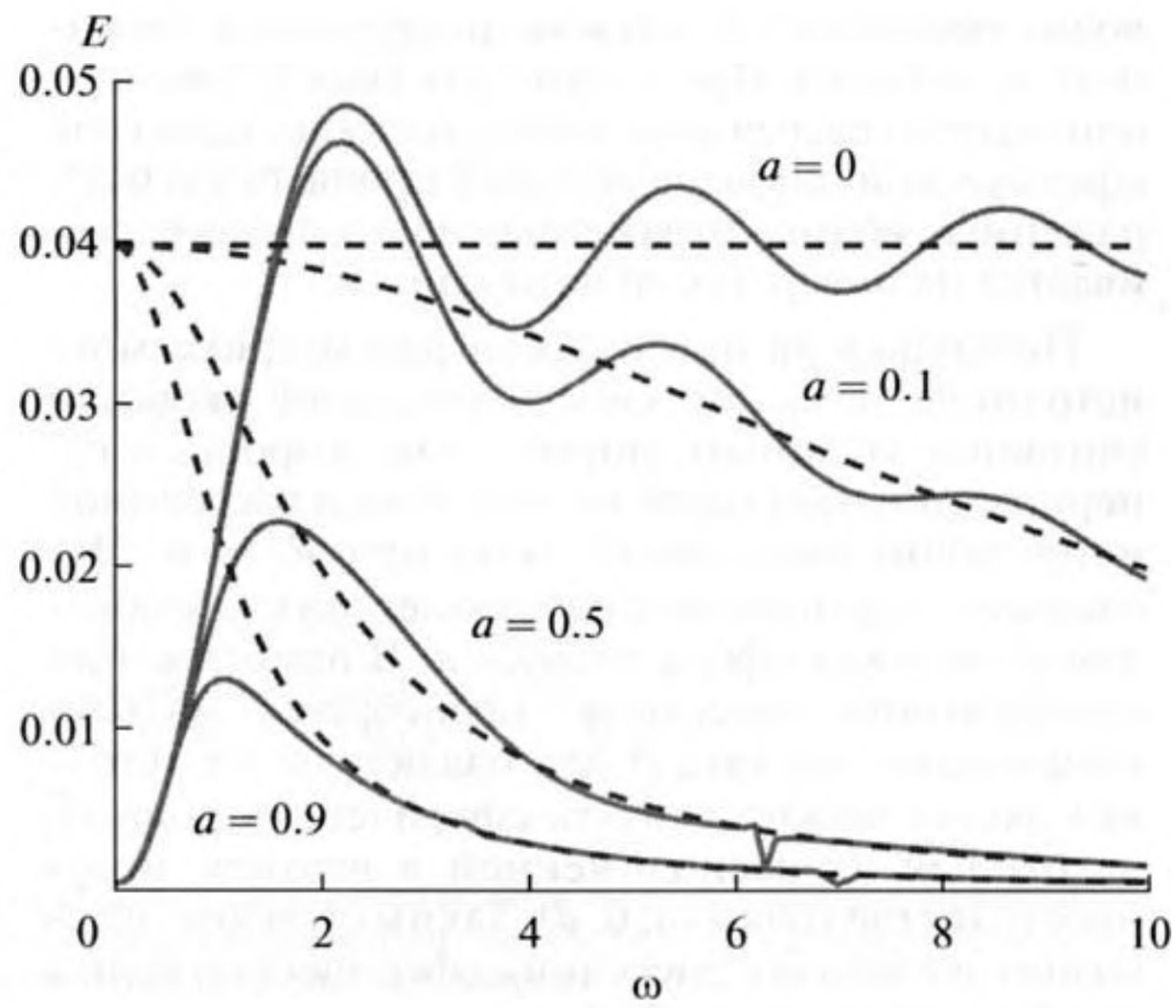

Рис. 5. Зависимость от частоты суммарной мощности E точечного ($a = 0$) и трех сферических M-источников (сплошные линии) и энергии E_0, излучаемой этими источниками в однородное пространство (пунктир).

на высоких частотах, стремятся к нулю. В то же время для точечного источника $E_0 = \text{const}$, т.е. сделанный выбор v_0 обеспечивает энергетическую эквивалентность объемных и точечного источников только в низкочастотном диапазоне, который расширяется с уменьшением a.

В частотном диапазоне рис. 5 содержатся точки фиктивных резонансов при $a = 0.5$ ($\omega_1 = 6.28$) и $a = 0.9$ ($\omega_1 = 3.49$, $\omega_2 = 6.98$). Их наличие проявляется в виде небольших провалов на соответствующих кривых $E(\omega)$ в окрестности этих частот. С увеличением точности аппроксимации за счет роста числа базисных функций N (рис. 5 построен при $N = 40$) зоны численной неустойчивости быстро сужаются и данные провалы становятся неразличимы.

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ИСТОЧНИКОМ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА КАК ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Для выяснения причин нечувствительности прозрачности границы к свойствам низкочастотного источника целесообразно исследовать излученное звуковое поле аналитически. В однородной жидкости поле M-источника совпадает при $R_0 > a$ с полем точечного монопольного источника. При падении создаваемой M-источником сферической волны на границу прошедшая в воздух и отраженная в воду волны такие же, как и в случае точечного источника, однако отраженная

волна рассеивается затем на поверхности конечного источника. При взаимодействии с границей однократно рассеянная волна, подобно исходной сферической, снова порождает прошедшую и отраженную волны, отраженная волна вновь рассеивается на поверхности источника и т.д.

Поскольку на поверхности рассматриваемого источника звука значение нормальной скорости считается заданным, нормальная скорость в суперпозиции падающей на источник и рассеянной источником волн равна нулю при $R_0 = a$. Это означает, что источник рассеивает звук как абсолютно жесткая сфера радиуса a. В приближении однократного рассеяния, пренебрегая малыми поправками порядка ρ_1/ρ_2, падающую на источник волну можно считать сферической волной, исходящей из расположенной в верхнем полупространстве точки $(0, 0, d)$. Таким образом, здесь возникает задача о рассеянии сферической волны на абсолютно жесткой сфере.

Отметим, что стандартная теория рэлеевского рассеяния [16] в данном случае неприменима, поскольку давление в падающей волне существенно меняется в пределах рассеивателя, когда относительный размер источника a/d порядка единицы. Элементарное решение задачи о рассеянии сферической волны на малой абсолютно жесткой сфере имеет вид [17, 18]:

$$p_{sc} = -\frac{\kappa_2^2 a^3}{24\pi d R_0} e^{i\kappa_2(R_0+2d)} + \\ + \frac{1-2ik_2 d}{4\pi a} e^{2i\kappa_2 d} \int\limits_0^{a^2/2d} z_0 \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{\exp(i\kappa_2 R_0(z_0))}{R_0(z_0)}\right] dz_0. \quad (20)$$

Здесь $R_0(z_0) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$ и учтено, что падающая на сферический рассеиватель волна p_{in} имеет тот же вид (7), что и $-g_0$, но с $R = R_0(d)$.

Рассеянная волна p_{sc} совпадает со звуковым полем, создаваемым мнимыми источниками: монополем в центре сферы и вертикальными диполями, распределенными вдоль отрезка $\{x = 0, y = 0, -d < z < -d + a^2/2d\}$ внутри рассеивателя. Следовательно, в приближении однократного рассеяния M-источник эквивалентен набору точечных звукопрозрачных источников.

Из формулы (20) следует, что хотя рассеянное поле вблизи рассеивателя не мало по сравнению с падающей волной, относительные возмущения осредненного по периоду волны потока мощности через любую плоскость, не пересекающую рассеиватель, малы по параметру $\kappa_2 a$ при любых значениях $a/d \le 1$. Этот результат допускает простую физическую интерпретацию: сильные возмущения звукового поля вблизи малого по сравнению с длиной волны рассеивателя обусловлены неоднородными волнами с волновыми числами порядка $1/a$; эти волны быстро затухают при удалении от рассеивателя и не излучают звук.

Решение задачи об излучении звука произвольным звукопрозрачным источником при наличии границы выражается через плосковолновой спектр поля, создаваемого источником в безграничной среде [3]. Используя формулы (9) и (20) для плосковолновых спектров под и над источником, получаем

$$S_{1,2}(\alpha) = 1 + \frac{\exp(2i\kappa_2 d)a^3}{24d^2}[4\kappa_2^2 d + \\ + (\pm 3i - 2\kappa_2 d \pm 4\kappa_2 d)\sqrt{\kappa_2^2 - \alpha^2}(1 + O(\kappa_2^2 a^2))]. \quad (21)$$

Верхний и нижний знаки здесь для S_1 при $z < -a - d$ и S_2 при $a - d < z < 0$ соответственно. Для простоты предполагается, что a мало не только по сравнению с $1/\kappa_2$, но и с $1/\kappa_1$. Подчеркнем, что обусловленные конечным размером источника отличия S_1 и S_2 от единицы при $\alpha < \kappa_1$ остаются малыми при любых $a/d \le 1$. Поэтому при $\alpha < \kappa_1 \ll a^{-1}$ учет многократного рассеяния приводит только к появлению в S_1 и S_2 членов более высокого порядка по малому параметру $\kappa_2 a$.

В терминах S_1 и S_2 потоки акустической мощности, излучаемые на бесконечность в воздухе и воде, даются формулами (11) и (12) работы [3] (ср. с (19))

$$E^+ = \\ = \frac{E_0}{\kappa_2}\left[\int\limits_0^{\kappa_2} \frac{1 - |b_2(\alpha)|^2}{2\sqrt{\kappa_2^2 - \alpha^2}} \left|S_2^2\right| \alpha d\alpha + \int\limits_{\kappa_2}^{\kappa_1} \frac{\mathrm{Im}\, b_2(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 - \kappa_2^2}} \left|S_2^2\right| \alpha d\alpha\right], \quad (22)$$

$$E^- = \\ = \frac{E_0}{2\kappa_2} \int\limits_0^{\kappa_2} \left|S_1 + b_2(\alpha) S_2 \exp(2id\sqrt{\kappa_2^2 - \alpha^2})\right|^2 \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{\kappa_2^2 - \alpha^2}}.$$

Согласно формулам (21) и (22) влияние конечных размеров M-источника на излучение звука проявляется в первом порядке по $\kappa_2 a$ при $\kappa_2 d \ll 1$ и только во втором порядке при $\kappa_2 d \sim 1$. При фиксированных значениях E_0 и $\kappa_2 d$ эффект размера источника растет как третья степень отношения a/d. Влияние конечных размеров источника на излучение звука в воздух и воду проиллюстрировано на рис. 6 и 7, построенных по формулам (21) и (22). Данные асимптотические результаты хорошо согласуются с представленными на рис. 2, 3 и 5 результатами, полученными на основе решения интегрального уравнения (13), возникающего при строгом учете взаимодействия отраженных волн с излучающей сферой.

В приближении геометрической акустики возмущение потока акустической энергии при рассеянии сферической волны на локальном препятствии пропорционально телесному углу, под которым оно видно из центра падающей волны. При $a/d \to 1$ источник виден из точки $(0, 0, d)$ под

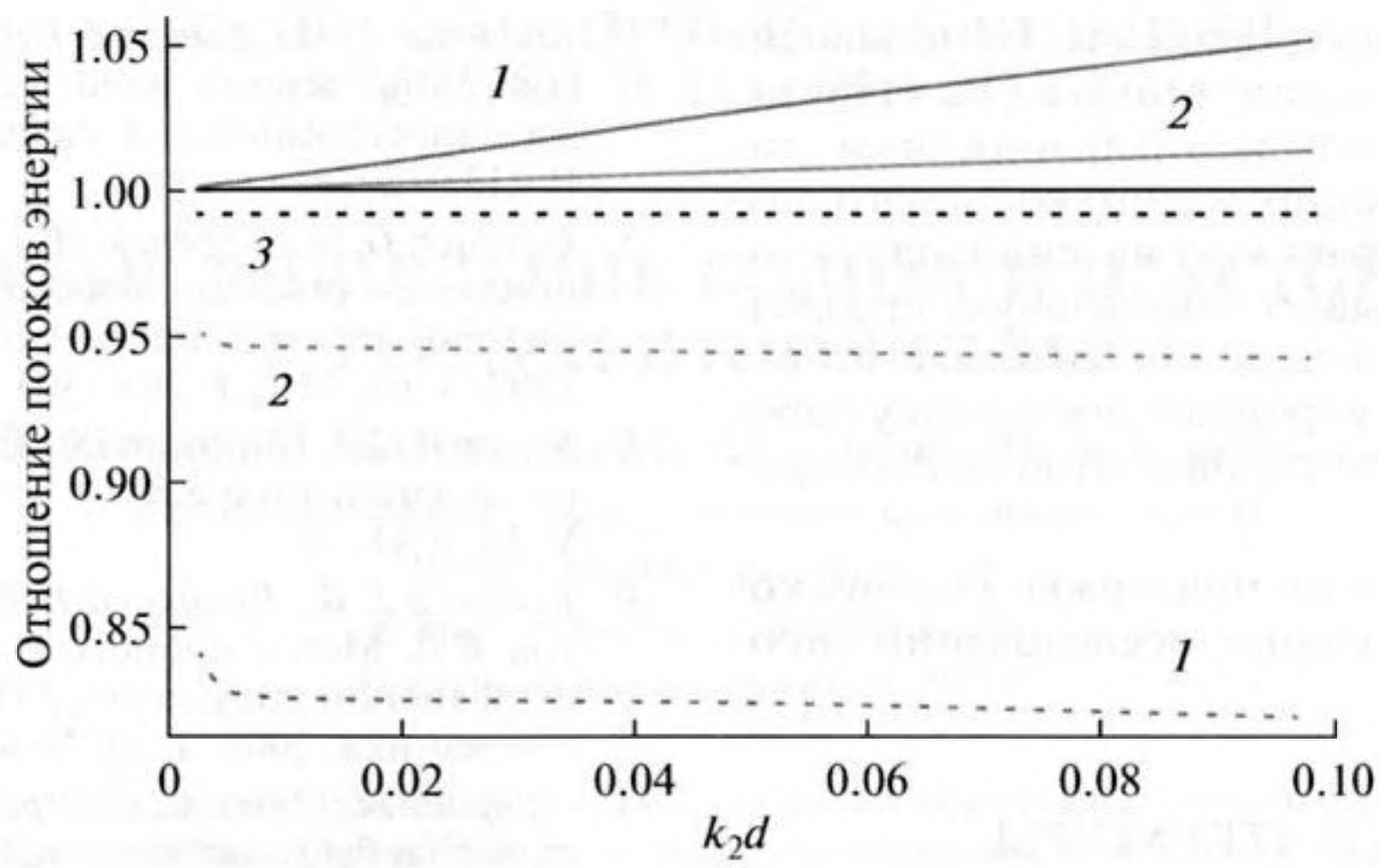

Рис. 6. Частотная зависимость излучения источника конечных размеров. Потоки мощности E^+ (сплошные линии) и E^- (пунктирные линии), создаваемые M-источниками с относительным размером $a/d = 0.9$ (*1*), 0.6 (*2*) и 0.3 (*3*), нормированы на соответствующие потоки мощности от эквивалентных точечных источников.

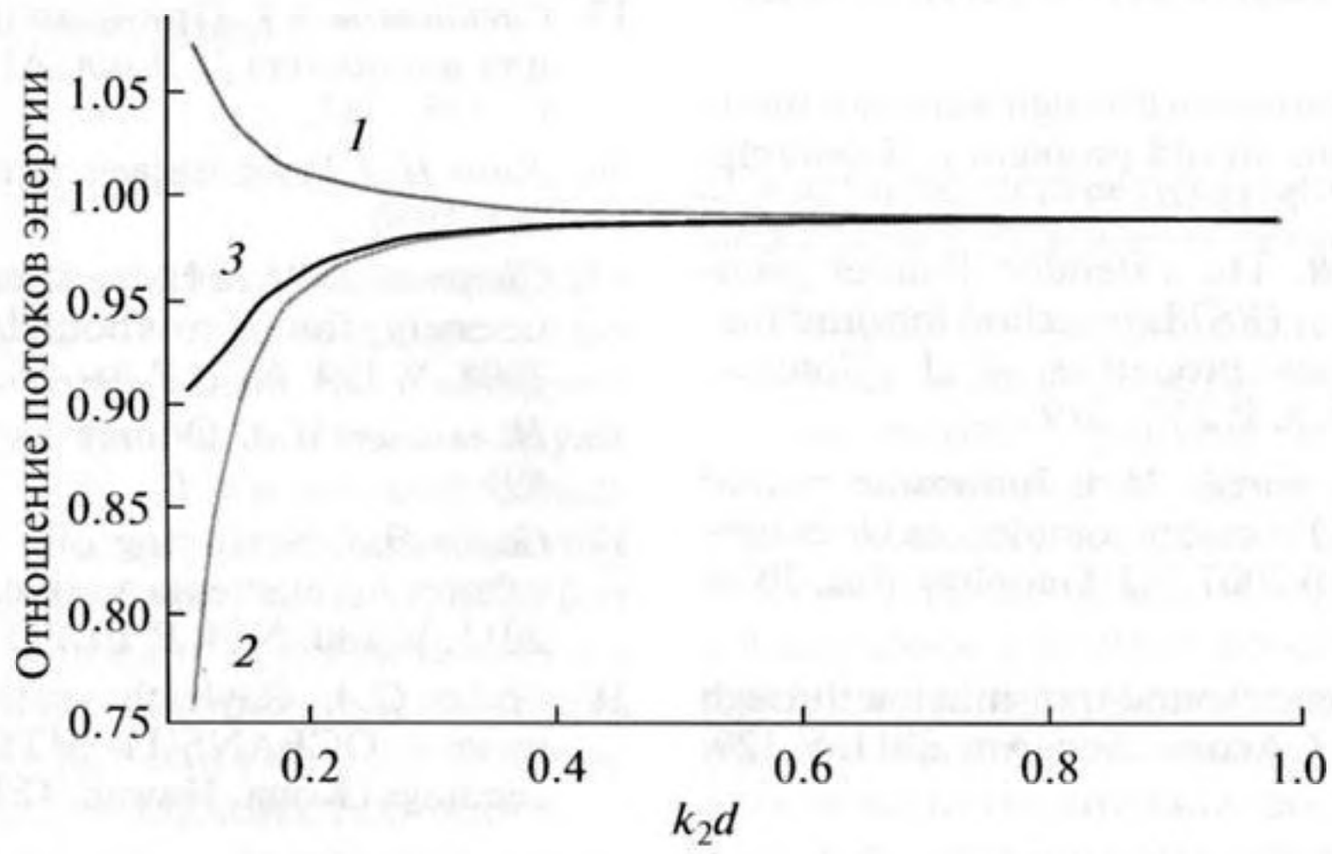

Рис. 7. Излучение звука источником малого волнового размера при различных расстояниях до границы раздела вода–воздух. Отношения создаваемых M-источником и точечным источником потоков мощности, уходящих на бесконечность в воздухе (*1*) и в воде (*2*), и полных мощностей акустического излучения (3) показаны как функция безразмерной глубины $\kappa_2 d$ источников. Радиус M-источника $a = 0.1\kappa_2^{-1}$.

углом $\pi(2-\sqrt{3})$ стерадиан, и можно было бы ожидать значительных (порядка $O(1)$) возмущений E^+ и E^-. Как показано выше, для низкочастотного звука этого не происходит в силу дифракционных эффектов, и поправки остаются малыми по параметру $\kappa_2 a$, даже несмотря на то, что граница раздела вода–воздух находится в ближней зоне источника.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе на примере сферического источника звука показано, что эффект низкочастотной аномальной прозрачности границы вода–воздух, установленный ранее для точечных источников, имеет место и в случае размерных излучателей. Как и ожидалось, для резкого возрастания прозрачности границы и излучения большей части волновой энергии в воздух необходима малость линейных размеров источника по сравнению с длиной волны. Напротив, вопреки ожиданиям, для проявления эффекта на низких частотах, т.е. при уменьшении относительной глубины источника, не требуется малость его размеров по сравнению с глубиной. Выяснилось, что при фиксированной объемной скорости источника с малым волновым размером как суммарная акустическая мощность, излучаемая в двухслойную среду, так и соотношение между потоками волновой энергии,

идущими в воду и воздух, практически не зависят от отношения радиуса источника к его глубине. Этот результат обусловлен особенностями дифракции волн на объектах малого волнового размера. Он резко расширяет круг явлений, для которых теория предсказывает аномальную прозрачность границы вода–воздух для низкочастотного звука, и значительно упрощает постановку лабораторных и натурных экспериментов по проверке теории.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00320).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Godin O.A.* Anomalous transparency of water–air interface for low-frequency sound // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. 164301.
2. *Годин О.А.* Прохождение низкочастотного звука из воды в воздух // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 3. С. 353–361.
3. *Godin O.A.* Sound transmission through water-air interfaces: New insights into an old problem // Contemp. Phys. 2008. V. 49. № 2. P. 105–123.
4. *Hornikx M., Waxler R.* The extended Fourier pseudospectral time-domain (PSTD) method for fluid media with discontinuous properties // J. Comput. Acoust. 2010. V. 18. № 4. P. 297–319.
5. *Matoza R.S., Fee D., Garcés M.A.* Infrasonic tremor wavefield of the Pu'u O'o crater complex and lava tube system, Hawaii, in April 2007 // J. Geophys. Res. 2010. V. 115. B12312.
6. *Godin O.A.* Low-frequency sound transmission through a gas-solid interface // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 129. № 2. P. EL45–EL51.
7. *Koopman G.H., Song L., Fahnline J.B.* A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition // J. Acoust. Soc. Am. 1989. V. 86. P. 2433–2438.
8. *Benthien G.W., Schenck H.A.* Nonexistence and nonuniqueness problems associated with integral equation methods in acoustics // Computers and Structures, 1997. V. 65. № 3. P. 295–305.
9. *Schenck H.A.* Improved integral formulation for acoustic radiation problems // J. Acoust. Soc. Am. 1968. V. 44. P. 41–58.
10. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Еремин А.А., Михаськив В.В.* Метод слоистых элементов в динамической теории упругости // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. № 4. С. 622–634.
11. *Zampolli M., Tesei A., Canepa G., Godin O.A.* Computing the far field scattered or radiated by objects inside layered fluid media using approximate Green's functions // J. Acoust. Soc. Am. 2008. V. 123. № 6. P. 4051–4058.
12. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика неоднородных сред. Т. 1: Основы теории отражения и распространения звука. М.: Наука, 2007. 446 с.
13. *Свешников А.Г.* Принцип предельного поглощения для волновода // Докл. АН СССР. 1951. Т. 80. № 3. С. 345–347.
14. *Умов Н.А.* Избранные сочинения. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
15. *Chapman D.M.F.* Using streamlines to visualize acoustic energy flow across boundaries // J. Acoust. Soc. Am. 2008. V. 124. № 1. P. 48–56.
16. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
17. *Godin O.A.* Scattering of a spherical wave by a small sphere: An elementary solution // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 130. № 4. P. EL135–EL141.
18. *Godin O.A.* Rayleigh scattering of spherical sound waves / OCEANS'11 MTS/IEEE Conference Proceedings (Kona, Hawaii: IEEE, 2011), P. 1–9.