АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2013, том 59, № 3, с. 307–311

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН ЛЭМБА В ТВЕРДОМ СЛОЕ РЕШЕТКОЙ МЕХАНИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

© 2013 г. А. Д. Лапин

Акустический институт им. акад. Н.Н. Андреева

117036 Москва, ул. Шверника 4

E-mail: lapin1932@yandex.ru

Поступила в редакцию 23.11.2011 г.

Рассмотрена задача о рассеянии m-й моды Лэмба решеткой из P цепочек одинаковых близко расположенных друг от друга механических резонаторов (пружин с грузами), присоединенных к границам твердого слоя. Расстояние между цепочками равно половине длины волны этой моды при частоте ω, равной или близкой собственной частоте цепочки резонаторов при учете взаимодействия соседних цепочек через неоднородные моды. Рассчитан коэффициент отражения m-й моды Лэмба от этой дифракционной решетки.

Ключевые слова: дифракционная решетка, резонаторы в волноводе, рассеяние упругих волн.

DOI: 10.7868/S0320791913010127

Нормальные волны (моды) вертикальной поляризации в горизонтальном твердом слое со свободными границами называют волнами Лэмба [1]. Все волны Лэмба, кроме нулевых, имеют критические частоты. Нулевая симметричная и нулевая антисимметричная волны Лэмба распространяются при любой частоте. В тонком по сравнению с длиной поперечной волны слое (пластине) они представляют собой соответственно продольную и изгибную волны. Затухание изгибных волн в тонкой пластине, обусловленное присоединенными к ней резонансными системами с трением, исследовали многие авторы [2–5]. В работе [6] было показано, что в твердом слое, являющемся одномодовым для симметричных (антисимметричных) волн, при помощи механических резонаторов с определенным трением всегда можно полностью поглотить нулевую симметричную (антисимметричную) волну Лэмба. Одномодовый (для симметричных или антисимметричных волн) твердый слой может быть не тонким по сравнению с длиной поперечной волны. Простейшим механическим резонатором для волн Лэмба является пружина с грузом. Такой резонатор, присоединенный пружиной к границе твердого слоя, интенсивно рассеивает падающую на него моду. Резонатор, расположенный перпендикулярно границе ("нормальный резонатор"), реагирует на нормальную компоненту ее смещения. Резонатор, расположенный параллельно границе и ориентированный по направлению распространения волны ("тангенциальный резонатор"), реагирует на тангенциальную компоненту ее смещения.

Представляет интерес исследовать эффективность дифракционной решетки, сконструированной из механических резонаторов, как отражателя звука в многомодовом твердом слое. Можно ожидать, что падающая мода будет эффективно отражаться от решетки с пространственным периодом L, равным или близким половине длины волны этой моды.

Рассмотрим твердый слой со свободными поверхностями, заданными в декартовой системе координат уравнениями $z = h$ и $z = -h$. К нему на пересечении его верхней и нижней поверхностей с плоскостями $x = (p - 1)L$, где $p = 1, 2, ..., P$, присоединены одинаковые близко расположенные друг от друга " нормальные" механические резонаторы, реагирующие на нормальное смещение границы. "Размажем" эти резонаторы по линиям их присоединения к твердому слою и будем характеризовать каждую цепочку резонаторов параметрами, отнесенными к единице длины по оси y. На рис. 1 дано сечение упругого слоя с резонаторами плоскостью xz. Обозначим через μ, $\kappa(1 - i\varepsilon)$ и ε – соответственно погонную массу, погонный коэффициент упругости и погонный коэффициент диссипации одной цепочки резонаторов. Ширину площадки соединения цепочки резонаторов и твердого слоя обозначим через $2d$. Поле в твердой среде будем характеризовать скалярным и векторным потенциалами φ и $\boldsymbol{\psi}$. В двумерной задаче, когда движение не зависит от координаты y, у векторного потенциала будет отлична от нуля только компонента по оси y; эту компоненту обозначим просто через ψ. Пусть слева на резонато-

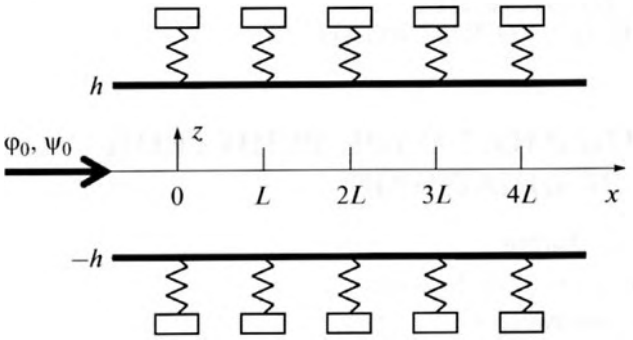

Рис. 1. Твердый слой с отражательной дифракционной решеткой для мод Лэмба.

ры падает m-я гармоническая симметричная мода с потенциалами

$$\varphi_0(x,z) = \mathrm{ch}(q_m z)\exp(i\xi_m x)],$$
$$\psi_0(x,z) = \frac{2i\xi_m q_m \mathrm{sh}(q_m h)}{(\xi_m^2 + s_m^2)\mathrm{sh}(s_m h)}\mathrm{sh}(s_m z)\exp i(\xi_m x), \quad (1)$$

где ξ_m – m-й положительный корень уравнения

$$D(\xi) = 0,$$
$$D(\xi) \equiv 4\xi^2 sq\,\mathrm{sh}(qh)\mathrm{ch}(sh) - (\xi^2 + s^2)^2\mathrm{ch}(qh)\mathrm{sh}(sh), \quad (2)$$

$q = \sqrt{\xi^2 - k_l^2}$, $\mathrm{Re}q \geq 0$, $\mathrm{Im}q \leq 0$, $s = \sqrt{\xi^2 - k_t^2}$, $\mathrm{Re}s \geq 0$, $\mathrm{Im}s \leq 0$, $k_l = \omega/c_l$, $c_t = \omega/c_t$, q_m и s_m – значения величин q и s при $\xi = \xi_m$, c_l и c_t – скорости продольной и поперечной волн, ω – круговая частота. Амплитуду скалярного потенциала падающей моды выбираем единичной, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем. Под действием падающей моды (1) резонаторы, расположенные сверху и снизу слоя, колеблются синфазно и создают в нем симметричное рассеянное поле (φ, ψ), полное поле в слое равно $\{(\varphi + \varphi_0), (\psi + \psi_0)\}$.

Обозначим через u_r – комплексную амплитуду смещения груза μ по оси z от положения равновесия в r-й цепочке. Уравнение движения грузов, расположенных над слоем, имеет вид

$$(-i\omega)^2\mu u_r = -F_r, \quad (3)$$

где комплексная амплитуда гармонической силы определяется по формуле

$$F_r = \kappa(1 - i\varepsilon)[u_r - \overline{W_r}], \quad (4)$$

$W(x, z)$ – смещение частиц среды по оси z в полном поле $\{(\varphi_0 + \varphi), (\psi_0 + \psi)\}$, $\overline{W_r} = \frac{1}{2d}\int_{x_r-d}^{x_r+d} W(x,h,)dx$ – усредненное смещение по площадке соединения цепочки с твердым слоем $(z = h, |x - x_r| < d \ll 1/k_t)$, $x_r = (r-1)L$. Сила F_r равномерно распределяется по площадке $|x - x_r| < d$ границы. Симметричное рассеянное поле в твердой среде удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\varphi + k_l^2\varphi = 0, \quad \Delta\psi + k_t^2\psi = 0$$

и граничным условиям

$$\{\sigma_{zz}\}_{z=h} = \{\sigma_{zz}\}_{z=-h} = \sum_{p=1}^{P}\beta_p(x)F_p,$$
$$\{\sigma_{zx}\}_{z=h} = \{\sigma_{zx}\}_{z=-h} = 0,$$

где σ_{ik} – компоненты тензора напряжений, $\beta_p(x) = \frac{1}{2d}$ при $|x - x_p| < d$, $\beta_p(x) = 0$ при $|x - x_p| > d$.

Это поле получим методом Фурье. Оно равно сумме рассеянных полей, создаваемых всеми цепочками резонаторов, $\varphi = \sum_{p=1}^{P}\varphi_p$, $\psi = \sum_{p=1}^{P}\psi_p$, где

$$\varphi_p(x,z) = -\frac{F_p}{2\pi\rho c_t^2}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\frac{(\xi^2 + s^2)}{D(\xi)}\mathrm{sh}(sh)\mathrm{ch}(qz)\exp[i\xi(x - x_p)]d\xi, \quad (5)$$

$$\psi_p(x,z) =$$
$$= -i\frac{F_p}{\pi\rho c_t^2}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\frac{\xi q}{D(\xi)}\mathrm{sh}(qh)\mathrm{sh}(sz)\exp[i\xi(x - x_p)]d\xi, \quad (6)$$

ρ – плотность среды. Величины $g(\xi)$ определяется по формуле

$$g(\xi) = \frac{\sin(\xi d)}{(\xi d)}.$$

При $|\xi d| \ll 1$ она равна приближенно единице.

При $|x - x_p| > d$ потенциалы φ_p и ψ_p можно представить в виде

$$\varphi_p =$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{iF_p}{\rho c_t^2}g(\xi_n)\frac{(\xi_n^2 + s_n^2)}{D'(\xi_n)}\mathrm{sh}(s_n h)\mathrm{ch}(q_n z)\exp[i\xi_n|x - x_p|], \quad (7)$$

$$\psi_p = \mathrm{sign}(x - x_p)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2F_p}{\rho c_t^2}g(\xi_n)\times$$
$$\times\frac{\xi_n q_n}{D'(\xi_n)}\mathrm{sh}(q_n h)\mathrm{sh}(s_n z)\exp[i\xi_n|x - x_p|], \quad (8)$$

где $D'(\xi_n) = \left\{\frac{d}{d\xi}D(\xi)\right\}_{\xi=\xi_n}$.

Смещения по оси z в полях (φ_0, ψ_0) и (φ_p, ψ_p) при $z = h$ получим по формулам (расчет выполнен при единичной амплитуде скалярного потенциала падающей волны)

$$w_0(x,h) = B\exp(i\xi_m x),\ B = -\frac{k_t^2 q_m \mathrm{sh}(q_m h)}{(\xi_m^2 + s_m^2)},$$

$$w_p(x,h) = \frac{k_t^2 F_p}{2\pi\rho c_t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\xi)q}{D(\xi)}\mathrm{sh}(qh)\mathrm{sh}(sh)\exp[i\xi(x - x_p)]d\xi.$$

Смещение по оси z в полном поле при $z = h$ равно

$$W(x,h) = w_0(x,h) + \sum_{p=1}^{P} w_p(x,h).$$

Усредненное по площадке $|x - x_r| < d$ полное смещение равно

$$\overline{W_r} = Bg(\xi_m)\exp(i\xi_m x_r) + \sum_{p=1}^{P} \overline{w_{pr}},$$

где

$$\overline{w_{pr}} = \frac{k_t^2 F_p}{2\pi\rho c_t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g^2(\xi)q}{D(\xi)}\mathrm{sh}(qh)\mathrm{sh}(sh)\exp[i\xi(x_r - x_p)]d\xi.$$

Подберем силы F_p таким образом, чтобы удовлетворялось уравнение (4). Согласно уравнению (3), смещение груза будет $u_r = F_r/(\mu\omega^2)$. Подставляя u_r и $\overline{W_r}$ в соотношение (4), получим для F_p систему алгебраических уравнений

$$(Y_0 + Y_{rr})F_r + \sum_{p=1}^{P}{}^{*} Y_{pr}F_p = i\omega g(\xi_m)B\exp(i\xi_m x_r), \quad (9)$$

где Y_0 и Y_{rr} – соответственно проводимость и присоединенная проводимость одиночной цепочки резонаторов, Y_{pr} – взаимная проводимость цепочек резонаторов, звездочка над суммой означает, что в ней опущено слагаемое $p = r$. Проводимости Y_0, Y_{rr}, Y_{pr} определяются по формулам

$$Y_0 = i\left[\frac{1}{\omega\mu} - \frac{\omega}{\kappa(1 - i\varepsilon)}\right],$$

$$Y_{rr} = -i\omega\overline{w_{rr}}/F_r = -\frac{ik_t^3}{2\pi\rho c_t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g^2(\xi)q}{D(\xi)}\mathrm{sh}(qh)\mathrm{sh}(sh)d\xi = Y_{11},$$

$$Y_{pr} = -i\omega\overline{w_{pr}}/F_p =$$

$$= -\frac{ik_t^3}{2\pi\rho c_t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g^2(\xi)q}{D(\xi)}\mathrm{sh}(qh)\mathrm{sh}(sh)\exp[i\xi(x_r - x_p)]d\xi.$$

Вычисляя интегралы в этих формулах на основе теории вычетов, получим следующие выражения:

$$Y_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_t^3 g^2(\xi_n)q_n}{\rho c_t D'(\xi_n)}\mathrm{sh}(q_n h)\mathrm{sh}(s_n h) = Y_{11},$$

$$Y_{pr} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_t^3 g^2(\xi_n)q_n}{\rho c_t D'(\xi_n)}\mathrm{sh}(q_n h)\mathrm{sh}(s_n h)\exp[i\xi_n|x_r - x_p|].$$

При $k_t d \ll 1$ вещественная компонента проводимости Y_{rr} практически не зависит от ширины площадки соединения пружин со слоем, она равна приближенно

$$\mathrm{Re}\,Y_{rr} = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{k_t^3 q_n}{\rho c_t D'(\xi_n)}\mathrm{sh}(q_n h)\mathrm{sh}(s_n h) = \mathrm{Re}\,Y_{11},$$

где N – число однородных симметричных мод Лэмба в твердом слое.

Пусть пространственный период решетки равен половине длины волны m-й моды Лэмба и число цепочек велико. Тогда m-е рассеянные моды от всех цепочек складываются синфазно, рассеянные однородные моды с другими номерами гасятся в результате интерференции. Следовательно, цепочки взаимодействуют друг с другом главным образом через рассеянные m-е моды. Будем считать, что неоднородные рассеянные моды заметно затухают на пространственном периоде решетки. По этой причине ограничимся учетом взаимодействия только соседних цепочек через эти моды. В формуле (9) это взаимодействие учитывают слагаемые

$$Y^\circ F_{r-1} + Y^\circ F_{r+1} = -2Y^\circ F_r, \quad r = 2,3,4,\ldots,P-1;$$

$$Y^\circ F_{r+1} = -Y^\circ F_r, \quad r = 1; \quad Y^\circ F_{r-1} = -Y^\circ F_r, \quad r = P.$$

Величина Y° есть компонента взаимной проводимости между соседними цепочками, обусловленная неоднородными модами. Она определяется по формуле

$$Y^\circ = \sum_{n=N}^{\infty}\frac{k_t^3 g^2(\xi_n)}{\rho c_t D'(\xi_n)}q_n\mathrm{sh}(q_n h)\mathrm{sh}(s_n h)\exp[-|\xi_n| L].$$

С целью сделать резонансные частоты всех цепочек одинаковыми изменим собственные проводимости первой и последнее цепочек: заменим Y_0 на $(Y_0 - Y^\circ)$. На основе приведенных физических соображений формулу (9) можно преобразовать к виду

$$(Y_0 + Y_{11} - 2Y^\circ)F_r + \sum_{p=1}^{P}{}^{*} Y_{pr}^{(m)}F_p = \quad (10)$$

$$= i\omega g(\xi_m)B\exp(i\xi_m x_r),$$

где $Y_{pr}^{(m)}$ – компонента взаимной проводимости Y_{pr}, обусловленная m-й однородной модой,

$$Y_{pr}^{(m)} = (-1)^{|r-p|}Y_{rr}^{(m)}, \quad Y_{rr}^{(m)} = \frac{k_t^3 g^2(\xi_m)}{\rho c_t D'(\xi_m)}q_m\mathrm{sh}(q_m h)\mathrm{sh}(s_m h).$$

Система уравнений (10) имеет решение

$$F_p = \frac{(-1)^{p-1}i\omega g(\xi_m)B}{\{(Y_0 + Y_{11} - 2Y^\circ) + (P-1)Y_{11}^{(m)}\}}.$$

Подставляя F_p в формулы (7) и (8), получим скалярный и векторный потенциалы рассеянного поля от p-й цепочки резонаторов. Складывая падающую волну (1) и рассеянные поля от всех цепочек, получим полное поле в твердом слое. Амплитуды рассеянных мод с номерами, не равными m, малы по сравнению с амплитудой m-й рассеянной моды. Это обусловлено тем, что m-е рассеянные моды от всех цепочек складываются синфазно, рассеянные моды с другими номерами гасятся в результате интерференции

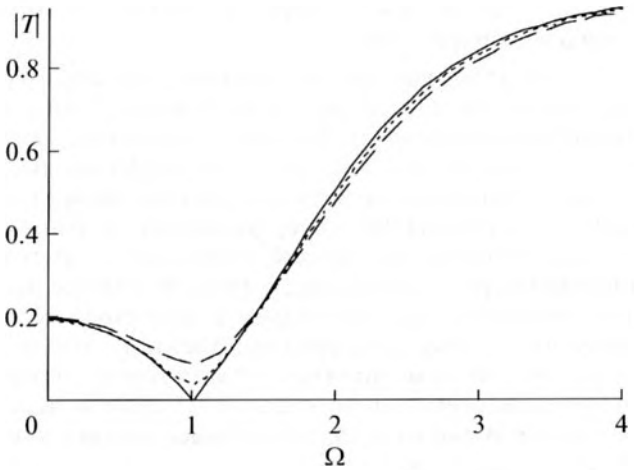

Рис. 2. Зависимость модуля коэффициента прозрачности нулевой моды от параметра Ω.

$$\left|\sum_{p=1}^{P}(-1)^p\exp(\pm i\xi_n x_p)\right| \ll \left|\sum_{p=1}^{P}(-1)^p\exp(\pm i\xi_m x_p)\right| = P.$$

Коэффициент отражения падающей симметричной моды (1) от дифракционной решетки получим по формуле

$$V = -\frac{PY_{11}^{(m)}}{\{(Y_0 + Y_{11} - 2Y^\circ) + (P-1)Y_{11}^{(m)}\}}.$$

Коэффициент прозрачности равен $T = 1 + V$. Резонанс цепочки резонаторов наступает при частоте ω_0, удовлетворяющей уравнению

$$\mathrm{Im}(Y_0 + Y_{11} - 2Y^\circ) = 0.$$

При выполнении соотношений $\omega = \omega_0$, $L = [\pi/\xi_m]_{\omega=\omega_0}$ коэффициент отражения будет

$$V(\omega_0) = -\{1 + (R_0 + R_1 - R_1^{(m)})\big/PR_1^{(m)}\}^{-1}_{\omega=\omega_0}, \qquad (11)$$

где $R_0 = \mathrm{Re}\,Y_0$, $R_1^{(n)}$ – вещественная компонента присоединенной проводимости одиночной цепочки, обусловленная рассеянием в n-ю моду. Коэффициент отражения асимптотически стремится к (-1) при увеличении числа цепочек. При $N = 1$, $m = 0$ (одномодовый слой) формула (11) дает $V(\omega_0) = -\{1 + R_0/(PR_1^{(0)})\}^{-1}$. Величина $R_1^{(0)} \to 0$ при $k_t h \to 0$ и поэтому нормальные резонаторы слабо отражают "юнговскую" продольную волну в тонкой пластине.

Найдем коэффициент прозрачности нулевой моды при резонансной частоте резонаторов, не совпадающей с частотой ω. Расчет выполним при следующих значениях параметров задачи: $N = 1$, $m = 0$, $\xi_0 L = \pi$, $p = 5$, $(\kappa/\omega)R_1^{(0)} = 1$. На рис. 2 дана зависимость величины $|T|$ от параметра $\Omega \equiv \omega_0/\omega$ при $\varepsilon = 0$, 0.2 и 0.5 (соответственно сплошная, штриховая и пунктирная линии). Полное отражение нулевой моды возможно лишь при $\Omega = 1$ при отсутствии трения в резонаторах.

Аналогичным способом решается задача об отражении m-й симметричной моды Лэмба от дифракционной решетки, сконструированной из тангенциальных механических резонаторов. Опуская вычисления, приведем окончательные результаты. Резонанс цепочки тангенциальных резонаторов наступает при частоте ω_0^*, удовлетворяющей уравнению

$$\mathrm{Im}(Y_0 + Y_{11}^* - 2Y^{\circ *}) = 0,$$

$$Y_{11}^* = \frac{k_t^3}{\rho c_t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^2(\xi_n)}{D'(\xi_n)}s_n\mathrm{ch}(q_n h)\mathrm{ch}(s_n h),$$

$$Y^{\circ *} = \frac{k_t^3}{\rho c_t}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{g^2(\xi_n)}{D'(\xi_n)}s_n\mathrm{ch}(q_n h)\mathrm{ch}(s_n h)\exp[-|\xi_n|L].$$

При выполнении соотношений $\omega = \omega_0^*$, $L = [\pi/\xi_m]_{\omega=\omega_0^*}$ коэффициент отражения m-й симметричной моды будет

$$V(\omega_0^*) = \{1 + [R_0 + R_1^* - R_1^{*(m)}]\big/[PR_1^{*(m)}]\}^{-1}, \qquad (12)$$

где $R_0 = \mathrm{Re}\,Y_0$, $R_1^* = \mathrm{Re}\,Y_{11}^* = \sum_{n=0}^{N-1}R_1^{*(m)}$, $R_1^{*(n)}$ – вещественная компонента присоединенной проводимости одиночной цепочки тангенциальных резонаторов, обусловленная рассеянием в n-ю моду,

$$R_1^{*(n)} = \frac{k_t^3}{\rho c_t}\frac{g^2(\xi_n)}{D'(\xi_n)}s_n\mathrm{ch}(q_n h)\mathrm{ch}(s_n h).$$

Коэффициент прозрачности равен $T(\omega_0^*) = 1 - V(\omega_0^*)$.

Рассчитаем коэффициент отражения m-й антисимметричной моды от дифракционной решетки. Обозначим через ξ_{am} волновое число этой моды, ξ_{am} есть m-й положительный корень уравнения

$$D_a(\xi) = 0,$$

$$D_a(\xi) \equiv 4\xi^2 sq\mathrm{ch}(qh)\mathrm{sh}(sh) - (\xi^2 + s^2)^2\mathrm{ch}(sh)\mathrm{sh}(qh).$$

Под действием падающей антисимметричной моды резонаторы, расположенные сверху и снизу слоя, колеблются противофазно и создают в нем антисимметричное рассеянное поле.

Резонанс цепочки нормальных резонаторов наступает при частоте ω_{a0}, удовлетворяющей уравнению $\mathrm{Im}\{Y_0 + [Y_{11}]_a - 2[Y^\circ]_a\} = 0$, где

$$[Y_{11}]_a = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_t^3 g^2(\xi_{an})q_{an}}{\rho c_t D'(\xi_{an})}\mathrm{ch}(q_{an}h)\mathrm{ch}(s_{an}h),$$

$$Y_a^\circ = \sum_{n=N}^{\infty}\frac{k_t^3 g^2(\xi_{an})}{\rho c_t D'(\xi_{an})}q_{an}\mathrm{ch}(q_{an}h)\mathrm{ch}(s_{an}h)\exp[-|\xi_{an}|L].$$

При выполнении соотношений $\omega = \omega_{a0}$, $L = [\pi/\xi_{am}]_{\omega=\omega_{a0}}$ коэффициент отражения m-й анти-

симметричной моды от решетки нормальных резонаторов будет

$$V_a(\omega_{a0}) = -\{1 + (R_0 + R_{a1} - R_{a1}^{(m)})/PR_1^{(m)}\}^{-1}_{\omega=\omega_{a0}}, \quad (13)$$

где $R_0 = \mathrm{Re}\,Y_0$, $R_{a1} = \mathrm{Re}[Y_{11}]_a = \sum_{n=0}^{N-1} R_{a1}^{(n)}$, $R_{a1}^{(n)}$ – вещественная компонента присоединенной проводимости одиночной цепочки, обусловленная рассеянием в n-ю антисимметричную моду,

$$R_{a1}^{(n)} = \frac{k_t^3}{\rho c_t}\frac{g^2(\xi_{an})}{D_a'(\xi_{an})} q_{an}\mathrm{ch}(q_n h)\mathrm{ch}(s_{an}h).$$

Коэффициент отражения асимптотически стремится к (-1) при увеличении числа цепочек. При $N = 1$, $m = 0$ (одномодовый слой) формула (13) дает $V_a(\omega_{a0}) = -\{1 + R_0/(PR_{a1}^{(0)})\}^{-1}$.

Резонанс цепочки тангенциальных резонаторов наступает при частоте ω_{a0}^*, удовлетворяющей уравнению

$$\mathrm{Im}\{Y_0 + [Y_{11}^*]_a - 2[Y^{\circ *}]_a\} = 0,$$

$$[Y_{11}^*]_a = \frac{k_t^3}{\rho c_t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^2(\xi_{an})}{D'(\xi_{an})} s_{an}\mathrm{sh}(q_{an}h)\mathrm{sh}(s_{an}h),$$

$$[Y^{\circ *}]_a = \frac{k_t^3}{\rho c_t}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{g^2(\xi_{an})}{D_a'(\xi_{an})} s_{an}\mathrm{sh}(q_{an}h)\mathrm{sh}(s_{an}h)\exp[-|\xi_{an}|L].$$

При выполнении соотношений $\omega = \omega_{a0}^*$, $L = [\pi/\xi_{am}]_{\omega=\omega_{a0}^*}$ коэффициент отражения m-й антисимметричной моды от решетки тангенциальных резонаторов будет

$$V_a(\omega_{a0}^*) = \{1 + [R_0 + R_{a1}^* - R_{a1}^{*(m)}]/[PR_{a1}^{*(m)}]\}^{-1}, \quad (14)$$

где $R_0 = \mathrm{Re}\,Y_0$, $Y_{a1}^* = \mathrm{Re}[Y_{11}^*]_a = \sum_{n=0}^{N-1} R_{a1}^{*(m)}$, $R_{a1}^{*(n)}$ – вещественная компонента присоединенной проводимости одиночной цепочки тангенциальных резонаторов, обусловленная рассеянием в n-ю антисимметричную моду,

$$R_{a1}^{*(n)} = \frac{k_t^3}{\rho c_t}\frac{g^2(\xi_{an})}{D_a'(\xi_{an})} s_{an}\mathrm{sh}(q_{an}h)\mathrm{sh}(s_{an}h).$$

Коэффициент отражения асимптотически стремится к $(+1)$ при увеличении числа цепочек. Коэффициент прозрачности равен $T(\omega_{a0}^*) = 1 - V(\omega_{a0}^*)$. При $N = 1$, $m = 0$ (одномодовый слой) формула (14) дает $V_a(\omega_{a0}^*) = \{1 + R_0/(PR_{a1}^{*(0)})\}^{-1}$. Величина $R_{a1}^{*(0)} \to 0$ при $k_t h \to 0$ и поэтому тангенциальные резонаторы слабо отражают изгибную волну в тонкой пластине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Викторов И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 168 с.
2. *Клюкин И.И.* Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинах при помощи резонансных колебательных систем // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 2. С. 213–219.
3. *Клюкин И.И., Сергеев Ю.Д.* О рассеянии изгибных волн антивибраторами, установленными на пластине // Акуст. журн. 1964. Т. 10. № 1. С. 60–65.
4. *Тютекин В.В., Шкварников А.П.* Синтез и исследование поглотителей изгибных волн в стержнях и пластинах // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 3. С. 441–447.
5. *Лапин А.Д.* Поглощение изгибных волн монопольно-дипольными резонаторами в пластине // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 2. С. 280–282.
6. *Лапин А.Д.* Поглощение нулевых волн Лэмба в упругом слое резонаторами с трением // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 3. С. 347–350.