АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2013, том 59, № 5, с. 552–560

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

УДК 534.2

ВЛИЯНИЕ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА УПРУГИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОЙСТВА МОДЕЛИ ГРАНУЛИРОВАННОЙ НЕКОНСОЛИДИРОВАННОЙ СРЕДЫ

© 2013 г. Н. В. Ширгина, А. И. Коробов, А. И. Кокшайский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,физический факультет

119991 Москва, Ленинские горы

E-mail: natalia.shirgina@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 15.04.2013 г.

Исследовано влияние внешних статических (давления) и динамических (вызванных упругой волной конечной амплитуды) воздействий на линейные и нелинейные упругие свойства гранулированной неконсолидированной среды, которая моделировалась стальными шарами диаметром 2 и 4 мм. Проанализировано уравнение состояния для такой среды с учетом наличия слабо и сильно поджатых контактов между отдельными шарами. Получены выражения для коэффициентов упругости и нелинейных упругих параметров второго и третьего порядков, и экспериментально исследовано влияние внешнего статического давления на их величины. Измерена зависимость скорости упругих волн от внешнего статического давления и от амплитуды зондирующего сигнала. В исследуемой среде наблюдался ряд структурных фазовых переходов, связанных с перестройкой упаковки шаров, вызванных как статическим, так и динамическим воздействием. Структурный фазовый переход сопровождался аномальным изменением нелинейных упругих параметров среды и скорости упругих волн. Полученные результаты проанализированы на основе теории контактного взаимодействия Герца.

Ключевые слова: неконсолидированные гранулированные среды; контакт Герца; генерация гармоник; контактные взаимодействия; скорость упругих волн; структурный фазовый переход; коэффициенты упругости второго, третьего и четвертого порядков.

DOI: 10.7868/S0320791913050158

ВВЕДЕНИЕ

Распространение акустических волн в гранулированных неконсолидированных средах (ГНС) постоянно привлекает исследователей. Это связано как с их интересными физическими свойствами, так и с востребованностью этих исследований для развития методов акустической диагностики геофизических сред [1, 2]. Такие среды имеют зернистую структуру и их упругие свойства существенно отличаются от свойств сплошных сред из того же материала [2]. Линейные и нелинейные свойства зернистых сред во многом зависят от состояния контактов между отдельными гранулами ГНС [3–20]. Исследованием линейных и нелинейных упругих свойств ГНС занимается ряд научных групп, как в России, так и за рубежом. В работе [3] учет фрактальных свойств структуры вещества позволил провести качественное моделирование некоторых характерных особенностей распространения акустического импульса конечной амплитуды через гранулированную среду. Кроме того, в [3] было объяснено аномальное поглощение в области высоких частот при малых амплитудах сигнала. В [4] развита нелинейная теория распространения звука конечной амплитуды, основанная на теории Букингема [5], учитывающая взаимодействие между отдельными гранулами. Получено нелинейное эволюционное уравнение и выведено модельное уравнение для случая плоской волны. Работы [6–8] посвящены исследованию распространения упругих акустических волн в гранулированных средах с точки зрения теории перколяции (или теории протекания), когда сигнал передается от источника к приемнику по перколяционной цепочке контактов между гранулами. В работе [8] показано, что даже при весьма умеренных амплитудах зондирующего сигнала в спектре прошедшей волны присутствуют интенсивные субгармонические составляющие, свидетельствующие о локализации упругой энергии акустических колебаний на отдельных гранулах. Полученный в [8] немонотонный характер зависимости уровня поля в среде от амплитуды возбуждаемого сигнала указывает на существенную роль состояния контактов между гранулами в формировании акустического поля в гранулированной среде. В работах [9–20] значительное внимание уделено исследо-

ванию влияния внешнего воздействия на линейные и нелинейные упругие свойства ГНС. Актуальность этой задачи вызвана тем, что природные зернистые среды в реальных условиях находятся под действием одноосного сжатия, вызванного силой тяжести [9]. Внешнее воздействие приводит к появлению новых интересных физических эффектов в зернистых материалах, например, появляется возможность наблюдения структурного фазового перехода, вызванного внешним статическим давлением [10]. В работе [11] теоретически исследовано влияние упаковки гранулированных сред на ее нелинейные упругие свойства с учетом поведения отдельных контактов между гранулами. Моделировались различные упаковки сферических частиц, которые предполагались идеальными в том смысле, что в процессе деформации число контактов одной частицы с другими предполагалось постоянным, а сами контакты описывались теорией Герца и считались одинаково поджатыми. На основании идеальности упаковок в работе [11] получено уравнение состояния для неконсолидированной структуры. Однако при проведении экспериментальных исследований были обнаружены эффекты, не укладывающиеся в рамки модели идеальной упаковки [12]. Проведенные авторами оценки с учетом переменного числа контактов гранулы с соседними гранулами и разной степени их поджатия позволили удовлетворительно объяснить экспериментальные результаты. В работе [13] рассмотрен ряд механизмов сильной упругой нелинейности в многокомпонентной зернистой среде, к которой приложено внешнее давление. Увеличение упругой нелинейности авторы связывают с наличием слабо нагруженных контактов, увеличивающих нелинейность материала, и появлением группы контактов между отдельными гранулами, которые (контакты) появляются и начинают деформироваться только при достижении некоторого порогового уровня внешней нагрузки. В работах [14, 15] изучена нелинейная динамика упругих волн в упаковке стеклянных гранул. В [14] исследована зависимость амплитуды второй гармоники от амплитуды зондирующей волны и пройденного ею расстояния. Была установлена квадратичная зависимость сигнала второй гармоники от амплитуды сигнала основной частоты. В [15] авторами были обнаружены два режима нелинейного упругого поведения гранулированной среды, являющихся результатом нелинейной динамики контактов между гранулами. При умеренных значениях амплитуды зондирующего сигнала генерация второй и третьей гармоник описывалась теорией контактного взаимодействия Герца. При превышении амплитуды зондирующего сигнала некоторого порогового значения зависимости амплитуд первой и второй гармоник от амплитуды зондирующего сигнала принимали гистерезисный характер (при увеличении, а затем при уменьшении амплитуды зондирующего сигнала). По мнению авторов данный эффект связан с трением между отдельными контактами. В [16] излагаются результаты лабораторных исследований генерации субгармоник и существенного повышения уровня шума, вызванных распространением акустической волны в ГНС. Наблюдающиеся бифуркации, появляющиеся при превышении некоторого критического уровня акустического возбуждения (и переход субгармоник к хаосу) авторы объясняют взаимодействием акустической волны с распределенной системой сильно нелинейных контактов между гранулами. Оценки показывают, что причиной наблюдаемых нелинейных эффектов могут быть слабые контакты, нагруженные как минимум в два раза меньше среднего нагружения контактов [16]. Дополнительные контакты, появляющиеся под действием акустической волны большой амплитуды, могут также приводить к увеличению упругой нелинейности. Эксперименты подтверждают, что нелинейные взаимодействия акустических волн в ГНС очень чувствительны к слабо нагруженным (и ненагруженным) контактам, информацию о которых трудно получить другими экспериментальными методами. В работах [17–20] также указывается на доминирующую роль слабых межзеренных контактов в упругой нелинейности ГНС. В работе [20] авторы отмечают, что системы, состоящие из упаковок упругих шаров, обладают упругой нелинейностью, характерной для консолидированных сред с дефектами.

Задачей данной работы является изучение влияния состояния контактов между отдельными гранулами и размеров гранул на нелинейные упругие свойства ГНС.

2. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ СТРУКТУРЫ ШАРОВ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ГЕРЦА

При исследованиях ГНС мы будем использовать трехмерные модельные среды, состоящие из одинаковых шаров. Теоретическое описание упругих свойств ГНС основывается на задаче о контактном взаимодействии отдельных гранул, описываемым законом Герца [21, 22]. В случае двух сферических гранул одинакового радиуса закон Герца имеет вид:

$$F = \frac{4E^*\sqrt{R}h^{3/2}}{3}, \tag{1}$$

где F – сила, приложенная к шарам, h – взаимное сближение центров шаров, R – радиус шаров, $E^* = E/(1-\nu^2)$ – приведенный модуль Юнга, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона материала шаров. Используя уравнение (1), можно

получить уравнение состояния для одномерной ГНС [10]:

$$\sigma = \frac{4E^*}{3\pi}\varepsilon^{3/2}H(\varepsilon_0). \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon = (h/R) = (h_0 + \tilde{h})/R = \varepsilon_0 + \varepsilon_\sim$ – общая деформация, ε_0 – статическая (появляющаяся за счет внешнего поджатия) и $\varepsilon_\sim$ – переменная (появляющаяся при распространении акустической волны в ГНС) деформации в системе шаров, $H(P, \varepsilon_0)$ – функция Хевисайда, согласно которой напряжение в системе появляется под действием статического давления (P, $\varepsilon_0 > 0$): $H(\varepsilon_0) = 0$ при $P \le 0$, $\varepsilon \le 0$ и $H(\varepsilon_0) = 1$ при $P > 0, \varepsilon > 0$. Далее рассматривается случай $\varepsilon_0 > \varepsilon_\sim$.

В случае трехмерной структуры уравнение состояния будет зависеть от числа контактов каждого шара с его соседями. В зависимости от упаковки число таких контактов может изменяться от 6 до 12. При этом величина статической деформации ε_0 у отдельных контактов одной гранулы может быть различной [11]. Приложение внешнего воздействия (внешнего статического давления или акустической волны большой амплитуды) к системе шаров может изменить упаковку шаров и соотношение между количеством сильно и слабо деформированных контактов. Подобная перестройка аналогична структурным фазовым переходам [10, 23]. Для анализа рассматриваемой ГНС будем считать, что в ней имеется два сорта контактов – сильно и слабо поджатые, при этом общая деформация сильно поджатых контактов будет равна ε, а слабо поджатых контактов – $\mu\varepsilon$, $\mu \ll 1$. Уравнение состояния для ГНС в этом случае запишется следующим образом [17, 24, 25]:

$$\sigma = \left[n\frac{4E^*}{3\pi}\varepsilon^{3/2} + m\frac{4E^*}{3\pi}(\mu\varepsilon)^{3/2}\right]H(\varepsilon_0), \quad (3)$$

где $(m + n) < 12$, n – число сильных, m – число слабых контактов, приходящихся на один шар. Раскладывая (3) в ряд Тейлора и ограничиваясь членами пропорциональными $\varepsilon_\sim^3$, получаем уравнение состояние 3-D системы в виде:

$$\sigma = C_2(\varepsilon_0)\varepsilon_\sim + \frac{1}{2}C_3(\varepsilon_0)\varepsilon_\sim^2 + \frac{1}{6}C_4(\varepsilon_0)\varepsilon_\sim^3, \quad (4)$$

где C_2, C_3, C_4 – эффективные коэффициенты упругости второго, третьего и четвертого порядков системы:

$$C_2 = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon_\sim}\right)_{(\varepsilon=\varepsilon_0)} = \frac{2E^*}{\pi}\sqrt{\varepsilon_0}n\left(1 + \frac{m}{n}\sqrt{\mu}\right)H(\varepsilon_0), \quad (5)$$

$$C_3 = \left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial\varepsilon_\sim^2}\right)_{(\varepsilon=\varepsilon_0)} = \frac{E^*}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}n\left(1 + \frac{m}{n}\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)H(\varepsilon_0), \quad (6)$$

$$C_4 = \left(\frac{\partial^3\sigma}{\partial\varepsilon_\sim^3}\right)_{(\varepsilon=\varepsilon_0)} = -\frac{E^*}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon_0^{3/2}}n\left(1 + \frac{m}{n}\frac{1}{\mu^{3/2}}\right)H(\varepsilon_0). \quad (7)$$

При проведении экспериментов и их анализе удобно контролировать внешнее давление P, приложенное к ГНС. Из (1) можно выразить статическую деформацию ε_0 через внешнее давление P, как $\varepsilon_0(P) = [9P^2\pi^2/16(E^*)^2]^{1/3}$. После подстановки выражения для $\varepsilon_0(P)$ в (5)–(7) зависимость коэффициентов упругости второго, третьего и четвертого порядков в ГНС от давления P будет определяться следующими выражениями:

$$C_2 = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon_\sim}\right)_{(\varepsilon=\varepsilon_0)} = \frac{2E^*}{\pi}n\left(1 + \frac{m}{n}\sqrt{\mu}\right)\left(\frac{3\pi P}{4E^*}\right)^{1/3}H(P), \quad (8)$$

$$C_3 = \left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial\varepsilon_\sim^2}\right)_{(\varepsilon=\varepsilon_0)} = \frac{E^*}{\pi}n\left(1 + \frac{m}{n}\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)\left(\frac{3\pi P}{4E^*}\right)^{-(1/3)}H(P), \quad (9)$$

$$C_4 = \left(\frac{\partial^3\sigma}{\partial\varepsilon_\sim^3}\right)_{(\varepsilon=\varepsilon_0)} = -\frac{E^*}{2\pi}n\left(1 + \frac{m}{n}\frac{1}{\mu^{3/2}}\right)\left(\frac{3\pi P}{4E^*}\right)^{-1}H(P). \quad (10)$$

При экспериментальных исследованиях мы ограничились интервалом изменения внешней статической силы $P < 600$ кПа. Проведенные оценки показывают [26], что при этих давлениях деформации в области контактов остаются упругими, и можно пользоваться теорией Герца для контактного взаимодействия. Коэффициенты упругости 2-го порядка, определяемые упругостью кристаллической решетки, для различных марок сталей лежит в пределах $(2.5–2.7) \times 10^{11}$ Па [28] и практически не зависят от внешнего давления в указанном выше интервале изменений. В то же время аналогичный коэффициент, определяемый из выражения (9), возрастает пропорционально $P^{1/3}$ с увеличением давления и в указанном диапазоне давлений изменяется в интервале $(0.8–1.4) \times 10^9$ Па. Коэффициент упругости 3-го порядка C_3 в ГНС уменьшается пропорционально $P^{-1/3}$ и лежит в интервале $(5.2–1.3) \times 10^{12}$ Па [10], тогда как численные значения коэффициента упругости 3-го порядка, определяемого ангармонизмом кристаллической решетки материала шаров, в различных марках стали находятся в пределах $(3–6) \times \times 10^{11}$ Па [28]. Коэффициент упругости 4-го порядка C_4 при увеличении внешнего давления уменьшается пропорционально $1/P$ и лежит в интервале $(0.1–5) \times 10^{16}$ Па [10]. Как видно из приведенных оценок, коэффициенты упругости 3-го и 4-го порядков в зернистой среде, определяемые герцевской нелинейностью, по крайней мере, на порядок больше упругой нелинейности связанной с ангармонизмом кристаллической решетки. Необходимо отметить, что коэффициенты упругости ГНС в упругой области деформаций определяются в первую очередь не силами межатомного взаимодействия в материале шаров, а силами контактного взаимодействия между отдельными шарами.

3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ЗЕРНИСТОЙ НЕКОНСОЛИДИРОВАННОЙ СРЕДЕ

Для описания распространения упругих волн в ГНС в длинноволновом приближении, когда длина волны $\lambda \gg 2R$, воспользуемся уравнением состояния (4) и уравнением движения:

$$\rho\frac{\partial^2\tilde{h}}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma}{\partial x}, \tag{11}$$

Из совместного решения уравнений (4), (11) можно получить выражение для скорости упругих волн малой амплитуды V в ГНС в зависимости от приложенного к ГНС внешнего давления P:

$$V = \sqrt{\frac{C_2}{\rho}} = \left(\frac{E^*}{\pi}\right)^{1/3}\left(\frac{n}{\rho}\left(1+\frac{m}{n}\sqrt{\mu}\right)\right)^{1/2}(6P)^{1/6}. \tag{12}$$

В случае распространения в ГНС гармонической упругой волны конечной амплитуды, деформация в которой равна $\varepsilon_x = \varepsilon_{x0}\sin(\omega t)$, эффективный коэффициент упругости второго порядка C_2^* с точностью до членов второго порядка малости можно записать в следующем виде:

$$C_2^* = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon_x} = C_2 + C_3\varepsilon_x + \frac{1}{2}C_4\varepsilon_x^2. \tag{13}$$

После подстановки в (13) выражение для деформации $\varepsilon_x = \varepsilon_{x0}\sin(\omega t)$ и усреднения по времени, получим выражение для эффективного модуля упругости второго порядка C_2^*:

$$\left\langle C_2^*\right\rangle = \left\langle C_2 + C_3\varepsilon_{x0}\sin\omega t + \frac{1}{2}C_4(\varepsilon_{x0}\sin\omega t)^2\right\rangle = \\ = C_2 + \frac{1}{4}C_4\varepsilon_{x0}^2. \tag{14}$$

Уравнение (14) позволяет определить зависимость скорости упругих волн в ГНС от амплитуды волны и приложенного к ГНС внешнего давления:

$$V(P,\varepsilon_\chi) = \langle V\rangle = \sqrt{\frac{\left\langle C_2^*\right\rangle}{\rho}} = \sqrt{\frac{C_2}{\rho}}\left(1+\frac{1}{4}C_4\varepsilon_{x0}^2\right)^{1/2} = \\ = V_0\left(1+\frac{C_4\varepsilon_{x0}^2}{8C_2}\right) = V_0\left[1-\left\{\frac{1}{32}\left(\frac{4\pi E^*}{3P}\right)^{4/3}\times\right.\right. \\ \left.\left.\times\left(1+\frac{m}{n}\frac{1}{\mu^{3/2}}\right)\Big/\left(1+\frac{m}{n}\sqrt{\mu}\right)\right\}\varepsilon_{\chi 0}^2\right]H(P), \tag{15}$$

где $V_0 = \sqrt{\frac{C_2}{\rho}}$. Из выражения (15) следует, что изменение скорости упругих волн имеет квадратичную зависимость от амплитуды деформации, определяется знаком коэффициента упругости 4-го порядка C_4 и обратно пропорционально приложенному к ГНС внешнему давлению в степени 4/3: $V \sim (1/P)^{4/3}$.

В случае распространения упругих волн конечной амплитуды в длинноволновом приближении, граничном условии при $x = 0$ $h(x = 0, t) = A_1\sin(\omega t)$ и в приближении заданного поля без учета поглощения и дисперсии решение системы уравнений (4) и (11) известно [29, 30]:

$$\tilde{h} = A_1\sin(\omega t - kx) + A_2\cos[2(\omega t - kx)] + \\ + A_3[\cos[3(\omega t - kx)] + 3\cos(\omega t - kx)], \tag{16}$$

где A_1 – амплитуда основной волны, $A_2 = -\frac{C_3}{C_2}\frac{k^2A_1^2}{8}x = N_2\frac{k^2A_1^2}{8}x$ – амплитуда второй гармоники, $A_3 = \frac{C_4}{C_2}\frac{k^3A_1^3}{24}x = N_3\frac{k^3A_1^3}{24}x$ – амплитуда третьей гармоники, N_2, N_3 – нелинейные параметры второго и третьего порядков зернистой среды, зависимость которых от внешнего давления P определяется следующим образом:

$$N_2 = \frac{C_3}{C_2} = \frac{\left(1+\frac{m}{n}\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)}{2\left(1+\frac{m}{n}\sqrt{\mu}\right)}\left(\frac{3\pi P}{4E^*}\right)^{-2/3}H(P) \sim \frac{A_2}{A_1^2}, \tag{17}$$

$$N_3 = \frac{C_4}{C_2} = -\frac{\left(1+\frac{m}{n}\frac{1}{\mu^{3/2}}\right)}{4\left(1+\frac{m}{n}\sqrt{\mu}\right)}\left(\frac{3\pi P}{4E^*}\right)^{-4/3}H(P) \sim \frac{A_3}{A_1^3}. \tag{18}$$

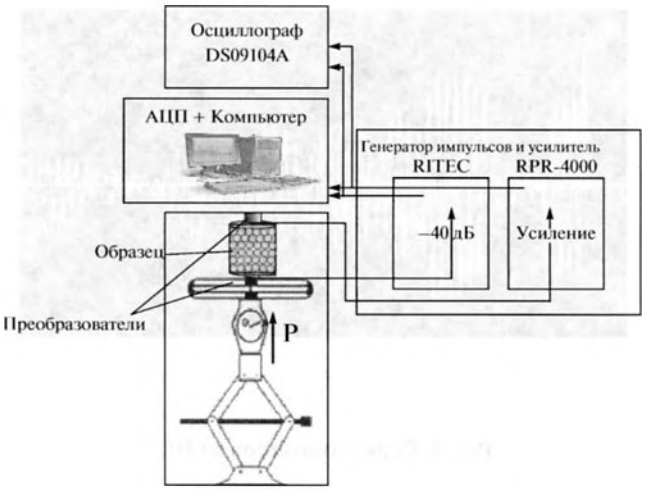

Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И ИССЛЕДУЕМЫЕ ОБРАЗЦЫ

Для исследования упругих свойств ГНС была разработана автоматизированная экспериментальная установка, схема которой приведена на рис. 1. ГНС моделировалась одинаковыми стальными шарами диаметром 2 или 4 мм. Шары помещались в цилиндрическую ячейку из текстолита диаметром 22 мм, высотой 28 мм. К системе шаров с помощью домкрата прикладывалась сила,

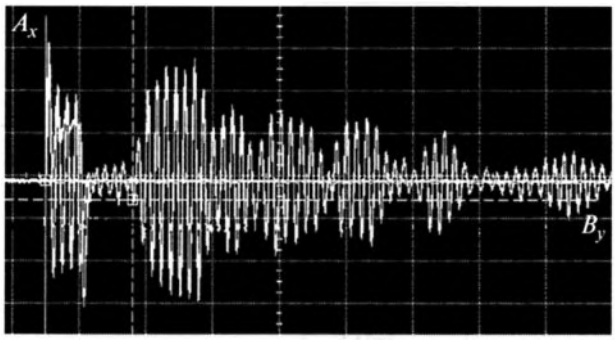

Рис. 2. Серия импульсов в ГНС.

величина которой контролировалась образцовым динамометром. Для проведения измерений использовался автоматизированный ультразвуковой приемо-передающий комплекс RITEC RPR-4000, в котором был реализован импульсный метод измерений. Для возбуждения продольных волн упругих волн использовались преобразователи из пьезокерамики. Прошедшая через ГНС упругая волна регистрировалась широкополосным пьезоэлектрическим преобразователем фирмы MATEC, сигнал с которого поступал для анализа в двулучевой цифровой осциллограф HP 54810a и в автоматизированный ультразвуковой приемо-передающий комплекс RITEC RPR-4000. Исследования нелинейных свойств ГНС проводились двумя методами: спектральным методом, который заключается в измерении спектральных компонент акустической волны конечной амплитуды, прошедшей через исследуемый образец и путем исследования зависимости скорости волны от ее амплитуды.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Предварительно были измерены скорости упругих волн V малой амплитуды в системах шаров диаметром 2 и 4 мм в зависимости от давления P. Измерение скорости проводились импульсным методом на частотах 60 и 120 кГц (рис. 2). Давление в процессе эксперимента изменялось в интервале от 150 до 650 кПа. В этом интервале давлений деформации в области контактов шариков оставались упругими, и мы, как уже отмечалось выше, для анализа результатов эксперимента могли пользоваться теорией Герца.

При увеличении давления от 150 до 650 кПа скорость упругих волн увеличивалась с 450 до 570 м/с. На рис. 3 приведены зависимости скорости упругих волн в ГНС от внешнего статического давления в двойном логарифмическом масштабе для двух образцов ГНС, состоящих из стальных шаров

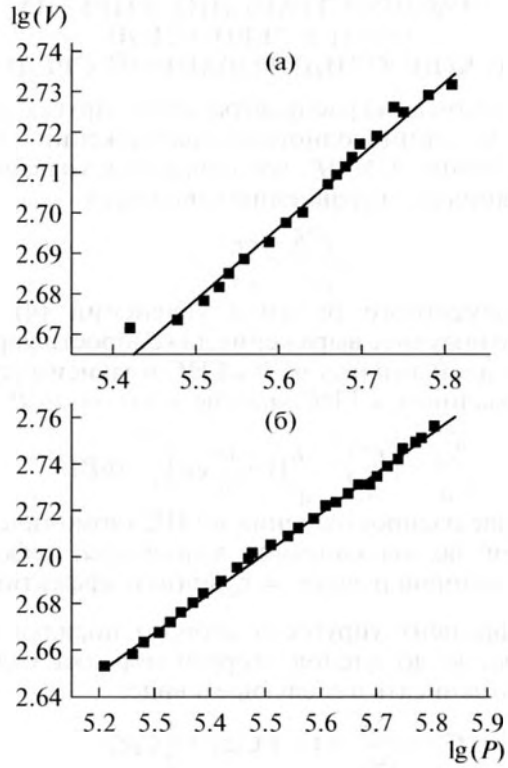

Рис. 3. Зависимость скорости продольной акустической волны от внешнего давления в двойном логарифмическом масштабе: упаковка из шаров диаметром 4 мм (а); упаковка из шаров диаметром 2 мм (б).

диаметром 2 мм (рис. 3а) и 4 мм (рис. 3б). Эти зависимости хорошо аппроксимируются линейной функцией $y = Bx + A$. Коэффициент B равен тангенсу угла наклона аппроксимирующих прямых и позволяет определить степенную зависимость скорости от давления в уравнении (12). Как следует из (12), теоретическое значение $B = 1/6$. Экспериментально полученные значения этого коэффициента для системы ГНС, состоящей из шаров диаметром 4 и 2 мм составили 0.179 ± 0.006 и 0.171 ± 0.002 соответственно, что качественно находится в соответствии с экспериментальными результатами [15, 17] и с результатами теоретического рассмотрения (12).

Также в ГНС экспериментально были исследованы зависимости изменения относительной скорости волны $\Delta V/V_0$ от амплитуды зондирующего сигнала A при различных величинах статического давления P. При этом считалось, что амплитуда деформации ε_{x0} в ГНС пропорциональна амплитуде зондирующего сигнала, подаваемого на излучающий преобразователь. Из уравнения (15)

можно получить уравнение для относительного изменения скорости упругих волн:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\langle V \rangle - V_0}{V_0} = \frac{C_4}{8C_2}\varepsilon_{\chi 0}^2 = -\left\{\frac{1}{32}\left(\frac{4\pi E^*}{3P}\right)^{4/3} H(P) \times \right.$$
$$\left. \times \left(1 + \frac{m}{n}\frac{1}{\mu^{3/2}}\right) \Big/ \left(1 + \frac{m}{n}\sqrt{\mu}\right)\right\}\varepsilon_{\chi 0}^2. \quad (19)$$

Как видно из (19), знак относительного изменения скорости определяется знаком коэффициента упругости 4-го порядка C_4, а его абсолютное значение пропорционально квадрату амплитуды деформации и пропорционально $(1/P)^{4/3}$.

На рис. 4 приведены зависимости изменения относительной скорости волны $\Delta V/V_0$ от амплитуды зондирующего сигнала A при различных величинах статического давления P для упаковок из шаров диаметром 4 мм (рис. 4а) и 2 мм (рис. 4б). Полученные экспериментальные данные достаточно хорошо аппроксимируются зависимостью $\sim \varepsilon_{x0}^2$ при относительно небольших амплитудах зондирующего сигнала. Квадратичная зависимость $\Delta V/V_0$ от амплитуды упругой волны указывает на значительную величину кубической нелинейности в 3-D гранулированной неконсолидированной структуре. С увеличением давления P величина относительного изменения скорости волны от амплитуды сигнала A уменьшалась, что находится в согласии с теоретическим рассмотрением (19).

Следует отметить, что экспериментальные результаты при относительно небольших амплитудах зондирующего сигнала удовлетворительно описываются уравнением (19). Однако при дальнейшем увеличении амплитуды зондирующего сигнала наблюдалась немонотонная зависимость относительного изменения скорости упругих волн в ГНС. Для упаковки шаров диаметром 4 мм при увеличении амплитуды зондирующего сигнала выше 70 В при давлении 60 кПа, а также при увеличении амплитуды зондирующего сигнала выше 90 В при давлении 90 кПа и выше 110 В при давлении 600 кПа изменение относительной скорости происходило скачком (рис. 4а). При этом в упаковке шаров диаметром 2 мм подобное поведение наблюдалось лишь для давления 202 кПа. По нашему мнению это связано с тем, что упругие деформации, создаваемые волной конечной амплитуды, меняли упаковку шаров. Объем ячейки был фиксирован и одинаков для обеих упаковок шаров, поэтому общее количество контактов шаров в системе для четырех и двух миллиметровых шаров значительно отличалось. Это объясняет экспериментальный факт более сильного влияния амплитуды акустической волны на изменение ее скорости для упаковки шаров диаметром 4 мм по сравнению с упаковкой из 2 мм шаров.

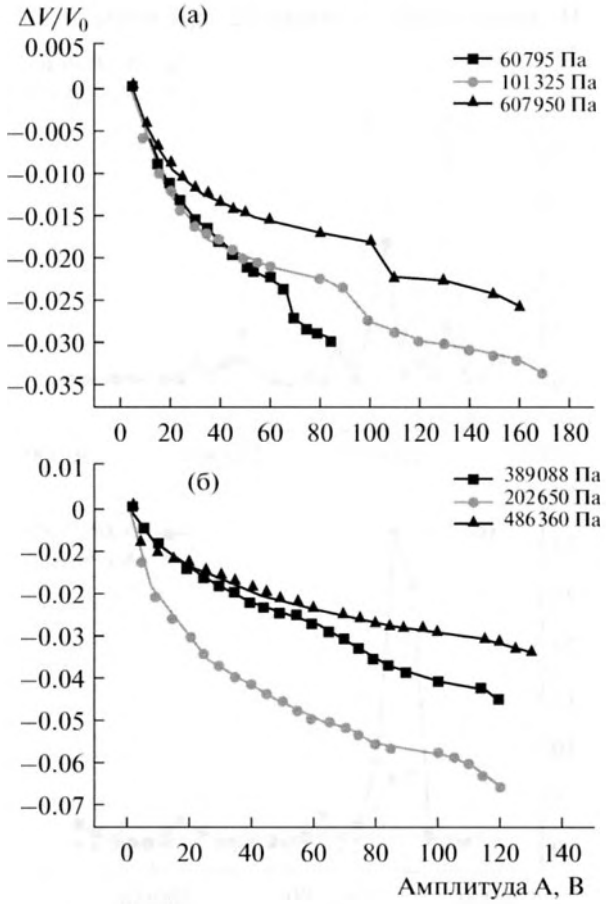

Рис. 4. Относительное изменение скорости $\Delta V/V_0$ в зависимости от амплитуды зондирующего сигнала A при различных значениях давления P для ГНС из шаров: диаметром 4 мм (а); диаметром 2 мм (б).

В спектре прошедшего сигнала конечной амплитуды частотой 60 кГц регистрировались первая, вторая и третья гармоники. Экспериментально измерялись зависимости амплитуды первых трех гармоник упругой волны A_1, A_2, A_3 от величины внешнего давления P для ГНС, состоящей из стальных шаров диаметром 2 мм (рис. 5а) и 4 мм (рис. 5б) при постоянной амплитуде зондирующего сигнала. Внешнее давление P в процессе эксперимента изменялось в пределах от 70 до 350 кПа для ГНС из шаров диаметром 2 мм и от 100 до 600 кПа для ГНС из шаров диаметром 4 мм. Нелинейные параметры $N_2 \sim A_2/(A_1)^2$ и $N_3 \sim A_3/(A_1)^3$, определенные из экспериментально измеренных величин A_1, A_2, A_3 и нормализованные к их значению при минимальном поджатии, в зависимости от величины внешнего давления приведены на рис. 5. Как видно из рис. 5, для ГНС, состоящей из шаров диаметром 2 мм при увеличении внешнего статического давления в интервале (70–90) кПа нелинейные параметры N_2 и N_3 удовлетворительно описывались теоретическими зави-

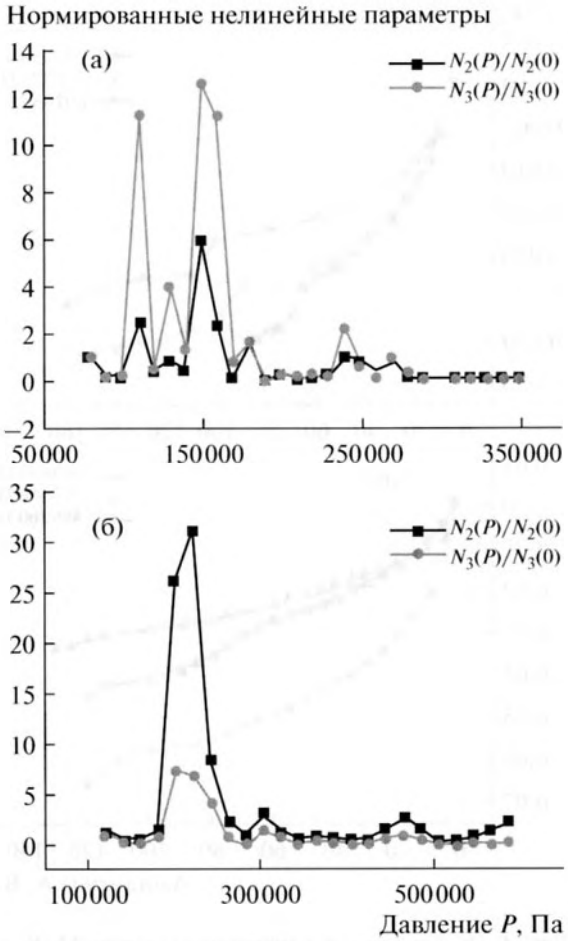

Рис. 5. Зависимость нормированных нелинейных параметров второго и третьего порядков от величины внешнего давления для ГНС из шаров: диаметром 2 мм (а); диаметром 4 мм (б).

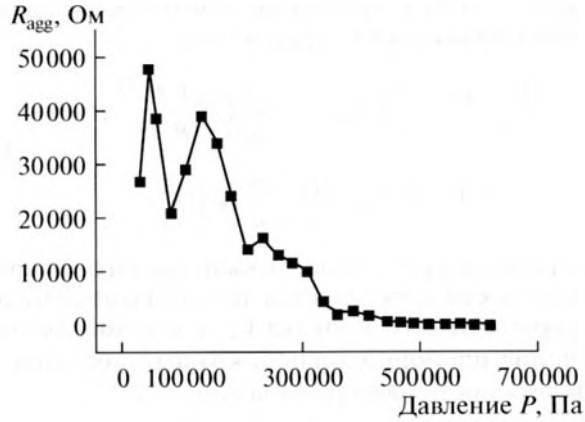

Рис. 6. Электрическое сопротивление ГНС.

симостями (17), (18). При дальнейшем увеличении внешнего статического давления от 90 до 190 кПа наблюдалось аномальное увеличение нелинейных параметров при давлениях 110, 130, 150 кПа. Максимальное увеличение нелинейного параметра второго порядка в рассматриваемом диапазоне давлений составило до 6 раз, а максимальное увеличение нелинейного параметра третьего порядка в рассматриваемом диапазоне давлений составило до 12 раз, что свидетельствует о значительной кубичной нелинейности в рассматриваемой системе. При дальнейшем увеличении давления нелинейность уменьшалась, что находится в соответствии с теоретическими зависимостями (18), (19). Похожее поведение было характерно и для ГНС, состоящей из шаров диаметром 4 мм. При этом аномальный рост нелинейных параметров наблюдался при изменении внешнего давления в интервале от 180 до 250 кПа. Максимальное увеличение нелинейного параметра второго порядка в рассматриваемом диапазоне давлений составило до 30 раз, а максимальное увеличение нелинейного параметра третьего порядка в рассматриваемом диапазоне давлений составило до 8 раз. По нашему мнению аномальное поведение нелинейных упругих параметров связано со структурным фазовым переходом в ГНС, который вызван изменением внешнего давления P. В результате перехода в ГНС изменилось общее количество контактов между шарами, величина поджатия между отдельными контактами и соотношение между количеством сильно и слабо поджатых контактов. Увеличение количества последних привело к увеличению упругой нелинейности ГНС. Для проверки этого предположения была экспериментально измерена зависимость электрического сопротивления ГНС, состоящей из шаров диаметром 2 мм, от внешнего давления P (рис. 6). В случае контакта двух шаров их сопротивление R_i определяется площадью контакта S между ними, $R_i \sim \rho_s/S$, где

$$S = \pi a^2 = \pi\left(\frac{3\pi P R^3}{4E^*}\right)^{2/3}. \qquad (20)$$

Здесь ρ_s – поверхностное электрическое сопротивление материала шаров, a – радиус контакта, определяемый из закона контактного взаимодействия Герца. Следовательно, сопротивление отдельного контакта между шарами R_i зависит от внешнего приложенного к контакту давления по закону [27]:

$$\mathrm{R}_i = \frac{\rho_s}{2\pi}\left(\frac{3\pi R^3 P_i(1-\nu^2)}{2E}\right)^{-2/3}, \qquad (21)$$

где P_i – давление на отдельном контакте. Уменьшенеие P_i приводить к увеличению сопротивления отдельного контакта. Сопротивление исследуемой ГНС с увеличением P будет изменяться вследствие изменения общего числа параллельно

соединенных контактов N и изменения давления P_i на отдельном контакте. Общее сопротивление параллельно соединенных контактов R_{agg} будет определяться выражением:

$$\frac{1}{R_{agg}} \sim \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}. \quad (22)$$

Как следует из выражений (21) и (22), изменение общего количества контактов между шарами, а, следовательно, соотношения между количеством сильно и слабо поджатых контактов, должно повлечь за собой резкое изменение сопротивления.

На экспериментальной зависимости электрического сопротивления R_{agg} ГНС, состоящей из металлических шаров диаметром 2 мм, наблюдалась немонотонная зависимость сопротивления ГНС от внешнего давления P (рис. 6). Скачки электрического сопротивления R_{agg} ГНС происходили приблизительно при тех же величинах внешнего давления P, 100–180 кПа, при которых происходило аномальное увеличение нелинейных параметров ГНС (рис. 5а). Это подтверждает предположение, что немонотонное изменение нелинейных упругих параметров в ГНС связано с изменением упаковки шаров, сопровождающееся изменением соотношения между количеством слабо и сильно поджатых контактов, вызванным структурным фазовым переходом.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проанализировано распространение упругих волн в ГНС на основе уравнения состояния среды, учитывающего наличие слабо и сильно поджатых контактов между отдельными шарами. Получены выражения для коэффициентов упругости и нелинейных упругих параметров второго и третьего порядков. Исследовано влияние внешнего статического давления на величину скорости упругих волн в ГНС. Полученные экспериментальные зависимости находятся в согласии с результатами теоретического рассмотрения. Исследована зависимость скорости упругих волн от амплитуды зондирующего сигнала при фиксированных значениях внешнего давления. Относительное изменение скорости упругих волн квадратично зависело от амплитуды зондирующего сигнала, что находится в хорошем соответствии с теоретическим рассмотрением. Обнаружено, что при превышении амплитуды зондирующего сигнала некоторого значения наблюдалось отклонение от квадратичной зависимости изменения скорости от амплитуды. Это может быть объяснено тем, что упругие деформации в волне меняли упаковку шаров и, как следствие, соотношение между количеством сильно и слабо поджатых контактов.

Исследовано влияние внешнего давления на величину нелинейных упругих параметров в ГНС. Согласно полученным оценкам нелинейные параметры должны монотонно уменьшаться с ростом внешнего давления в системе. Экспериментально полученная зависимость имела немонотонный характер, которая была объяснена структурными фазовыми переходами в ГНС, сопровождающимися перестройкой упаковки шаров и изменением соотношения между сильно и слабо поджатыми контактами. Проведенные эксперименты позволяют сделать вывод о том, что в гранулированной неконсолидированной среде структурные фазовые переходы могут вызываться как статическим, так и динамическим воздействиями.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ-2631.2012.2, гранта Правительства РФ № 11.G34.31.0066, гранта РФФИ № 11-02-00277-а и гранта Правительства РФ № 11.G34.31.0066.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уайт Дж. Э.* Возбуждение и распространение сейсмических волн. М.: Недра, 1986. 261 с.
2. *Руденко О.В.* Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // УФН. 2006. Т. 176. № 1. С. 77–95.
3. *Есипов И.Б., Зосимов В.В., Матвеев К.И.* Распространение акустического импульса конечной амплитуды в гранулированной среде // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 5. С. 648–653.
4. *Наугольных К.А., Есипов И.Б.* Распространение нелинейной звуковой волны в неконсолидированной гранулированной среде // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 6. С. 822–828.
5. *Buckingham M.J.* Theory of acoustic attenuation, dispersion, and pulse propagation in unconsolidated granular materials including marine sediments // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 102. № 5. P. 2579–2596.
6. *Hernán A. Makse D.L., Johnson P.A., Lawrence M.S.* Packing of Compressible Granular Materials // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. № 18. P. 4160–4163.
7. *Hidalgo R.C., Grosse Ch.U., Kun F., Reinhardt H.W., Herrmann H.J.* Evolution of Force Chains in Compressed Granular Media // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 205501-1–205501-4.
8. *Баженов Е.Д., Вильман А.Н., Есипов И.Б.* Флуктуации акустического поля в гранулированной среде // Акуст. журн. 2005. Т. 51. Приложение. С. 46–52.
9. *Paul A. Johnson P.A., Xiaoping Jia.* Nonlinear dynamics, granular media and dynamic earthquake triggering // Nature. 2005. V. 437. C. 871–874.
10. *Коробов А.И., Бражкин Ю.А., Ширгина Н.В.* Нелинейные упругие свойства модели одномерной гранулированной неконсолидированной структуры // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 1. С. 103–111.
11. *Беляева И.Ю., Зайцев В.Ю., Островский Л.А.* Нелинейные акустоупругие свойства зернистых сред // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 1. С. 25–32.

12. *Беляева И.Ю., Зайцев В.Ю., Тиманин Е.М.* Экспериментальное исследование упругих нелинейных свойств зернистых сред с неидеальной упаковкой // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 6. С. 893–898.

13. *Беляева И.Ю., Зайцев В.Ю.* Упругие свойства микронеоднородных сред с иерархической структурой // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 5. С. 594–599.

14. *Brunet T., Johnson P.A.* Nonlinear Propagation of Pulsed Ultrasonic Waves in Stressed Granular Solids // French Acoustical Society 2006 Meeting, Toulouse, France.

15. *Brunet T., Xiaoping Jia, Johnson P.A.* Transitional nonlinear elastic behaviour in dense granular media // Geophys. Res. Lett. 2008. V. 35. L19308. doi:10.1029/2008GL035264.

16. *Tournat V., Gusev V.E., Castagnede B.* Subharmonics and noise excitation in transmission of acoustic wave through unconsolidated granular medium // Phys. Lett. 2004. A 326. P. 340–348.

17. *Зайцев В.Ю., Назаров В.Е., Турна В., Гусев В.Э., Кастаньеде Б.* Экспериментальное исследование нелинейных акустических эффектов в зернистых средах // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 5. С. 633–644.

18. *Zaitsev V.Yu., Richard P., Delannay R., Tournat V., Gusev V.E.* Pre-avalanche structural rearrangements in the bulk of granular medium: Experimental evidence // EPL. 2008. V. 83.

19. *Kiesgen de Richter S., Zaitsev V.Yu., Richard P., Delannay R., Caer G.Le., Tournat V.* Experimental evidence of ageing and slow restoration of the weak-contact conguration in tilted 3D granular packings // J. Stat. Mech. 2010. P. 11023. doi:10.1088/1742-5468/2010/11/P11023

20. *Tournat V., Gusev V.E.* Acoustics of Unconsolidated "Model" Granular Media: An Overview of Recent Results and Several Open Problems // Acta Acustica. 2010. V. 96. P. 208–224.

21. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1978. 293 с.

22. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Наука, 1989. 509 с.

23. *Струков Б.А., Леванюк А.П.* Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах. М.: Наука, 1983. 240 с.

24. *Коробов А.И., Ширгина Н.В., Кокшайский А.И.* Экспериментальные исследования нелинейных эффектов при распространении упругих волн в 3-D гранулированной неконсолидированной среде // Сб. трудов научн. конф. сессии совета РАН по акустике и XXV сессии РАО. М.: ГЕОС, 2012. Т. 1. С. 184–188.

25. *Korobov A., Shirgina N., Kokshaiskiy A.* The influence of external factors on the elastic properties of 3-D unconsolidated granular medium // Proceed. Meet. Acoust. 2012. V. 16. P. 045017.

26. *Korobov A.I., Brazhkin Yu.A., Sovetskaya E.S.* Characteristic Features of Elastic Wave Propagation in a One-Dimensional Model of an Unconsolidated Medium // Acoust. Phys. 2010. V. 56. № 4. P. 446–452.

27. *Korobov A.I., Brazhkin Yu.A., Sovetskaya E.S.* Linear and nonlinear acoustical properties of one-dimensional granular media with Hertz nonlinearity // Proceedings XIX session RAS. M.: GEOS, 2007. V. I. P. 29–32.

28. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 549 с.

29. *Баллад Е.М., Коршак Б.А., Можаев В.Г., Солодов И.Ю.* Генерация третьей гармоники и акустическая нелинейность высших порядков в твердых телах // Вест. МГУ. 2001. С. 3. № 6. С. 44–48.

30. *Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир, 1972. 542 с.