

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ
АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.2

ФАЗОВЫЕ СКОРОСТИ ПЛОСКИХ ВОЛН В ТРУБЕ С НЕРАВНОМЕРНОЙ
СКОРОСТЬЮ ПОТОКА ВДОЛЬ РАДИУСА

© 2013 г. В. М. Буторин

Юго-Западный государственный университет
305040 Курск, ул. 50 лет Октября 94

E-mail: bvmwind@mail.ru

Поступила в редакцию 24.05.2012 г.

Работа посвящена исследованию фазовых скоростей плоских волн в трубе, заполненной движущейся акустической средой при различных законах изменения скоростей потока среды вдоль радиуса трубы. Решение волнового уравнения проведено методом дискретизации, при котором весь объем трубы разбивался на отдельные цилиндры, в каждом из которых скорость потока среды считалась постоянной, что в итоге позволило волновую задачу свести к решению уравнений Гельмгольца в каждом цилиндре. На основе удовлетворения краевым условиям на границах соседних цилиндров была записана однородная система линейных алгебраических уравнений, позволяющая с помощью матриц рассеяния получить простое дисперсионное уравнение для определения фазовых скоростей плоских волн. Исследовалась устойчивость численного решения дисперсионного уравнения по отношению к количеству цилиндров. Получены и проанализированы численные результаты расчета фазовых скоростей плоских квазиоднородной и неоднородных волн в трубе для различных скоростей движущейся среды и различных законов изменения скорости потока среды вдоль радиуса. Показано, что изменение фазовой скорости однородной плоской волны в трубе, связанное с движением среды, равно средней скорости потока среды для различных законов изменения скорости от радиуса трубы. Для неоднородных плоских волн приращение фазовой скорости превышает среднюю скорость потока в несколько раз и зависит как от закона распределения амплитуды волны по радиусу, так и от закона изменения скорости потока по радиусу.

Ключевые слова: плоские волны, фазовая скорость, акустическая среда, труба, поток, неравномерная скорость.

DOI: 10.7868/S032079191306004X

ВВЕДЕНИЕ

При теоретических исследованиях акустических волн в трубах, заполненных газообразными или жидкими акустическими средами, обычно предполагалось, что заполняющее трубу вещество либо неподвижно, либо скорость движения этого вещества вдоль трубы одинакова во всех точках поперечного сечения [1–6]. В реальных системах из-за трения движущегося вещества о стенки трубы продольная скорость этого вещества максимальна на оси трубы и минимальна возле его стенок. Изменение скорости потока вещества вдоль радиуса трубы естественно оказывает влияние на все типы акустических волн, которые могут возбуждаться в трубе. Наибольший прикладной интерес, с точки зрения создания электронных приборов учета количества вещества, переносимого по трубе, представляют плоские волны [7, 8]. Поэтому в данной работе мы исследуем зависимость фазовых скоростей плоских волн в трубах, заполненных различными движущимися акустическими средами, при различных законах изменения скорости потока вдоль радиу-

са трубы. Для расчета фазовых скоростей плоских волн в трубе, когда скорость среды в трубе зависит от радиуса, используется метод дискретизации всего объема трубы на отдельные цилиндры, в каждом из которых продольная скорость акустической среды постоянна.

СЛОИСТАЯ АКУСТИЧЕСКАЯ СРЕДА
В ТРУБЕ С РАЗЛИЧНОЙ СКОРОСТЬЮ
ДВИЖЕНИЯ СЛОЕВ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Акустические волны в трубе, заполненной движущейся акустической средой, когда скорость среды зависит от радиуса, удовлетворяют следующему волновому уравнению относительно потенциала скорости $\phi(\vec{r}, t)$ [9]

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{v^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{2v}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

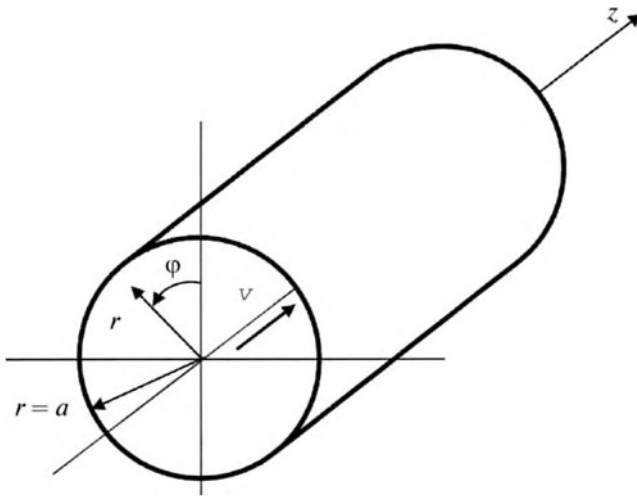


Рис. 1. Цилиндрическая система координат.

где \vec{r} – радиус-вектор, определяемый значениями цилиндрических координат r, φ, z, t – время, $v(r)$ – скорость среды в направлении оси z, c_0 – скорость звука в неподвижной среде (рис. 1). Для гармонического волнового процесса, представляя потенциал скорости в виде

$$\phi(\vec{r}, t) = F(\vec{r}) \exp(i\omega t), \tag{2}$$

получаем следующее волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + [1 - M^2(r)] \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - 2ikM(r) \frac{\partial F}{\partial z} + k^2 F = 0, \tag{3}$$

где $F(r, \varphi, z)$ – пространственная составляющая потенциала скорости, зависящая от цилиндрических координат, $M(r) = v(r)/c_0$ – число Маха, $v(r)$ – скорость среды в направлении оси $z, k = \omega/c_0$ – волновое число, $\omega = 2\pi f$ – угловая частота, f – частота. Представляя решение $F(r, \varphi, z)$ в виде

$$F(r, \varphi, z) = F_{\perp}(r, \varphi) \exp(-i\beta z), \tag{4}$$

получаем уравнение для плоских волн

$$\nabla_{\perp}^2 F_{\perp}(r, \varphi) + \chi^2(r) F_{\perp}(r, \varphi) = 0, \tag{5}$$

в котором поперечное волновое число $\chi(r)$ зависит от радиуса

$$\chi(r)^2 = [k - \beta M(r)]^2 - \beta^2, \quad M(r) = v(r)/c_0, \tag{6}$$

где β – коэффициент фазы соответствующей волны. Отметим, что при некоторых значениях r поперечное волновое число $\chi(r)$ может даже равняться нулю. В соответствии с (6) все типы плоских волн в трубе с подвижной акустической средой, когда скорость среды зависит от радиуса, также будут функциями радиуса, т.е. изменяться в направлении перпендикулярном направлению своего распространения. Поэтому в трубе с подвижной акустической средой плоские однородные волны, у которых $\chi(r) \equiv 0$, существовать не могут, а могут существовать только плоские квазиоднородные волны.

Так как получить аналитическое решение уравнения (5) в общем случае не возможно, то будем его решать численно, воспользовавшись методом дискретизации. Разобьем весь объем трубы на цилиндрические слои с толщиной стенки $\Delta r = a/J$ и внешним радиусом $r_j = j\Delta r, j = 1, 2, \dots, J$ (рис. 2). Будем считать, что в каждом из таких слоев скорость акустической среды не зависит от радиуса r и равна v_j , где j – номер слоя. Таким образом, исходная

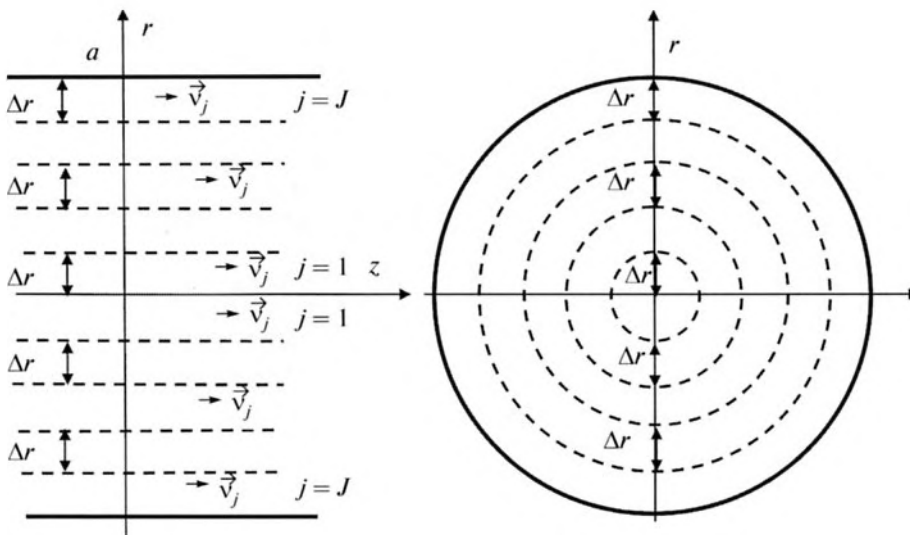


Рис. 2. Слоистая структура акустической среды, движущейся по трубе.

волновая задача с непрерывным изменением скорости среды по радиусу трубы заменяется волновой задачей с дискретным изменением скорости среды по радиусу трубы, т.е. строится дискретная математическая модель, описывающая собственные волны в трубе с подвижной акустической средой. Такая дискретная модель справедлива для ламинарного течения жидкости, когда соседние слои не перемешиваются друг с другом.

На границе между слоями скорость акустической среды претерпевает скачок, поэтому уравнения, а следовательно и условия распространения акустической волны, будут скачком изменяться при переходе от данного слоя. Определим граничные условия на границе соседних слоев с учетом ламинарного течения жидкости в каждом из этих слоев.

Известно, что на границе раздела двух акустических сред непрерывны нормальные к границе смещения и акустические давления, см. например, [1, 3, 10–12]

$$\xi_{n1} - \xi_{n2} = 0, \quad p_1 - p_2 = 0, \quad (7)$$

где ξ_{n1} и ξ_{n2} – нормальные к границе раздела компоненты смещений в первой и во второй средах, p_1 и p_2 – акустические давления в первой и второй средах. На основании соотношений, связывающих акустическую скорость и звуковое давление с потенциалом скорости [1, 9]

$$\vec{v} = -\text{grad} \phi(\vec{r}, t), \quad p = \rho \frac{d\phi(\vec{r}, t)}{dt}, \quad (8)$$

где \vec{v} – акустическая скорость, ρ – плотность среды, из граничных условий (7) для произвольных значений времени t и Δt можем записать

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \phi_j(\vec{r}, t)}{\partial r} dt - \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \phi_{j+1}(\vec{r}, t)}{\partial r} dt = 0, \quad (9)$$

а также

$$\rho_j \frac{d\phi_j(\vec{r}, t)}{dt} - \rho_{j+1} \frac{d\phi_{j+1}(\vec{r}, t)}{dt} = 0, \quad (10)$$

где $\phi_j(\vec{r}, t)$ и $\phi_{j+1}(\vec{r}, t)$ – потенциалы скоростей в j и $j + 1$ слоях движущейся акустической среды, $j = 1, 2, \dots, J$.

Решение уравнения (1), согласно (2) и (4), записывается в виде плоской волны, имеющей один и тот же коэффициент фазы β и разную зависимость от радиуса в каждом j цилиндрическом слое, $\phi_j(\vec{r}, t) = F_j(r, \varphi) \exp(i\omega t - i\beta z)$. С учетом этого из (9) получаем следующее граничное условие [13]

$$(i\omega - i\beta v_j)^{-1} \frac{\partial \phi_j(\vec{r}, t)}{\partial r} = (i\omega - i\beta v_{j+1})^{-1} \frac{\partial \phi_{j+1}(\vec{r}, t)}{\partial r}, \quad (11)$$

где v_j и v_{j+1} – скорости потока в j и $j + 1$ слоях движущейся акустической среды. В случае однородной акустической среды и малых амплитуд колебаний можно записать $\rho_j \approx \rho_0$ и $\rho_{j+1} \approx \rho_0$, где ρ_0 – плотность невозмущенной движущейся среды. Поэтому на ос-

новании изложенного из уравнения (10) получаем второе граничное условие

$$(i\omega - i\beta v_j) \phi_j(\vec{r}, t) = (i\omega - i\beta v_{j+1}) \phi_{j+1}(\vec{r}, t). \quad (12)$$

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПЛОСКИХ ВОЛН В ТРУБЕ С ПОСЛОЙНО ДВИЖУЩЕЙСЯ АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ

В соответствии с дискретной моделью волны в каждом слое движущейся акустической среды удовлетворяют волновому уравнению для плоских волн (3) со своим числом Маха M_j . Как уже отмечалось выше, решение этого однородного уравнения в каждом j слое будем искать в виде

$$F(r, \varphi, z) = F_j(r, \varphi) \exp(-i\beta z), \quad (13)$$

где функция $F_j(r, \varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{\perp}^2 F_j(r, \varphi) + \chi_j^2 F_j(r, \varphi) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (14)$$

с поперечными волновыми числами χ_j

$$\chi_j^2 = (k - \beta M_j)^2 - \beta^2, \quad M_j = v_j / c_0, \quad (15)$$

$$\chi_j = \sqrt{(k - \beta M_j)^2 - \beta^2}.$$

Решение уравнения (14) запишем как

$$F_j(r, \varphi) = R_j(r) \Phi_j(\varphi), \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} R_j(r) &= C_j J_m(\chi_j r), \quad j = 1, \quad 0 \leq r \leq \Delta r, \\ R_j(r) &= C_j J_m(\chi_j r) + D_j N_m(\chi_j r), \\ & \quad j = 2, 3, \dots, J, \quad (j - 1)\Delta r \leq r \leq jr, \\ \Phi_j(\varphi) &= \cos(m\varphi), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь C и D – некоторые константы, $J_m(\chi r)$ и $N_m(\chi r)$ – цилиндрические функции Бесселя и Неймана m -го порядка [14–16].

На границах слоев должны выполняться граничные условия: непрерывность акустического потенциала (12) и его частной производной по радиусу (11). С учетом (2), (16) и (17) эти граничные условия переписываются в виде

$$k_j R_j(r_j) = k_{j+1} R_{j+1}(r_j), \quad \frac{1}{k_j} \frac{\partial R_j(r_j)}{\partial r} = \frac{1}{k_{j+1}} \frac{\partial R_{j+1}(r_j)}{\partial r}, \quad (18)$$

$$j = 1, 2, \dots, J - 1,$$

где $k_j = k - \beta M_j$, $r_j = j\Delta r$. К граничным условиям (18) необходимо добавить граничные условия на стенках трубы [1, 10]

$$k_j \frac{\partial R_j(a)}{\partial r} = 0. \quad (19)$$

В результате для описания собственных волн трубы, заполненной движущейся акустической средой, получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений с ленточной матрицей относительно неизвестных амплитуд C_j и D_j

$$\begin{aligned} & k_j [C_j J_m(\chi_j r_j) + D_j N_m(\chi_j r_j)] - \\ & - k_{j+1} [C_{j+1} J_m(\chi_{j+1} r_j) + D_{j+1} N_m(\chi_{j+1} r_j)] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\chi_j}{k_j} \left[C_j J'_m(\chi_j r_j) + D_j N'_m(\chi_j r_j) \right] - \\ & - \frac{\chi_{j+1}}{k_{j+1}} \left[C_{j+1} J'_m(\chi_{j+1} r_j) + D_{j+1} N'_m(\chi_{j+1} r_j) \right] = 0, \\ & \left[C_j J'_m(\chi_j a) + D_j N'_m(\chi_j a) \right] = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

$j = 1, 2, \dots, J - 1; D_1 = 0.$

Здесь введена амплитуда $D_1 = 0$ для того, чтобы объединить уравнения, записанные на границе первого слоя, с уравнениями, записанными на границах остальных слоев. Система уравнений (20) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Отсюда получаем следующее дисперсионное уравнение для расчета собственных волновых чисел $\beta(k, v(r))$ (коэффициентов фазы)

$$\text{Det} \Delta_j(\beta(k, v(r))) = 0, \tag{21}$$

где Δ_j – определитель J порядка, β – искомый коэффициент фазы волны, $k = \omega/c_0$ – волновое число в неподвижной среде, c_0 – скорость звука в неподвижной среде, $v(r)$ – изменение скорости акустической среды по радиусу трубы. Фазовая скорость v_ϕ этих собственных плоских волн определяется формулой

$$v_\phi(k, v(r)) = \frac{\omega}{\beta(k, v(r))} = c_0 \frac{k}{\beta(k, v(r))}. \tag{22}$$

Для получения более простого дисперсионного уравнения, чем уравнение (21), воспользуемся системой уравнений (20). Выразим коэффициенты C_{j+1} и D_{j+1} через коэффициенты C_j, D_j

$$\begin{pmatrix} C_{j+1} \\ D_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}^j & S_{12}^j \\ S_{21}^j & S_{22}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_j \\ D_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, J - 1; \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} S_{11}^j &= \frac{(k_j/k_{j+1}) J_m(\chi_j r_j) N'_m(\chi_{j+1} r_j) - (\chi_j/\chi_{j+1}) / (k_j/k_{j+1}) J'_m(\chi_j r_j) N_m(\chi_{j+1} r_j)}{J_m(\chi_{j+1} r_j) N'_m(\chi_{j+1} r_j) - J'_m(\chi_{j+1} r_j) N_m(\chi_{j+1} r_j)}, \\ S_{12}^j &= \frac{(k_j/k_{j+1}) N_m(\chi_j r_j) N'_m(\chi_{j+1} r_j) - (\chi_j/\chi_{j+1}) / (k_j/k_{j+1}) N'_m(\chi_j r_j) N_m(\chi_{j+1} r_j)}{J_m(\chi_{j+1} r_j) N'_m(\chi_{j+1} r_j) - J'_m(\chi_{j+1} r_j) N_m(\chi_{j+1} r_j)}, \\ S_{21}^j &= \frac{(\chi_j/\chi_{j+1}) / (k_j/k_{j+1}) J_m(\chi_{j+1} r_j) J'_m(\chi_j r_j) - (k_j/k_{j+1}) J'_m(\chi_{j+1} r_j) J_m(\chi_j r_j)}{J_m(\chi_{j+1} r_j) N'_m(\chi_{j+1} r_j) - J'_m(\chi_{j+1} r_j) N_m(\chi_{j+1} r_j)}, \\ S_{22}^j &= \frac{(\chi_j/\chi_{j+1}) / (k_j/k_{j+1}) J_m(\chi_{j+1} r_j) N'_m(\chi_j r_j) - (k_j/k_{j+1}) J'_m(\chi_{j+1} r_j) N_m(\chi_j r_j)}{J_m(\chi_{j+1} r_j) N'_m(\chi_{j+1} r_j) - J'_m(\chi_{j+1} r_j) N_m(\chi_{j+1} r_j)}. \end{aligned} \tag{24}$$

– коэффициенты квадратной матрицы S^j . Выражая амплитуды C_j, D_j с помощью формулы (23) через коэффициенты C_{j-1}, D_{j-1} и т. д., можно записать

$$\begin{pmatrix} C_j \\ D_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$ – элементы квадратной матрицы второго порядка S , которая равна произведению $(J - 1)$ матриц $S^j, j = 1, 2, \dots, J - 1$. С учетом того, что $D_1 = 0$, из (25) имеем

$$C_j = S_{11} C_1, \quad D_j = S_{21} C_1. \tag{26}$$

Подставляя (26) в последнее уравнение (20), из условия, что $C_1 \neq 0$ и $\chi_j \neq 0$, получаем следующее дисперсионное уравнение для расчета собственных волновых чисел β

$$S_{11} J'_m(\chi_j a) + S_{21} N'_m(\chi_j a) = 0, \tag{27}$$

$$\chi_j = \sqrt{(k - \beta M_j)^2 - \beta^2}, \quad M_j = v_j/c_0.$$

При выполнении неравенства

$$\beta > k/(1 + M_j), \quad j = 1, 2, \dots, J \tag{28}$$

квадрат поперечного волнового числа χ_j из (15) для соответствующего слоя принимает отрицательное значение

$$\begin{aligned} \chi_j^2 &= (k - \beta M_j)^2 - \beta^2 = -\bar{\chi}_j^2, \\ \bar{\chi}_j &= \sqrt{\beta^2 - (k - \beta M_j)^2}, \quad M_j = v_j/c_0, \\ & j = 1, 2, \dots, J. \end{aligned} \tag{29}$$

В результате решение (17) в j -м слое при выполнении условия (28) запишется в виде

$$\begin{aligned} F_j(r) &= C_j I_m(\bar{\chi}_j r), \quad j = 1, \quad 0 \leq r \leq \Delta r, \\ F_j(r) &= C_j I_m(\bar{\chi}_j r) + D_j K_m(\bar{\chi}_j r), \quad j = 2, 3, \dots, J, \\ & (j - 1)\Delta r \leq r \leq j\Delta r, \end{aligned} \tag{30}$$

где $I_m(\bar{\chi}_j r)$ – модифицированная функция Бесселя, $K_m(\bar{\chi}_j r)$ – функция Макдональда [14–16]. Формулы (30) отличаются от формул (17) тем, что в них функция Бесселя $J_m(\chi_j r)$ заменена на модифицированную функцию Бесселя $I_m(\bar{\chi}_j r)$, а функция Неймана $N_m(\chi_j r)$ – на функцию Макдо-

Таблица 1

| $m = 0, \chi_j \approx 0, j = 1, 2, \dots, J$ | | | | | |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| J | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| $v_\phi, \text{ м/с}$ | 1500.4321 | 1500.4661 | 1500.4774 | 1500.4831 | 1500.4865 |
| J | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
| $v_\phi, \text{ м/с}$ | 1500.4888 | 1500.4904 | 1500.4917 | 1500.4926 | 1500.4934 |

нальда $K_m(\bar{\chi}_j r)$. Поэтому при выполнении условия (28) аналогичную замену необходимо выполнить в формулах (20), (24), а также такую же замену осуществить в дисперсионном уравнении (27). В результате получаем дисперсионное уравнение

$$S_{11} I'_m(\bar{\chi}_j a) + S_{21} K'_m(\bar{\chi}_j a) = 0, \tag{31}$$

$$\bar{\chi}_j = \sqrt{\beta^2 - (k - \beta M_j)^2}.$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВЫХ СКОРОСТЕЙ ПЛОСКИХ ВОЛН В ТРУБЕ С ПОДВИЖНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ

В реальных системах движущаяся акустическая среда в трубе имеет максимум скорости в центре трубы и нулевую скорость возле стенок трубы за счет трения среды о стенку, в частности, такому требованию удовлетворяет следующий закон изменения скорости потока среды вдоль радиуса трубы

$$v_j = v \left[1 - (r_j/a)^q \right] = v \left[1 - (j/J)^q \right], \tag{32}$$

$j = 1, 2, \dots, J; \quad q = 1, 2, \dots,$

где v – скорость среды на оси трубы, j – номер слоя, J – количество слоев. Чтобы провести теоретическое исследование поведения плоских волн для различных параметров акустической среды, геометрических размеров трубы и частоты необходимо провести расчеты фазовой скорости v_ϕ при конкретных значениях этих параметров. С этой целью численно решались методом бисекции либо уравнение (27) при выполнении условия $\beta < k/(1 + M_j)$, либо уравнение (31) при выполнении условия $\beta > k/(1 + M_j)$.

Вначале проводилось исследование сходимости результатов расчета фазовых скоростей плоских волн в зависимости от количества цилиндрических слоев J , на которые был разбит весь объем среды. В табл. 1 приведены значения фазовой скорости v_ϕ квазиоднородной плоской волны (азимутальный индекс $m = 0$, поперечные волновые числа $\chi_j \approx 0, j = 1, 2, \dots, J$), рассчитанные для трубы радиуса $a = 0.015$ м, длины волны в неподвижной среде $\lambda = 0.075$ м, скорости звука в неподвижной среде $c_0 = 1500$ м/с (скорость звука в во-

де), максимальной скорости среды на оси трубы $v = 1$ м/с для закона изменения скорости по слоям: $v_j = v \left[1 - (j/J)^2 \right], j = 1, 2, \dots, J$. Из приведенных результатов следует, что если при увеличении количества слоев от $J = 10$ до $J = 20$ фазовая скорость квазиоднородной плоской волны изменяется в шестой значащей цифре, то при изменении от $J = 40$ до $J = 50$ фазовая скорость изменяется в седьмой значащей цифре, а при изменении от $J = 90$ до $J = 100$ – в седьмой–восьмой значащей цифре.

Прикладной интерес представляет не абсолютное значение фазовой скорости $v_\phi = c_0 k / \beta(k, v(r))$ квазиоднородной плоской звуковой волны в трубе, а значение абсолютного приращения фазовой скорости волны в трубе, заполненной движущейся акустической средой, по сравнению с фазовой скоростью волны в трубе, когда акустическая среда в ней неподвижна

$$\Delta v_\phi = v_\phi(k, v(r)) - c_0. \tag{33}$$

Согласно данным табл. 1 при $J = 20$ имеем $\Delta v_\phi = 0.4661$ м/с, при $J = 50$ – $\Delta v_\phi = 0.4865$ м/с, а при $J = 100$ – $\Delta v_\phi = 0.4934$ м/с. Таким образом, при разбиении всего объема трубы на 50 и более слоев результаты расчета приращения фазовой скорости по предложенной дискретной модели будут отличаться от результатов для непрерывной математической модели не более чем на 2%.

Данные табл. 2 рассчитаны для неоднородной плоской волны (азимутальный индекс $m = 1$, поперечные волновые числа $\chi_j \approx 1.84, j = 1, 2, \dots, J$), при следующих значениях: радиуса трубы $a = 0.01$ м, длины волны в неподвижной среде $\lambda = 0.03$ м, скорости звука в неподвижной среде $c_0 = 330$ м/с (скорость звука в воздухе), максимальной скорости среды на оси трубы $v = 1$ м/с и законом изменения скорости по слоям $v_j = v \left[1 - (j/J)^{10} \right], j = 1, 2, \dots, J$. С учетом того, что фазовая скорость неоднородной плоской волны в неподвижной среде $v_\phi = 692.3514$ м/с, сходимость численных результатов для приращения фазовой скорости этой волны, связанного с движением среды, примерно такая же, как и для квазиоднородной плоской вол-

Таблица 2

| $m = 1, \chi_j \approx 1.84, j = 1, 2, \dots, J$ | | | | | |
|--|----------|----------|----------|----------|----------|
| J | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| $v_\phi, \text{ м/с}$ | 696.1627 | 696.2941 | 696.3330 | 696.3516 | 696.3625 |
| J | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
| $v_\phi, \text{ м/с}$ | 696.3697 | 696.3747 | 696.3785 | 696.3814 | 696.3837 |

ны. Учитывая, что количество вычислений при решении дисперсионных уравнений (27), (31) пропорционально количеству слоев J , а не J^3 (если бы решалось дисперсионное уравнение (21)), то затраты времени при учете 50 и даже 100 слоев при численном решении уравнений (27), (31) будут составлять не более десятых долей секунды. Поэтому для повышения точности вычислений во всех дальнейших расчетах учитывалось не менее 50 акустических слоев по радиусу трубы.

На рис. 3 приведены распределения скорости акустической среды (пунктирная линия) и приращения фазовой скорости плоской квазиоднородной волны (сплошная линия) вдоль радиуса трубы для различных законов изменения скорости

акустической среды в трубе: $v(r) = v[1 - (r/a)^q]$, $q = 1, 2, \dots$. Расчеты проводились при следующих параметрах: радиусе трубы $a = 0.015$ м, длине волны в неподвижной среде $\lambda = 0.075$ м, скорости звука в неподвижной среде $c_0 = 1500$ м/с, максимальной скорости среды на оси трубы $v = 1$ м/с. Видно, что фазовая скорость плоской квазиоднородной волны не зависит от радиуса; приращение фазовой скорости волны тем больше, чем однороднее распределение скорости акустической среды по радиусу.

Для радиуса трубы $a = 0.015$ м, длины волны в неподвижной среде $\lambda = 0.075$ м, скорости звука в неподвижной среде $c_0 = 1500$ м/с приведены в

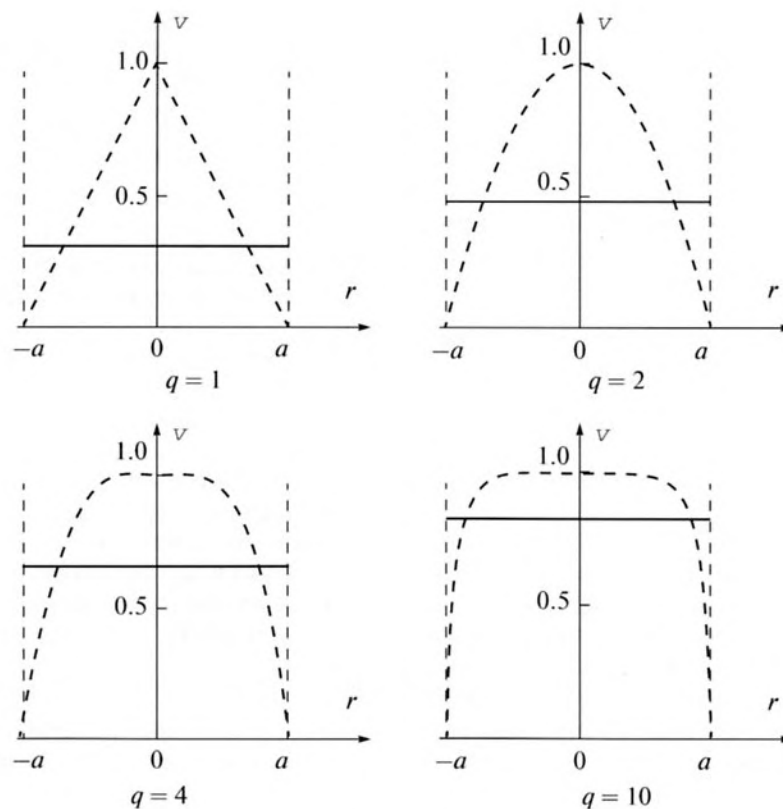


Рис. 3. Распределение приращения фазовой скорости квазиоднородной плоской волны Δv_ϕ (сплошная линия) по радиусу трубы для различных законов изменения скорости акустической среды $v(r)$ (пунктирная линия).

табл. 3 значения приращения фазовой скорости Δv_ϕ квазиоднородной плоской волны при различных скоростях акустической среды и различных законах изменения скорости этой среды по радиусу трубы (32). Там же для сравнения представлены средние скорости акустической среды в трубе \bar{v} для тех же условий. Средняя скорость среды рассчитывалась по следующей формуле:

$$\bar{v} = \frac{1}{S} \int_s v(r) r dr d\phi = \frac{2\pi v}{\pi a^2} \int_0^a \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^q\right) r dr = v \frac{q}{q+2} \quad (34)$$

На основании полученных данных можно сделать следующие утверждения. Приращение фазовой скорости квазиоднородной плоской волны в трубе с движущейся акустической средой имеет линейную зависимость от величины скорости акустической среды независимо от закона распределения скорости по сечению трубы; при больших числах Маха ($M > 0.5$) эта зависимость нарушается. Приращение фазовой скорости квазиоднородной плоской волны в трубе примерно равно средней скорости движущейся среды $\Delta v_\phi \approx \bar{v}$ с точностью порядка единиц процентов.

В табл. 4 приведены значения приращения фазовой скорости Δv_ϕ неоднородных плоских волн для радиуса трубы $a = 0.015$ м, скорости звука в неподвижной среде $c_0 = 1500$ м/с, скорости потока на оси трубы $v = 1$ м/с и изменения скорости потока вдоль радиуса трубы (32) для различных длин волн в неподвижной среде $\lambda = 0.02$ м и $\lambda = 0.04$ м. Для сравнения там же приведены данные и для квазиоднородной плоской волны при $\lambda = 0.055$ м. С целью идентификации плоских волн приведены приближенные значения их поперечных волновых чисел $\chi_j, j = 1, 2, \dots, J$ (15), которые практически не отличаются от поперечных волновых чисел тех же плоских волн в трубе с неподвижной акустической средой, приведенных в [1, с. 141]. Из приведенных результатов следует, что приращение фазовой скорости неоднородной плоской волны, связанное с движением среды, тем больше, чем больше поперечное волновое число этой волны, т.е. чем больше значение ее критической частоты. Изменение фазовой скорости волны, связанное с изменением скорости потока среды вдоль радиуса, зависит от закона распределения амплитуды этой волны по радиусу трубы. Распределение амплитуды неоднородной волны с поперечным волновым числом $\chi_j \approx 3.83, j = 1, 2, \dots, J$ вдоль радиуса трубы имеет нулевое значение примерно при $r = 2.4/3.83a$ [1]. На таких радиусах среда не оказывает никакого влияния на данную неоднородную волну. Основное влияние среды на эту волну происходит в центре трубы и вблизи ее стенки. Это подтверждается данными табл. 4, из которых следует, что изменение скорости потока среды посередине между центром трубы и ее боковой стенки

Таблица 3

| q | Δv_ϕ | | | \bar{v}/v |
|----|-----------------|-----------|-------------|-------------|
| | v = 0.01 м/с | v = 1 м/с | v = 750 м/с | |
| 1 | 0.0032 | 0.3152 | 272 | 0.3333 |
| 2 | 0.0049 | 0.4865 | 417 | 0.5 |
| 4 | 0.0067 | 0.6656 | 505 | 0.6667 |
| 7 | 0.0079 | 0.7865 | 613 | 0.7778 |
| 10 | 0.0085 | 0.8456 | 666 | 0.8333 |

Таблица 4

| q | Δv_ϕ | | |
|----|---|---|---|
| | $\lambda = 0.02$ м $m = 0, \chi_j \approx 3.83,$ $j = 1, 2, \dots, J$ | $\lambda = 0.04$ м $m = 1, \chi_j \approx 1.84,$ $j = 1, 2, \dots, J$ | $\lambda = 0.055$ м $m = 0, \chi_j \approx 0,$ $j = 1, 2, \dots, J$ |
| 1 | 1.310 | 1.046 | 0.3152 |
| 2 | 1.935 | 1.512 | 0.4865 |
| 4 | 2.472 | 1.924 | 0.6656 |
| 7 | 2.736 | 2.161 | 0.7865 |
| 10 | 2.828 | 2.268 | 0.8456 |

слабее всего влияет на неоднородную плоскую волну с поперечным волновым числом $\chi_j \approx 3.83, j = 1, 2, \dots, J$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В трубе с движущейся средой, когда скорость среды изменяется вдоль радиуса, всегда существует распространяющаяся квазиоднородная плоская волна, а также на частотах выше критических могут существовать распространяющиеся неоднородные плоские волны. Приращение фазовой скорости квазиоднородной плоской волны имеет линейную зависимость от величины скорости акустической среды независимо от закона распределения этой скорости по сечению трубы. Приращение фазовой скорости квазиоднородной плоской волны в трубе с движущейся акустической средой по отношению к фазовой скорости плоской однородной волны в трубе с неподвижной средой примерно равно средней скорости среды в трубе, отличие составляет единицы процентов. Средняя скорость рассчитывается как отношение потока среды, проходящего через поперечное сечение трубы в единицу времени, к площади поперечного сечения трубы. Приращение фазовой скорости неоднородной плоской волны, связанное с движением среды, тем больше, чем больше поперечное волновое число этой волны, при этом влияние движения среды на скорость

акустической волны определяется распределением амплитуды неоднородной волны вдоль радиуса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ржевкин С.Н.* Курс лекций по теории звука. М.: МГУ, 1960. 337 с.
2. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
3. *Лепендин П.Ф.* Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 488 с.
4. *Тютюкин В.В.* Круговые и спирально-винтовые нормальные волны цилиндрического волновода // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 4. С. 549–555.
5. *Кремлева О.А., Шкундин С.З.* Метод расчета акустического поля внутри конечного цилиндрического канала с потоком // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 1. С. 84–88.
6. *Соболев А.Ф.* Повышение эффективности снижения шума в канале с потоком при наличии звукопоглощающих облицовок // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 3. С. 404–413.
7. *Цейтлин В.Г.* Расходоизмерительная техника. М.: Стандарты, 1977. 240 с.
8. *Бобровников Г.Н., Новожилов Б.М., Сарафанов В.Г.* Бесконтактные расходомеры. М.: Машиностроение, 1985. 128 с.
9. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородных движущихся сред. М.: Наука, 1981. 207 с.
10. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 302 с.
11. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
12. *Трофимов М.Ю.* О вычислении собственных значений и функций акустических мод в слоистой среде с горизонтальным течением // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 2. С. 274–278.
13. *Ляшиев Л.М.* К вопросу об отражении звука от границы раздела движущихся сред // Акуст. журн. 1964. Т. 10. № 2. С. 247–249.
14. *Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовиц М., Стиган И.* М.: Наука, 1979. 830 с.
15. *Прудников В.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 760 с.
16. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 832 с.