АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2014, том 60, № 4, с. 368–375

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ИНТЕНСИВНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ ТИПА БИОТКАНЕЙ И ГЕОСТРУКТУР СО СЛОЖНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ДИНАМИКОЙ РЕЛАКСАЦИОННОГО ТИПА

© 2014 г. О. В. Руденко[1, 2, 3, 4, 5]

[1]Физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
[2]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
[3]Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН
[4]Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН
[5]Blekinge Institute of Technology, 37179 Karlskrona, Sweden
E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru; oru@bth.se

Поступила в редакцию 26.02.2014 г.

Изложена универсальная схема конструирования нелинейных интегро-дифференциальных моделей для описания интенсивных волн в средах со сложной внутренней динамикой релаксационного типа. Приведены примеры таких сред. Описаны различные формы ядер. Указаны случаи, в которых модели могут быть упрощены путем их сведения к дифференциальным или дифференциально-разностным уравнениям с частными производными. Получены интегральные соотношения для количества движения и энергии, переносимых волной. Найдены точные решения. Использован метод отображений для получения приближенных решений и анализа решений в виде разностных соотношений.

Ключевые слова: нелинейность, интегро-дифференциальные уравнения, релаксация, ядро, поглощение, дисперсия, точное решение, ударная волна.

DOI: 10.7868/S0320791914040169

ВВЕДЕНИЕ

Процесс распространения волны можно рассматривать как причину модуляции во времени и в пространстве внешних термодинамических параметров среды. Одновременно возмущаются и равновесные значения внутренних параметров. Волна при этом теряет часть своей энергии на возбуждение внутренних "степеней свободы" [1]. Неравновесные процессы приближения к новому равновесному состоянию происходят с собственными характерными временами, отличными, вообще говоря, от времен изменения внешнего акустического поля. Поэтому энергия, помимо потерь на внутреннее трение, возвращается в волну с задержкой по фазе, что изменяет скорость распространения волны и дополнительно ослабляет ее. Нелинейность обычно приводит к рождению новых частот волнового спектра, и картина взаимодействия волновых и внутренних движений среды становится еще более сложной.

Первые работы по нелинейным волнам в релаксирующих средах принадлежат Поляковой, Солуяну и Хохлову [2–4]. Первые численные расчеты проведены Лапшиным и его коллегами – математиками школы Бахвалова; результаты опубликованы в [5].

В этих работах, следуя теории второй вязкости Мандельштама–Леонтовича (см. [1]), рассматривалась релаксационная кинетика приближения единственной "степени свободы" ς к своему равновесному значению ς_0, происходящего с характерным временем t_0:

$$\frac{d\varsigma}{dt} = -\frac{\varsigma - \varsigma_0}{t_0}. \quad (1)$$

Используя кинетическое уравнение (1), с учетом малых нелинейных членов в уравнениях гидродинамики, удалось получить связь между приращениями давления p и плотности ρ следующего вида (см. формулу (8) [3] или [6]):

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{t_0}\right)p = \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{t_0}\right)\left(c_\infty^2\rho + (\varepsilon - 1)\rho^2\right) - \frac{mc_0^2}{t_0}\rho. \quad (2)$$

Здесь $m = \left(c_\infty^2 - c_0^2\right)/c_0^2$ – "сила релаксации", характеризуемая разностью квадратов высокочастотной c_∞^2 и низкочастотной c_0^2 скоростей звука. В работе [7] (см. формулу (2) [7] или [6]) было по-

казано, что дифференциальную связь (2) можно представить в интегральной форме:

$$p = c_\infty^2\rho + (\varepsilon - 1)\rho^2 - \frac{mc_0^2}{t_0}\int_{-\infty}^{t}\rho(t')\exp\left(-\frac{t-t'}{t_0}\right)dt'. \quad (3)$$

Подстановка этой связи в уравнения гидродинамики позволяет получить для описания эволюции волновых пучков следующее интегро-дифференциальное уравнение ([8], формула (1)):

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\rho}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0\rho_0}\rho\frac{\partial\rho}{\partial\tau} - \frac{b}{2c_0^3\rho_0}\frac{\partial^2\rho}{\partial\tau^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{m}{2c_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial\rho}{\partial\tau'}\exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{t_0}\right)d\tau'\right] = \frac{c_0}{2}\Delta_\perp\rho. \quad (4)$$

Здесь ε, b – нелинейный и диссипативный параметры среды, z – координата вдоль оси пучка, $\Delta_\perp$ – лапласиан по поперечным координатам, $\tau = t - (z/c_0)$ – время в системе координат, сопровождающей волну.

В [6] обращено внимание на необходимость замены для сред с дисперсией обычных степенных разложений (например, возмущения плотности в ряд по степеням возмущения давления) более общими функциональными рядами типа Вольтера–Фреше. Это хорошо известный факт для механики наследственных сред и нелинейной оптики, однако в нелинейной акустике соответствующие уравнения не использовались. Подробный обзор проблем, связанных с переходом к функциональным "определяющим соотношениям" от обычных алгебраических "уравнений состояния", дан в лекции [9], а также кратко обсужден в [10].

В общем случае частотная зависимость появляется как у линейных, так и у нелинейных модулей упругости. В акустике и нелинейность, и линейную дисперсию почти всегда можно считать слабыми, поэтому дисперсия нелинейных модулей – эффект более высокого порядка малости [6]. С учетом этого обстоятельства мы предложили нелинейные члены не менять, а экспоненциальное ядро $\exp(-\xi/t_0)$ в уравнениях типа (4) заменить ядром более общего вида $K(\xi/t_0)$ (см. также исторический обзор [11]). Возможны иные формы ядер для другой внутренней кинетики, когда процесс приближения к термодинамическому равновесию не является релаксационным или однородным во времени. Такие случаи рассмотрены ниже.

За прошедшие 40 лет уравнения типа (4) много раз применялись для решения конкретных задач. Интерес к таким моделям заметно вырос в последние годы, особенно в связи с использованием интенсивных волн в биологических тканях и исследованием нелинейностей геофизических сред (см., например, [12–19]). Однако математический аппарат, основанный на нелинейных интегро-дифференциальных уравнениях, до сих пор считается среди акустиков некоторой экзотикой. Возможно, это связано со сложностью аналитического решения таких уравнений. Методами теории групп показано, что они небогаты симметриями, и, следовательно, число физически интересных точных решений весьма ограничено [20].

С другой стороны, согласно данным Web of Knowledge "Research Fronts 2013: 100 Top Ranked Specialties in the Sciences and Social Sciences", направление "Boundary value problems of nonlinear fractional differential equations" (http://sciencewatch.com/) является сегодня наиболее цитируемым в области математики. Интересно, что дробные производные обычно понимаются в смысле Римана–Лиувилля (Riemann–Liouville):

$$\left(D_{0^+}^\alpha u\right) = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int_0^t\frac{u(s,x)\,ds}{(t-s)^{\alpha+1-n}},$$

т.е. имеется в виду довольно частный вид ядер.

ОБЩИЙ ПОДХОД И ФОРМЫ ЯДЕР

Ниже кратко излагается схема получения различных нелинейных интегро-дифференциальных моделей, более простая и универсальная по сравнению со способами, использованными ранее в цитированных работах. Линеаризованные уравнения гидродинамики (движения и непрерывности) для малых возмущений давления p и плотности ρ сводятся к одному уравнению:

$$\Delta p = \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Дополним уравнение (5) следующей связью между параметрами p и ρ:

$$\rho = \frac{p}{c_0^2} - \frac{\varepsilon p^2}{c_0^4\rho_0} + \sum_i \varsigma_i. \quad (6)$$

Здесь ς_i – запаздывающие члены, зависящие от законов приближения каждой из "внутренних степеней свободы" среды к термодинамическому равновесию. Последовательный учет кинематической нелинейности уравнений движения и непрерывности усложнит схему наших рассуждений, но приведет к таким же результатам. Формально кинематическая нелинейность учтена путем замены коэффициента $(\varepsilon - 1)$ при нелинейном члене в формуле (3) на коэффициент ε в формуле (6).

В частности, в теориях типа "второй вязкости" Мандельштама–Леонтовича [1] единственный отличный от нуля "внутренний параметр" ς_i подчиняется релаксационному уравнению

$$\frac{d\varsigma_i}{dt} + \frac{\varsigma_i}{t_i} = -\frac{m_i}{c_0^2}\frac{dp}{dt}. \quad (7)$$

Здесь m_i – безразмерное число, характеризующее "силу" релаксации, t_i – характерное время релаксации. В отличие от уравнения (1), которое описывает "свободный" процесс релаксации к равновесному состоянию, уравнение (7) описывает "вынужденный" процесс в поле переменного внешнего (акустического) давления. Кроме того, здесь ς_i – это разность между текущим значением i-го внутреннего параметра и его равновесным значением.

Использование кинетического уравнения (7) автоматически обеспечивает выполнение принципа причинности в модели (5)–(7). Это непосредственно следует из записи (7) в интегральной форме:

$$\varsigma_i(t) = -\frac{m_i}{c_0^2}\int_{-\infty}^{t}\exp\left(-\frac{t-t'}{t_i}\right)\frac{dp}{dt'}dt' = -\frac{m_i}{c_0^2}\frac{d}{dt}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi}{t_i}\right)p(t-\xi)\,d\xi. \tag{8}$$

Из последнего выражения видно, что состояние среды $\varsigma_i(t)$в фиксированной точке в данный момент времени определяется значениями давления $p(t-\xi)$ в предшествующие моменты времени.

Используем связь (2), (3) в интегральной форме:

$$\rho = \frac{p}{c_0^2} - \frac{\varepsilon p^2}{c_0^4\rho_0} - \frac{1}{c_0^2}\sum_i m_i\int_{-\infty}^{t}\exp\left(-\frac{t-t'}{t_i}\right)\frac{dp}{dt'}dt'. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (5), придем к интегро-дифференциальному обобщению нелинейного волнового уравнения:

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(p - \frac{\varepsilon p^2}{c_0^2\rho_0}\right) = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\sum_i m_i\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi}{t_i}\right)p(t-\xi)\,d\xi. \tag{10}$$

Для волновых пучков с осью z в приближении квазиоптики из уравнения (10) получается следующее упрощенное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^3\rho_0}p\frac{\partial p}{\partial\tau} - \frac{1}{2c_0}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\times\sum_i m_i\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi}{t_i}\right)p(t-\xi)\,d\xi\right] = \frac{c_0}{2}\Delta_\perp p. \tag{11}$$

(сравните с (4)). Соответствующее уравнение для плоских волн получается приравниванием нулю выражения в квадратных скобках (11).

Если внутренняя кинетика описывается непрерывным спектром времен релаксации, сумму в выражениях (9)–(11) следует заменить следующим интегралом:

$$\sum_i m_i\exp\left(-\frac{\xi}{t_i}\right) \Rightarrow \frac{1}{t_0}\int_0^{\infty}m(t_i)\exp\left(-\frac{\xi}{t_i}\right)dt_i \equiv m_0K\left(\frac{\xi}{t_0}\right). \tag{12}$$

Здесь для ограниченных при $\xi = 0$ ядер без потери общности можно считать $K(0) = 1$, а константам m_0, t_0 придать смысл эффективной "силы" и времени релаксации для нового ядра (12). При этом "сила" релаксации определяется условием нормировки функции распределения времен:

$$m_0 = \frac{1}{t_0}\int_0^{\infty}m(t)dt.$$

Очевидно, что если функция распределения времен релаксации $m(t)$ есть сумма дельта-функций вида $m_i\delta(t-t_i)$, соответствующий интегральный член в квадратных скобках уравнения (11) будет иметь вид

$$-\frac{1}{2c_0}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\sum_i m_i\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi}{t_i}\right)p(t-\xi)\,d\xi \Rightarrow -\frac{m_0}{2c_0}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\int_0^{\infty}K\left(\frac{\xi}{t_0}\right)p(t-\xi)\,d\xi. \tag{13}$$

Отметим, что формулу (12) можно рассматривать как преобразование Лапласа:

$$m_0t_0K\left(\frac{\xi}{t_0}\right) = \int_0^{\infty}m\left(\frac{1}{\lambda}\right)\exp(-\lambda\xi)\frac{d\lambda}{\lambda^2}. \tag{14}$$

Приведем примеры типичных ядер релаксационного типа. Функция распределения времен релаксации $m(t)$, которая обращается в ноль при $t = 0$ и $t \to \infty$, и соответствующее ей ядро имеют вид

$$m(t) = m_0\left(\frac{t_0}{t}\right)^2\exp\left(-\frac{t_0}{t}\right),\quad K(s) = \frac{1}{1+s}. \tag{15}$$

Распределение имеет максимум в точке $t = t_0/2$, а ядро – монотонно убывающая функция. Второй пример – пара простых функций (распределение времен и ядро) – таков:

$$m(t) = m_0\exp\left(-\frac{t}{t_0}\right),\quad K(s) = 2\sqrt{s}K_1\left(2\sqrt{s}\right). \tag{16}$$

Здесь K_1 – цилиндрическая функция Макдональда. Обе функции (16) – монотонно убывающие, при этом $K(0) = 1$.

Таким образом, зная распределение времен релаксации, можно сконструировать ядро интегро-дифференциального уравнения, которое с учетом

нелинейности и дифракции в общем виде запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\varepsilon}{c_0^3\rho_0}p\frac{\partial p}{\partial\tau}-\right.$$
$$\left.-\frac{m_0}{2c_0}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\int_0^\infty K\left(\frac{\xi}{t_0}\right)p(\tau-\xi)\,d\xi\right]=\frac{c_0}{2}\Delta_\perp p. \tag{17}$$

Вид ядра можно установить не только теоретически, т.е. на основе кинетического уравнения типа (7). Это можно сделать также, зная дисперсионные соотношения, например, измерив в эксперименте частотно-зависимое затухание и скорость волны. Пренебрегая для слабых волн в уравнении (10) нелинейным членом и полагая волну плоской

$$p=p_0\exp(-i\omega t+ik(\omega)z), \tag{18}$$

найдем квадрат комплексного волнового числа:

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left[1+im_0\omega\int_0^\infty K\left(\frac{\xi}{t_0}\right)\exp(i\omega\xi)\,d\xi\right]. \tag{19}$$

В частности, для экспоненциального ядра выражение (19) имеет вид

$$k^2=\frac{\omega^2}{c_0^2}\left[1+im_0\frac{\omega t_0}{1-i\omega t_0}\right]. \tag{20}$$

Действительная и мнимая части волнового числа $k=k'+ik''$ для волны, бегущей в положительном направлении z, при малом значении m_0 приближенно равны

$$k'\approx\frac{\omega}{c_0}\left[1-\frac{m_0}{2}\omega\int_0^\infty K\left(\frac{\xi}{t_0}\right)\sin(\omega\xi)\,d\xi\right],$$
$$k''\approx\frac{m_0}{2c_0}\omega^2\int_0^\infty K\left(\frac{\xi}{t_0}\right)\cos(\omega\xi)\,d\xi \tag{21}$$

для общего вида ядра, и

$$k'\approx\frac{\omega}{c_0}\left[1-\frac{m_0}{2}\frac{\omega^2t_0^2}{1+\omega^2t_0^2}\right],\quad k''\approx\frac{m_0}{2c_0t_0}\frac{\omega^2t_0^2}{1+\omega^2t_0^2} \tag{22}$$

для экспоненциального ядра. Теперь очевидно, что ядро можно восстановить, решив обратную задачу на основе экспериментальных данных по частотно-зависимым функциям типа (20)–(22) – дисперсии и поглощению волны.

ПРИМЕР СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ ВРЕМЕНАМИ РЕЛАКСАЦИИ

Рассмотрим важную для акустики среду с дисперсией – жидкость, содержащую пузырьки газа (пример – вода с воздушными пузырьками). Акустическое поле в такой среде описывается следующими уравнениями (см., например, [21], задача 6.10):

$$\Delta p-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2p}{\partial t^2}=-\rho_0\nu\frac{\partial^2w}{\partial t^2}, \tag{23}$$

$$\frac{d^2w}{dt^2}+2\delta\frac{dw}{dt}+\omega_0^2w(1-\varepsilon_aw)=-\frac{\omega_0^2}{\rho_ac_a^2}p. \tag{24}$$

Правая часть волнового уравнения (23) учитывает влияние пузырьков на поле p, а уравнение (24) описывает нелинейные колебания пузырьков, вызванные внешним акустическим полем. Здесь w – относительное изменение объема одного пузырька; $\omega_0^2=3c_a^2\rho_a/\rho_0R_0^2$ – собственная частота его колебаний; ε_a и ρ_a – нелинейный параметр воздуха внутри пузырька и его плотность; ν – объемная концентрация воздуха в газожидкостной смеси. Известно [22], что из-за сильного различия сжимаемостей жидкости вокруг пузырька и газа внутри него могут наблюдаться гигантские эффективные параметры нелинейности, во много раз превосходящие нелинейные параметры для однородных сред. Наибольшие нелинейности наблюдаются на низких частотах, меньших собственной частоты ω_0, а наиболее сильное поглощение – в окрестности резонанса $\omega\approx\omega_0$.

Считая нелинейный член в уравнении (24) малым, выразим w через p:

$$w=-\frac{2\omega_0^2}{\rho_ac_a^2\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}\int_{-\infty}^t\exp[-\delta(t-t')]\times$$
$$\times\sin\left[\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}(t-t')\right]p(t')\,dt'+\varepsilon_a\frac{p^2}{(\rho_ac_a^2)^2}. \tag{25}$$

Ядро под интегралом (25) в общем случае не является релаксационным. Для осцилляторов с достаточно высокой добротностью $(\omega_0^2\gg\delta^2)$ оно осциллирует во времени. Такая ситуация характерна для оптических спектров. В случае пузырьков, колебания которых обычно сильно затухают, второй производной в уравнении (24) можно пренебречь, и связь $w(p)$ (25) примет вид

$$w=-\frac{\omega_0^2}{2\delta\rho_ac_a^2}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^t\exp\left[-\frac{\omega_0^2}{2\delta}(t-t')\right]p(t')\,dt'+\varepsilon_a\frac{p^2}{(\rho_ac_a^2)^2}. \tag{26}$$

Если в среде имеются пузырьки различных размеров R_i, имеющие различные собственные частоты ω_i, диссипативные коэффициенты δ_i и концентрации ν_i, нужно воспользоваться функцией распре-

деления пузырьков по размерам $W(R_i)$. При этом система (23), (26) сведется к одному уравнению:

$$\Delta p = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\times$$
$$\times\left[p + \frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_a c_a^2}\int_0^\infty K\left(\frac{\xi}{t_0}\right)p(t-\xi)\frac{d\xi}{t_0} - \varepsilon_a N\frac{\rho_0 c_0^2}{\left(\rho_a c_a^2\right)^2}p^2\right], \quad (27)$$

где $t_i = \omega_i^2/2\delta_i$,

$$K\left(\frac{\xi}{t_0}\right) = \frac{t_0}{R_0}\int_0^\infty W(R_i)\exp\left(-\frac{\xi}{t_i(R_i)}\right)\nu(R_i)\frac{dR_i}{t_i(R_i)},$$
$$N = \frac{1}{R_0}\int_0^\infty W(R_i)\nu(R_i)dR_i. \quad (28)$$

Если теперь воспользоваться методами медленно изменяющегося профиля и квазиоптики для упрощения уравнения (27), то из него можно получить эволюционное уравнение типа (17). Следует учесть, что при наличии пузырьков скорость распространения волны может сильно отличаться от c_0 [22], поэтому движение "сопровождающей" системы координат должно происходить с некоторой эффективной скоростью, зависящей от функции распределения пузырьков по размерам и спектра волны.

Имеется много других примеров сред с несколькими временами релаксации. В обзоре [23] обсуждается различие между "локальной" и "нелокальной" релаксацией. В первом из них процессы идут в каждом элементе среды изолированно, как, например, при обмене энергией между степенями свободы одной молекулы. Второй механизм связан с обменом энергией между различными элементами сплошной среды. Так, если во взвеси колеблются тяжелые частицы, они отстают по фазе от колебаний жидкости; при этом возникают вязкие напряжения, стремящиеся обнулить разность скоростей. Ясно, что характерные времена этих двух процессов различны. Несколькими временами характеризуются также релаксационные процессы в поликристаллах, очень вязких жидкостях, полимерах, биологических тканях. Результаты физического анализа сложных релаксационных процессов применительно к задачам линейной акустики, сравнение экспериментальных данных с теоретическими моделями детально описаны в [24].

Имеются предложения общих термодинамических подходов к описанию релаксационных и резонансных свойств акустических сред [25]. По нашему мнению, разнообразие свойств реальных сложно организованных сред со сложной внутренней динамикой делает предпочтительным иной поход [6, 9, 10]. Он основан на разложениях определяющих уравнений в функциональные ряды и восстановлении ядер на основе простейших кинетических уравнений или экспериментальных данных. Об этом свидетельствует опыт оптической теории дисперсии, где тоже имеются модели типа Друде–Лоренца или Дебая для простых сред, но для изучения сложных дисперсионных характеристик используются экспериментальные методы лазерной спектроскопии [26].

Интересный случай представляют собой процессы приближения к термодинамическому равновесию, не являющиеся однородными во времени. Это означает, что характерное "время релаксации" в уравнении (7) само зависит от времени:

$$\frac{d\varsigma}{dt} + a'(t)\frac{\varsigma}{t_i} = -\frac{m}{c_0^2}\frac{dp}{dt}. \quad (29)$$

Решение уравнения (29) имеет вид

$$\varsigma = -\frac{m}{c_0^2}\int_{-\infty}^{t}\exp[a(t') - a(t)]\frac{dp}{dt'}dt'. \quad (30)$$

Видно, что ядро теперь зависит от обоих моментов времени, а не от их разности $(t - t')$. Наиболее простой случай соответствует $a'(t) = t + t_0$. При этом формула (30) принимает следующий вид:

$$\varsigma = -\frac{m}{c_0^2}p(t) + \frac{m}{c_0^2(t+t_0)}\int_{-\infty}^{t}p(t')dt'. \quad (31)$$

Для функциональной связи (31), очевидно, приведенные выше интегро-дифференциальные уравнения удается свести к уравнениям в частных производных. Другие случаи, когда такое упрощение провести удается, указаны в [20].

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Поскольку решать аналитически нелинейные интегро-дифференциальные уравнения очень трудно, рассмотрим простейшие уравнения для плоских волн. В этом случае уравнение (17) примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^3\rho_0}p\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{m_0}{2c_0}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\int_0^\infty K\left(\frac{\xi}{t_0}\right)p(t-\xi)\,d\xi. \quad (32)$$

Чтобы понять, как изменяется энергия бегущей волны, умножим это уравнение на $2p$ и проинтегрируем его в бесконечных пределах по переменной τ. Если сигнал периодический, достаточно провести усреднение по периоду. В результате получим

$$\frac{\partial\overline{p^2}}{\partial z} - \frac{2\varepsilon}{3c_0^3\rho_0}\frac{\partial\overline{p^3}}{\partial \tau} = \frac{m_0}{c_0}\int_0^\infty K\left(\frac{\xi}{t_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\overline{p(\tau)\,p(\tau-\xi)}d\xi. \quad (33)$$

Здесь черта сверху означает одну из указанных процедур: интегрирование либо усреднение. Второй член в левой части уравнения есть интеграл от производной. Поэтому он равен нулю, причем

как для периодического сигнала, так и для импульса, исчезающего на бесконечности. Обозначим $\overline{p^2} = E$, эта величина пропорциональна плотности энергии или интенсивности волны. Следовательно, изменение энергии с расстоянием z описывается формулой

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{m_0}{c_0}\int_0^\infty K\left(\frac{\xi}{t_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\overline{p(\tau)\,p(\tau-\xi)}d\xi. \qquad (34)$$

Нетрудно показать, что выражение под интегралом равно

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\overline{p(\tau)\,p(\tau-\xi)} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\xi^{n-2}}{(n-2)!}\overline{p\frac{\partial^n p}{\partial \tau^n}} = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\xi^{2m-2}}{(2m-2)!}\overline{\left(\frac{\partial^m p}{\partial \tau^m}\right)^2}, \qquad (35)$$

поэтому

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{m_0}{c_0}\sum_{m=1}^{\infty}A_m(z)\int_0^\infty \xi^{2m-2}K\left(\frac{\xi}{t_0}\right)d\xi. \qquad (36)$$

Здесь

$$\sum_{m=1}^{\infty}A_m(z) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-2)!}\overline{\left(\frac{\partial^m p}{\partial \tau^m}\right)^2} = -\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)^2} + \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}\right)^2} - \frac{1}{24}\overline{\left(\frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3}\right)^2} + \ldots \qquad (37)$$

Зная решение нелинейной задачи $p(z, \tau)$, по формулам (36), (37) или (34) можно рассчитать убыль энергии с расстоянием для заданного ядра K. Разумеется, это возможно лишь при условии сходимости всех интегралов и рядов, использованных при выводе этих формул. В частности, для экспоненциального ядра и монохроматической волны $p = P_0\sin(\omega\tau)$ получим результат

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{m_0}{c_0 t_0}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m t_0^{2m}\overline{\left(\frac{\partial^m p}{\partial \tau^m}\right)^2} = -\frac{P_0^2}{2}\frac{m_0}{c_0 t_0}\frac{\omega^2 t_0^2}{1+\omega^2 t_0^2}, \qquad (38)$$

который согласуется с формулой (22).

Тривиальным для уравнения (32) является закон сохранения количества движения в процессе распространения волны: $\overline{p} = \text{const}$, который выводится аналогично.

Перейдем теперь к описанию простейших стационарных решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, приведенных выше. Запишем уравнение (32) в безразмерном виде, чтобы упростить последующие выкладки:

$$\frac{\partial V}{\partial Z} - V\frac{\partial V}{\partial \theta} = D\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\int_0^\infty K(s)V(\theta - s)\,ds, \qquad (39)$$

где

$$Z = \frac{\varepsilon P_0 z}{c_0^3\rho_0 t_0},\quad \theta = \frac{\tau}{t_0},\quad V = \frac{p}{P_0},\quad D = \frac{m_0 c_0^2\rho_0}{2\varepsilon P_0}. \qquad (40)$$

Уравнение (39) имеет точное решение для экспоненциальной формы ядра [3, 6, 21]:

$$\theta + C = \ln\frac{(1+V)^{D-1}}{(1-V)^{D+1}},\quad \frac{dV}{d\theta} = 1/2\frac{1-V^2}{D+V}. \qquad (41)$$

Это решение описывает слабую ударную волну в среде с экспоненциальной релаксацией – переход от значения $V = -1$ (при $\theta \to -\infty$) до значения $V = +1$ (при $\theta \to +\infty$). Нетрудно видеть, что решение однозначно при значениях параметра $D \geq 1$. Максимум производной достигается в точке $V_{\max} = -D + \sqrt{D^2 - 1}$ и равен $\dot{V}_{\max} = D - \sqrt{D^2 - 1}$. Подставляя решение (41) в интеграл (34) или (38), можно вычислить убыль энергии за счет нелинейного поглощения на ударном фронте конечной ширины. При $D < 1$ решение (41) становится неоднозначным. Однако при малых значениях числа D расчет структуры фронта можно провести методом итераций. Этот метод применим для любой формы релаксационного ядра.

Запишем уравнение для стационарной волны, получающееся из (39) после приравнивания нулю производной по Z:

$$1 - V^2 = 2D\int_0^\infty K(s)\frac{d}{d\theta}V(\theta - s)\,ds. \qquad (42)$$

В нулевом приближении по малым D из уравнения (42) находим $V^{(0)} = \text{sign}(\theta)$. Уравнение первого приближения будет таким:

$$1 - V^{(1)2} = 4D\int_0^\infty K(s)\delta(\theta - s)ds = 4DK(\theta),$$

откуда следует

$$V^{(1)} = \begin{cases} -1, & -\infty < \theta < 0, \\ \sqrt{1 - 4DK(\theta)}, & 0 < \theta < \infty. \end{cases}$$

Видно, что при увеличении θ в точке $\theta = 0$ происходит скачок от значения $V = -1$ до значения $\sqrt{1 - 4D}$, после чего $V \to +1$. Таким образом, в первом приближении происходит уменьшение перепада на ударном фронте от значения 2 до значения $1 + \sqrt{1 - 4D} \approx 2(1 - D)$.

Во втором приближении получим такое решение:

$$1-V^{(2)2}=2D\left(1+\sqrt{1-4D}\right)\int_0^\infty K(s)\delta(\theta-s)ds-2D\times$$

$$\times\int_0^\infty K(s)H(\theta-s)\frac{d}{ds}\sqrt{1-4DK(\theta-s)}ds=$$

$$=2D\left[K(\theta)+\sqrt{1-4DK(\theta)}+\right.$$

$$\left.+\int_0^\theta\frac{dK(s)}{ds}\sqrt{1-4DK(\theta-s)}ds\right].$$

Здесь $H(\theta)$ – единичная функция Хевисайда. В точке $\theta=0$, во втором приближении (по малому параметру D), скачок происходит от значения $V=-1$ до $\sqrt{1-2D\left(1+\sqrt{1-4D}\right)}$. Цепочку итераций можно продолжить, уточняя величину скачка на фронте ударной волны и закон, по которому происходит релаксация среды после ударного воздействия на нее.

Точные решения уравнения (39) для ядер, представляющих собой дельта-функцию и ее производные, хорошо известны. Например, при $K=\delta(s)$ из (39) получается уравнение Бюргерса, при $K=\delta'(s)$ – уравнение Кортевега–де Вриза. Интегро-дифференциальные уравнения в данном случае сводятся к уравнениям в частных производных для сред, "память" которых мгновенно теряется. Этот вопрос подробно обсужден в [20].

Менее известен другой случай упрощения – сведение интегро-дифференциальных уравнений к дифференциально-разностным уравнениям, который возможен для ядер, отличных от нуля на конечном интервале. Простейший случай соответствует среде с постоянной "памятью": $K(s)=1$, $0<s<1$. При $s>1$, $K\equiv 0$, т.е. при $s=1$ среда свою память полностью теряет. Для такого ядра уравнение (39) принимает вид

$$\frac{\partial V}{\partial Z}-V\frac{\partial V}{\partial\theta}=D\frac{\partial}{\partial\theta}[V(Z,\theta-1)-V(Z,\theta)]. \quad (43)$$

Для стационарной волны (43) превращается в разностное соотношение

$$V(\theta-1)=V(\theta)+\frac{1-V^2(\theta)}{2D}. \quad (44)$$

Отображение (44) $V(\theta)\to V(\theta-1)$ фактически является точным решением. Оно описывает фронт ударной волны с шириной, растущей с увеличением числа D. Задавая произвольное значение $V_i(\theta_*)=1-\mu_i$, где μ_i – малое число, в результате серии отображений можно найти числа $V_{i+n}(\theta_*-n)$. Затем та же процедура повторяется для другого исходного значения $V_j(\theta_{**})$ и так далее до тех пор, пока не сформируется массив данных, достаточный для построения графиков.

Другой полезный пример – линейно затухающая "память" $K(s)=1-s$, отличная от нуля в области $0<s<1$. Уравнение (39) для этого случая таково:

$$\frac{\partial V}{\partial Z}-V\frac{\partial V}{\partial\theta}=D\frac{\partial V}{\partial\theta}+D[V(Z,\theta-1)-V(Z,\theta)]. \quad (45)$$

Для стационарной волны из (45) следует дифференциально-разностное уравнение с обыкновенными производными:

$$\frac{d}{d\theta}\frac{(V+D)^2}{2D}=V(\theta)-V(\theta-1), \quad (46)$$

которое также легко решается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше сформулированы различные модели, полезные для использования при описании интенсивных волн в средах с внутренней динамикой релаксационного типа. Наиболее известные примеры таких сред – биологические ткани, влажные пористые грунты, жидкости с пузырьками газа. Указаны случаи возможного упрощения интегро-дифференциальных уравнений путем сведения их к дифференциальным или дифференциально-разностным уравнениям с частными производными. Для продолжения исследований необходим более детальный анализ обсуждаемых моделей, прежде всего, с использованием компьютерных методов.

Работа выполнена по гранту Правительства РФ для исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в учреждениях высшего образования (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, договор № 11.G34.31.0066). Она поддержана также грантами Президиума РАН, РФФИ и Президентским грантом Ведущих научных школ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. *Полякова А.Л.* О распространении волн конечной амплитуды в релаксирующих средах // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 3. С. 356–359.
3. *Полякова А.Л., Солуян С.И., Хохлов Р.В.* К вопросу о распространении конечных возмущений в релаксирующей среде // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 1. С. 107–112.
4. *Солуян С.И., Хохлов Р.В.* Акустические волны конечной амплитуды в среде с релаксацией // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 2. С. 220–227.
5. *Васильева О.А., Карабутов А.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В.* Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: МГУ, 1983. 152 с.

6. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.

7. *Руденко О.В., Солуян С.И.* К вопросу о рассеянии звука на звуке // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 3. С. 421–425.

8. *Руденко О.В., Солуян С.И., Хохлов Р.В.* Проблемы теории нелинейной акустики // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 3. С. 449–457.

9. *Rudenko O.V.* On strongly nonlinear waves and waves with strongly displayed weak nonlinearity. In the book: Nonlinear Waves – 2012. N. Novgorod: Inst. Appl. Phys. RAS, 2013. P. 83–97. Invited Review Lecture. [In Russian].

10. *Rudenko O.V., Hedberg C.M.* Strong and weak nonlinear dynamics: Models, Classification, Examples // Acoust. Phys. 2013. V. 59. № 6. P. 644–650.

11. *Руденко О.В.* К 40-летию уравнения Хохлова–Заболотской // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 4. С. 452–462.

12. *Sarvazyan A.P., Rudenko O.V., Swanson S.D., Fowlkes J.B., Emelianov S.Y.* Shear Wave Elasticity Imaging – a New Ultrasonic Tecknology of Medical Diagnostics // Ultrasound in Med. Biol. 1998. V. 24. № 9. P. 1419–1436.

13. *Руденко О.В., Сарвазян А.П.* Волновая биомеханика скелетной мышцы // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 720–732.

14. *Лебедев-Степанов П.В., Руденко О.В.* О затухании звука в жидкости, содержащей взвешенные частицы микро- и нанометровых размеров // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 706–711.

15. *Руденко О.В., Гурбатов С.Н.* Распространение шумовых сигналов в мягких биологических тканях // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 2. С. 275–277.

16. *Руденко О.В., Собисевич А.Л., Собисевич Л.Е., Хедберг К.М., Шамаев Н.В.* Нелинейная модель гранулированной среды, содержащей слои вязкой жидкости и газовые полости // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 1. С. 112–120.

17. *Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Демин И.Ю.* Нелинейные шумовые волны в мягких биологических тканях // Акуст. журн. 2013. V. 59. № 5. P. 630–635.

18. *Rudenko O.V.* Integro-differential equations in nonlinear wave physics. Part 1. Dynamics / Proc. 5-th Int. Conf. "Frontiers of Nonlinear Physics", N. Novgorod, Russia, IAP RAS, 2013. P. 63–64.

19. *Gurbatov S.N., Rudenko O.V.* Integro-differential equations in nonlinear wave physics. Part 2. Statistics / Proc. 5-th Int. Conf. "Frontiers of Nonlinear Physics", N. Novgorod, Russia, IAP RAS, 2013. P. 56–57.

20. *Ibragimov N.H., Meleshko S.V., Rudenko O.V.* Group analysis of evolutionary integro-differential equations describing nonlinear waves: the general model // J. Phys. A: Math. Theor. 2011. V. 44. 315201 (21 p.).

21. *Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Хедберг К.М.* Нелинейная акустика в задачах и примерах. М.: Физматлит, 2007. 176 с.

22. *Руденко О.В.* Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // УФН. 2006. Т. 176. № 1. С. 77–95.

23. *Исакович М.А.* Л.И. Мандельштам и распространение звука в микронеоднородных средах // УФН. 1979. Т. 129. № 3. С. 531–540.

24. *Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П.* Основы молекулярной акустики. М.: Наука, 1964. 516 с.

25. *Ларичев В.А., Максимов Г.А.* О едином описании релаксационных и резонансных свойств акустических сред в рамках термодинамического подхода // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 6. С. 814–822.

26. *Ахманов С.А., Коротеев Н.И.* Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света. М.: Наука, 1981. 144 с.