АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2014, том 60, № 6, с. 696–700

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

УДК 534.121.1

ИЗОЛЯЦИЯ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ УПРУГИМ СЛОЕМ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ВИБРАЦИОННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

© 2014 г. Н. Г. Канев

Акустический институт им. Н.Н. Андреева

117036 Москва, ул. Шверника 4

E-mail: nikolay.kanev@mail.ru

Поступила в редакцию 29.01.2014 г.

Предложен метод расчета виброизоляции упругого слоя, расположенного между пластиной конечного размера со свободными краями и виброактивным основанием. Упругий слой состоит из дискретного набора пружин. При несинфазном колебании поверхности основания среднее динамическое воздействие на пластину уменьшается, что приводит к росту виброизолирующего эффекта. Резонансы изгибных колебаний пластины, напротив, снижают виброизоляцию на резонансных частотах. Для разных случаев получены оценки параметров системы, при которых виброизолирующий эффект положителен. Проведено сопоставление с простейшей системой "масса–пружина" с одной степенью свободы.

Ключевые слова: виброизоляция, резонанс, изгибные колебания, пластина.

DOI: 10.7868/S0320791914050050

Одним из эффективных способов снижения передачи вибраций от одних объектов к другим является применение специальных препятствий – виброизоляторов. Как правило, они размещаются между источником вибрации и защищаемым объектом. В простейшей схеме между виброактивным объектом и основанием располагается набор дискретных виброизоляторов или непрерывный упругий слой [1, 2]. Динамическое воздействие со стороны объекта на основание уменьшается в некоторой области частот. Если, наоборот, основание является источником вибрации, то виброизоляторы в той же степени снижают воздействие на объект. Часто задачу можно считать одномерной и выполнять расчет виброизолирующей эффективности на основании классической теории виброизоляции [3, 4].

В волновом случае, т.е. когда размеры объектов не являются малыми по сравнению с характерными длинами волн (поверхностных, изгибных или иных), одномерная модель виброизоляции неприменима. Например, в случае бесконечных пластин, разделенных упругим слоем, имеет место волноводная изоляция изгибных колебаний [5]. Здесь упругий слой так изменяет волноводные свойства пластин, что распространение изгибных волн становится невозможным в некотором диапазоне частот. Однако если размеры пластин конечны, приходится также учитывать резонансы их изгибных колебаний. В настоящей работе рассмотрена модельная задача об изоляции изгибных колебаний пластины конечного размера, на которую оказывается неравномерное по ее поверхности динамическое воздействие. Далее сформулируем постановку задачи.

Пусть источником вибрационного воздействия является плоское основание, по которому распространяется поверхностная волна. На основании через упругий слой установлен защищаемый объект – пластина. На практике основанием может считаться поверхность грунта, по которой распространяются поверхностные волны, или перекрытие здания, по которому распространяются изгибные волны. Как правило, защищаемым объектом является механизм или конструкция, установленные на пластине, которые могут оказывать влияние на колебания пластины. Но учет этого влияния требует дополнительного рассмотрения свойств объекта, что усложняет задачу и не относится к проблеме виброизоляции. Поэтому защищаемым объектом будем считать саму пластину. Отметим, что снижение вибраций пластины, расположенной на колеблющемся основании, может быть обеспечено с помощью цепочки механических резонаторов, присоединенных к основанию и размещенных со стороны падающей волны [6, 7].

Введем декартову систему координат xy на поверхности основания, по которой распространяется поверхностная волна с вертикальным смещением

$$\eta(x) = \eta_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}x}, \quad (1)$$

где η_0 – амплитуда смещения, λ – длина волны. Прямоугольная пластина со сторонами l вдоль оси x и d вдоль оси y присоединена к основанию через M линейных виброизоляторов длиной d (пружин), ориентированных вдоль оси y. Пружины равномерно распределены вдоль оси x, т.е. в точках $x_m = l(m-1)/M$, $m = 1, 2, \ldots, M$ (рис. 1). В данной постановке пластина совершает изгибные колебания вдоль оси x, поэтому от размера d ее колебания не зависят. Полагаем, что действие со стороны пружин на поверхность основания не изменяет его движения, т.е. основание является неподатливым по отношению к внешним силам.

Уравнение движения пластины, соединенной с пружинами, для смещения $w(x)$ может быть записано в виде

$$-\rho\omega^2 w(x) + D\Delta^2 w(x) = \sum_m k_m(\eta(x_m) - w(x_m))\delta(x - x_m), \quad (2)$$

где ρ – поверхностная плотность пластины, D – ее изгибная жесткость, k_m – линейная жесткость m-й пружины.

Представим $w(x)$ в виде суммы собственных колебаний пластины со свободными краями [8]:

$$w(x) = \sum_n A_n \xi_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (3)$$

$$\xi_0(x) = 1, \quad \xi_1(x) = \sqrt{3}\left(2\frac{x}{l} - 1\right),$$

$$\xi_n(x) = \cos\left(\alpha_n \frac{x}{l} + \theta_n\right) - \sin\left(\alpha_n \frac{x}{l} + \theta_n\right) + \cos(\theta_n) e^{-\alpha_n \frac{x}{l}} - \sin(\theta_n) e^{\alpha_n \frac{x}{l}} \text{ при } n \geq 2, \quad (4)$$

$$\theta_n = 2\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha_n}{e^{\alpha_n} - \cos\alpha_n} \text{ при } n \geq 2,$$

где α_n – корни уравнения $\cos\alpha\,\mathrm{ch}\alpha = 1$. Приведем несколько первых корней: $\alpha_2 = 4.730$, $\alpha_3 = 7.853$, $\alpha_4 = 11.00$, $\alpha_5 = 14.14$. Собственные функции ортогональны, т.е.

$$\frac{1}{l}\int_0^l \xi_n(x)\xi_{n'}(x)dx = \begin{cases} 1, & n = n' \\ 0, & n \neq n' \end{cases}. \quad (5)$$

Для определения амплитуды моды A_n подставим (3) в уравнение (2), умножим обе его части на $\xi_{n'}(x)$ и проинтегрируем по x от 0 до l. В результате получаем

$$\sum_{n'} A_{n'} \sum_m k_m \xi_{n'}(x_m)\xi_n(x_m) + \left(D\left(\frac{\alpha_n}{l}\right)^4 - \rho\omega^2\right) l A_n = \sum_m k_m \eta(x_m)\xi_n(x_m). \quad (6)$$

Выражение (6) представляет собой систему линейных уравнений, которая легко может быть решена при ограничении количества рассматриваемых мод колебаний пластины. Вместе с тем, если все пружины одинаковы, т.е. $k_m = k$ для всех m, то при большом количестве пружин $M \gg 1$ сумма по m в первом слагаемом (6) в силу свойства ортогональности (5) мала при $n \neq n'$. Пренебрегая соответствующими слагаемыми в этой сумме, найдем амплитуду моды из (6):

$$A_n = \frac{\sum_m \eta(x_m)\xi_n(x_m)}{\left(\frac{D}{k}\left(\frac{\alpha_n}{l}\right)^4 - \frac{\rho}{k}\omega^2\right) l + \sum_m \xi_n^2(x_m)}. \quad (7)$$

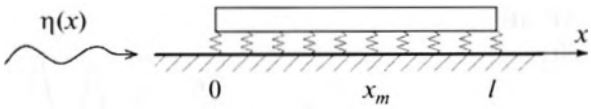

Рис. 1. Пластина на упругом слое.

Подставляя (7) в (3), находим колебания пластины. Поскольку смещение пластины изменяется вдоль оси x, то для характеристики интенсивности ее колебаний введем величину $W = \max\limits_{0 \leq x \leq l} w(x)$ – максимальное смещение пластины на ее поверхности. Виброизоляцию пластины от основания определим следующим образом:

$$V = -20\lg\left|\frac{W}{\eta_0}\right|. \quad (8)$$

Положительному значению V соответствует уменьшение амплитуды колебаний пластины по отношению к амплитуде колебаний поверхности основания, т.е. положительной эффективности виброизоляции.

Далее проанализируем эффект виброизоляции при различных условиях.

1. Поршневое возбуждение. Пусть длина волны λ, распространяющейся по поверхности, велика по сравнению с размером пластины $\lambda \gg l$, тогда колебание поверхности под пластиной близко к поршневому $\eta(x_m) \approx \eta_0$. Коэффициенты возбуждения A_n, $n \geq 1$, малы по сравнению с A_0, поскольку числитель в правой части (7) в силу ортогональности собственных функций (5) имеет малые значения при $n \geq 1$. Таким образом, возбуждается только нулевая мода колебаний пластины, и виброизоляция равна

$$V_0 = 20\lg\left|1 - \omega^2/\omega_0^2\right|, \quad (9)$$

где $\omega_0^2 = \frac{kM}{\rho l}$. В этом предельном случае мы получаем простейшую систему "масса–пружина" с одной степенью свободы, виброизоляция которой определяется классическим выражением (9).

2. Жесткая пластина. Пусть пластина имеет достаточно большую изгибную жесткость, чтобы

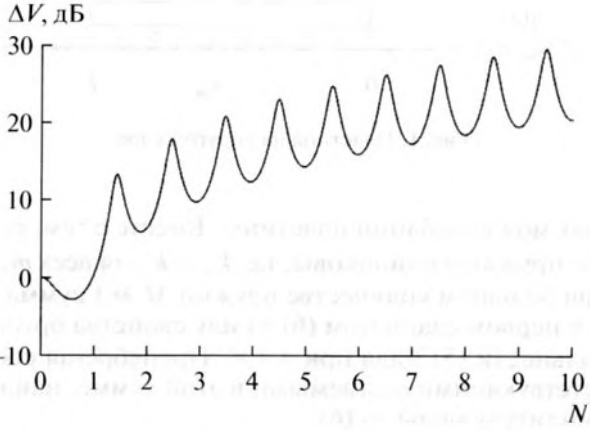

Рис. 2. Зависимость дополнительной виброизоляции от волнового размера пластины $N = l/\lambda$ для жесткой пластины.

можно было пренебречь ее изгибными колебаниями. Если $D \to \infty$, то из (7) находим

$$A_0 = \frac{1}{M}\sum_m \eta(x_m)\frac{1}{1-\omega^2/\omega_0^2},$$

$$A_1 = \frac{1}{M}\sum_m \eta(x_m)\xi_1(x_m)\frac{1}{1-\omega^2/\omega_0^2}, \qquad (10)$$

$$A_n = 0 \text{ при } n \geq 2.$$

При большом количестве резонаторов суммы по m в (10) можно заменить интегрированием, что дает

$$\frac{1}{M}\sum_m \eta(x_m) = \eta_0\frac{e^{2\pi iN}-1}{2\pi iN},$$

$$\frac{1}{M}\sum_m \eta(x_m)\xi_1(x_m) = \eta_0\left(\frac{e^{2\pi iN}+1}{2\pi iN} + \frac{e^{2\pi iN}-1}{2\pi^2N^2}\right), \qquad (11)$$

где $N = l/\lambda$ – волновой размер пластины, т.е. количество длин поверхностной волны на длине пластины.

Виброизоляция пластины может быть представлена в виде

$$V = V_0 + \Delta V, \qquad (12)$$

где ΔV зависит только от длины поверхностной волны и может быть названа дополнительной виброизоляцией, поскольку характеризует изменение виброизоляции относительно V_0 для простейшей системы.

Неравномерное воздействие на пластину со стороны колеблющейся поверхности приводит, с одной стороны, к уменьшению средней силы, действующей на пластину, и уменьшению амплитуды нулевой моды, с другой стороны, кроме нулевой моды возбуждается первая мода. Зависимость ΔV от длины поверхностной волны представлена на рис. 2. При $\lambda > l$ виброизоляция несколько ниже V_0, т.е. в длинноволновом случае наблюдается небольшое снижение виброизолирующего эффекта относительно простейшей модели. Если длина волны меньше l, т.е. $N > 1$, то дополнительная виброизоляция положительна и растет с уменьшением длины волны.

Отметим, что приближение (11) неприменимо для случая, когда на расстоянии между соседними резонаторами, равном l/M, укладывается целое количество длин поверхностной волны λ. Действительно, в этом случае все пружины возбуждаются поверхностью основания синфазно, и $\frac{1}{M}\sum_m \eta(x_m) = \eta_0$, $\frac{1}{M}\sum_m \eta(x_m)\xi_1(x_m) = 0$, и дополнительная виброизоляция ΔV равна нулю.

3. Изоляция отдельной моды. При равномерном расположении пружин вдоль оси x, т.е. в точках x_m, колебания основания возбуждают все моды изгибных колебаний пластины. Для изоляции некоторой выбранной моды с номером $n \geq 0$ достаточно расположить пружины в узлах этой моды, т.е. в точках, для которых $\xi_n(x) = 0$. Поставляя последнее выражение в (6), находим, что $A_n = 0$. При этом количество пружин не может превышать количество узлов изолируемой моды, т.е. n.

4. Виброизоляция на резонансах изгибных колебаний. Заменим суммирование в знаменателе (7) интегрированием $\sum_m \xi_n^2(x_m) = M$. Резонансные частоты изгибных колебаний пластины могут быть найдены из (7):

$$\omega_n^2 = \omega_0^2\left(1 + \kappa\alpha_n^4\right), \qquad (13)$$

где $\kappa = \frac{D}{kMl^3}$. Тогда амплитуды мод могут быть представлены в виде

$$A_n = F_n\frac{\omega_0^2}{\omega_n^2 - \omega^2}, \qquad (14)$$

$$F_n = \frac{1}{M}\sum_m \eta(x_m)\xi_n(x_m). \qquad (15)$$

Введем безразмерный параметр $f_n = F_n/\eta_0$ и назовем его коэффициентом возбуждения моды, поскольку он количественно характеризует влияние поверхностной волны на амплитуду моды.

Заменим в (15) суммирование интегрированием и найдем коэффициент возбуждения моды:

$$f_n = \int_0^1 e^{2\pi iNx}\xi_n(xl)dx. \qquad (16)$$

На рис. 3а представлена зависимость модуля коэффициента возбуждения от волнового размера пластины N для первых шести мод. Коэффициент возбуждения нулевой моды имеет наибольшие значения при $N \ll 1$ и уменьшается с увеличением длины поверхностной волны. Коэффициент возбуждения ненулевых мод имеет максимальное

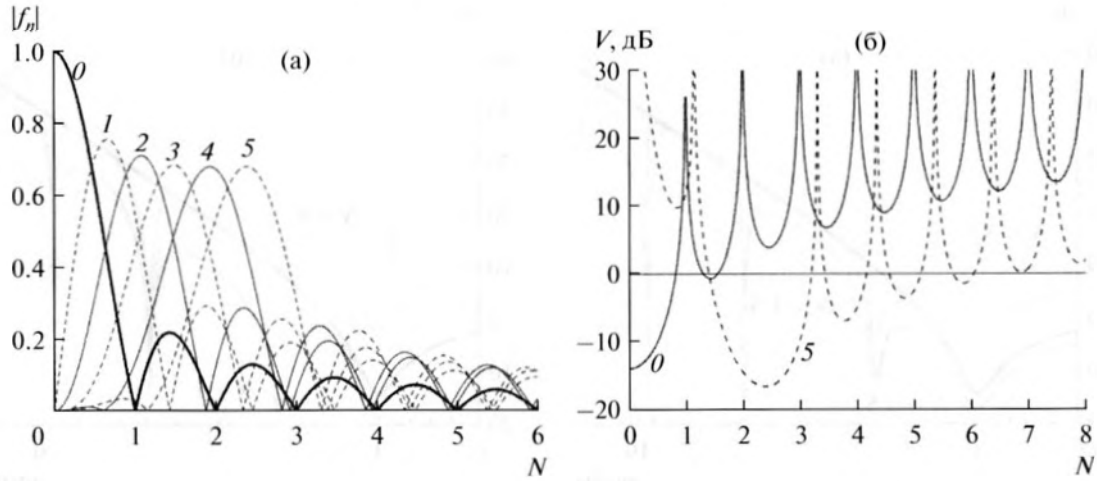

Рис. 3. Коэффициенты возбуждения мод (а) и виброизоляция пластины на резонансной частоте (б) в зависимости от волнового размера пластины. Рядом с кривыми указан номер моды.

значение при $N \approx \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)$ и уменьшается с дальнейшим увеличением N. При этом коэффициенты возбуждения нечетных (пунктирные линии на рис. 3) и четных (сплошные линии) мод при $N \gg n$ имеют близкие значения.

Вторым фактором, определяющим амплитуды мод на резонансных частотах, являются потери в пластине и в пружинах. Пренебрегая потерями в пластине, введем комплексную жесткость пружин, т.е. заменим k на $k(1-i\delta)$, где δ – коэффициент потерь. Обоснованность этого способа учета потерь проанализирована в [9]. На резонансной частоте ω_n, определяемой (14), амплитуда моды имеет вид

$$A_n = \eta_0 f_n \frac{1-i\delta}{-i\delta}. \tag{17}$$

Поскольку на резонансной частоте ω_n другими модами можно пренебречь, то из (3), (8) и (17) находим виброизоляцию на резонансной частоте ω_n:

$$V = -20\lg\left(|f_n\xi_n(0)|\frac{\sqrt{1+\delta^2}}{\delta}\right). \tag{18}$$

Как правило, в виброизолирующих системах $\delta \ll 1$, для этого случая из (18) получаем условие положительной виброизоляции на резонансной частоте:

$$\delta > |f_n\xi_n(0)|. \tag{19}$$

На рис. 3б продемонстрирована виброизоляция (18) на резонансной частоте в зависимости от N для мод $n = 0$ и $n = 5$ при коэффициенте потерь $\delta = 0.2$. Виброизоляция нулевой моды отрицательна при $N < 1$, т.е. $\lambda > l$; если длина поверхностной волны меньше длины пластины, то виброизоляция положительна даже на резонансе. Для моды $n = 5$ в длинноволновом случае ($N < 1$) виброизоляция положительна, область отрицательной виброизоляции задается условием $1.4 < N < 6.1$.

Таким образом, провал виброизоляции, который в простейшей системе, описываемой (9), имеет место на частотах $\omega < \sqrt{2}\omega_0$, при неравномерном воздействии зависит от длины поверхностной волны.

5. Расчетный пример. Пусть изгибная жесткость пластины такова, что первая резонансная частота изгибных колебаний вдвое больше нулевой, т.е. $\omega_2 = 2\omega_0$. Остальные частоты определяются выражением (13). Коэффициент потерь пластины равен $\delta = 0.2$. Найдем виброизоляцию пластины (8) в зависимости от частоты для разных значений N. На рис. 4 представлен результат расчета, жирная линия на обоих графиках – расчетная виброизоляция (9) классической системы "масса–пружина". На рис. 4а представлены кривые для полуцелых значений N, при которых коэффициент возбуждения нулевой моды $|f_0|$ максимален (см. рис. 3а), а на рис. 4б – для целых значений N, для которых коэффициент возбуждения нулевой моды имеет минимальное значение. Приведенный пример демонстрирует, что, во-первых, при $N > 1$ в низкочастотном диапазоне виброизоляция выше, чем в простейшей модели, а во-вторых, при $N > 3.5$ виброизоляция положительна вплоть до первой резонансной частоты изгибных колебаний ω_2. В высокочастотной области $\omega > \omega_2$ виброизоляция может быть как выше, так и ниже классической – это зависит от длины волны, но наблюдается рост виброизоляции с частотой (за исключением резонансов), сопоставимый с ростом классической модели – 12 дБ на октаву.

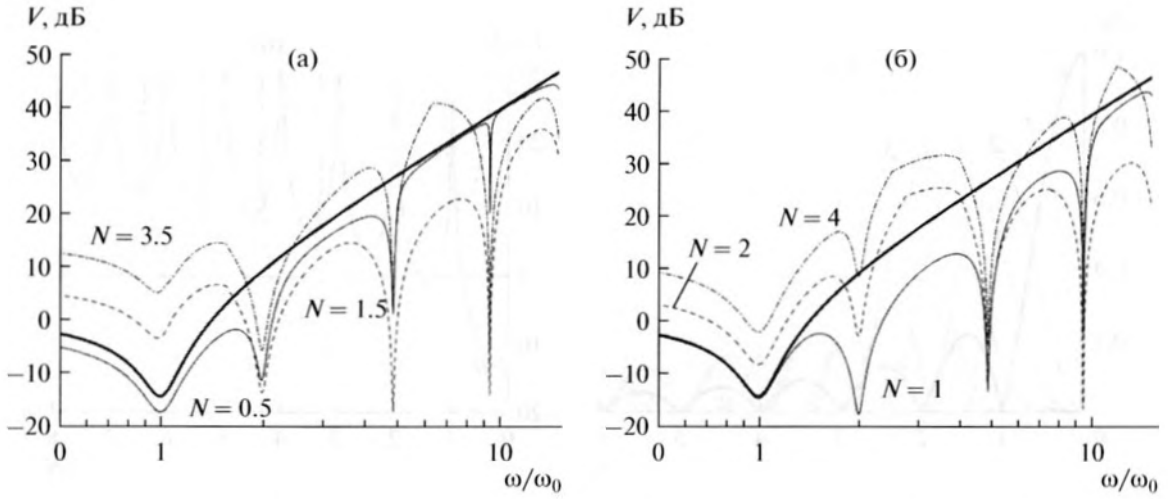

Рис. 4. Расчет виброизоляции пластины для различных значений ее волнового размера. Жирная кривая на обоих графиках – виброизоляция простейшей системы "масса–пружина" с одной степенью свободы.

Итак, в настоящей работе проанализировано влияние неравномерного вибрационного воздействия на эффективность изоляции колебаний пластины конечного размера, отделенной от виброактивного основания системой пружин. Показано, что при неравномерном воздействии средняя сила, действующая на пластину, уменьшается, но возбуждаются ненулевые моды колебаний пластины. Это приводит к тому, что на низких частотах виброизоляция уменьшается в длинноволновом случае, но если длина поверхностной волны меньше размера пластины, то виброизоляция увеличивается. На резонансах изгибных колебаний виброизоляция существенно снижается, но отрицательная виброизоляция наблюдается только в ограниченном диапазоне длин волн, распространяющихся по поверхности основания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борьба с шумом на производстве: Справочник / Под ред. Юдина Е.Я. М.: Машиностроение, 1985. 399 с.
2. *Клюкин И.И.* Виброизоляция упругих прокладок и амортизаторов, находящихся под виброактивными механизмами (обзор) // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 3. С. 321–339.
3. *Ден-Гартог Дж.П.* Механические колебания. Изд. 4. М.: Физматгиз, 1960.
4. *Клюкин И.И.* Виброизоляционная эффективность совокупности групп произвольных дискретных виброизоляторов под виброактивным телом // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 6. С. 873–878.
5. *Ковинская С.И., Никифоров А.С.* О волноводной изоляции изгибных волн // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 6. С. 792–798.
6. *Лапин А.Д.* Рассеяние рэлеевской волны монопольно-дипольными резонаторами // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 1. С. 15–19.
7. *Лапин А.Д.* Поглощение изгибных волн монопольно-дипольными резонаторами в пластине // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 2. С. 280–282.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
9. *Бобровницкий Ю.И.* Гистерезисное демпфирование и причинность // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 3. С. 291–295.