

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.23:537.84.6

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ДИАГРАММНЫХ УРАВНЕНИЙ
В СФЕРОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ДИФРАКЦИИ НА СИЛЬНО ВЫТЯНУТЫХ РАССЕИВАТЕЛЯХ

© 2015 г. А. И. Клеев*, А. Г. Кюркчан**

*Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН
119334 Москва, ул. Косыгина 2
E-mail: klev@kapitza.ras.ru

**Московский технический университет связи и информатики
111024 Москва, ул. Авиамоторная 8а
E-mail: agkmtuci@yandex.ru

Поступила в редакцию 09.04.2014 г.

Получены соотношения метода диаграммных уравнений в вытянутых сфероидальных координатах. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие сходимость и устойчивость численных алгоритмов, основанных на предлагаемом подходе. Результаты расчета сопоставлены там, где это возможно, с данными, полученными другими методами.

Ключевые слова: метод диаграммных уравнений, сфероидальные координаты, рассеяние волн, численные методы теории дифракции.

DOI: 10.7868/S0320791914060100

ВВЕДЕНИЕ

Исследования вопросов дифракции волн, основанные на решении уравнения Гельмгольца при заданных граничных условиях, весьма актуальны в современной теоретической акустике. Так, например, в работах [1, 2] методом разделения переменных в сфероидальной системе координат решена задача о рассеянии плоской волны на трехосном эллипсоиде и вытянутом сфероиде. В частности, в [2] приведены результаты для отношения полуосей до 30. В работе [3] приведены асимптотические решения для высоких частот при дифракции на сфероиде, а в работе [4] дано решение задачи о рассеянии на сильно вытянутых телах. Очевидно, что несомненный интерес представляет создание универсальной методики расчета, основанной на строгой постановке задачи дифракции. В данной статье дано дальнейшее развитие идей работ [5, 6], в которых был предложен новый метод решения задач рассеяния — метод диаграммных уравнений (МДУ) (см. также [7]). Было показано, что данный подход обладает существенными преимуществами перед многими универсальными методиками и весьма эффективен при решении широкого класса задач. Впоследствии в работе [8] МДУ обобщен на случай импедансных краевых условий, показано, что метод сохраняет свою высокую эффективность также в том случае, когда поверхность рассеивателя имеет изломы. В работе [9] МДУ применен, в

частности, для решения задачи о рассеянии волн сплюснутым сфероидом. Было показано, что скорость сходимости МДУ практически не меняется даже при увеличении отношения осей сфероиде до 40 : 1.

В настоящей работе предлагается использовать вытянутые сфероидальные координаты для решения задач рассеяния на сильно вытянутых телах методом диаграммных уравнений.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА

Рассмотрим задачу рассеяния волнового скалярного поля, задаваемого функцией $u^{(0)}$, на препятствии, ограниченном замкнутой поверхностью S . Рассеянное поле $u^{(1)}$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta u^{(1)} + k^2 u^{(1)} = 0, \quad \mathbf{r} \in R^3 \setminus \bar{D}, \quad (1)$$

где D — область, ограниченная поверхностью S , $\bar{D} = D \cup S$. Полагаем, что полное поле $u = u^{(1)} + u^{(0)}$ удовлетворяет граничному условию Дирихле на S :

$$\left. (u^{(1)} + u^{(0)}) \right|_S = 0. \quad (2)$$

Воспользуемся следующим интегральным соотношением [7, 10]:

$$\int_S \left[u(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0}{\partial n'} - \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n'} G_0 \right] dS = \begin{cases} u^{(1)}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in R^3 \setminus \bar{D}, \\ -u^{(0)}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$G_0 = \frac{\exp(-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4)$$

– фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, символом $\partial/\partial n'$ обозначено дифференцирование по направлению внешней нормали в точке интегрирования. Используя граничное условие (2), приходим к следующему выражению для рассеянного поля:

$$u^{(1)}(\mathbf{r}) = - \int_S G_0 \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n'} dS, \quad \mathbf{r} \in R^3 \setminus \bar{D}. \quad (5)$$

Перейдем к вытянутым сфероидальным координатам ξ, η, φ , которые связаны с прямоугольными декартовыми координатами x, y, z соотношениями [11]

$$\begin{aligned} x &= f\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, \\ y &= f\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \\ z &= f\xi\eta, \end{aligned} \quad (6)$$

где $2f$ – межфокусное расстояние.

Полагаем, что поверхность рассеивателя задается выражением:

$$\xi = \Xi(\eta, \varphi), \quad \eta \in [-1, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (7)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} \Big|_S dS &= f \left[(\Xi^2 - 1) \frac{\partial u}{\partial \xi} - (1 - \eta^2) \Xi'_{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \right. \\ &\left. - \frac{\Xi^2 - \eta^2}{(1 - \eta^2)(\Xi^2 - 1)} \Xi'_{\varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] d\eta d\varphi = J(\eta, \varphi) d\eta d\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Воспользуемся известным (см., например, [11]) разложением фундаментального решения уравнения Гельмгольца:

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{ik}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{S_{mn}(c, \eta) S_{mn}(c, \eta')}{N_{mn}(c)} \times \\ &\times R_{|mn}^{(4)}(c, \xi) R_{|mn}^{(1)}(c, \xi') \exp[im(\varphi - \varphi')], \end{aligned} \quad (9)$$

где $S_{mn}(c, \eta)$ – вытянутые сфероидальные угловые функции первого рода, $R_{|mn}^{(4)}(c, \xi) = R_{|mn}^{(1)}(c, \xi) - iR_{|mn}^{(2)}(c, \xi)$, $R_{|mn}^{(1,2)}(c, \xi)$ – вытянутые сфероидальные радиальные функции первого и второго рода соответственно [11, 12]. Норма $N_{mn}(c)$ задается выражением

$$N_{mn}(c) = \int_{-1}^1 S_{mn}^2(c, \eta) d\eta, \quad c = kf. \quad (10)$$

Используя (8) и (9), запишем представление (5) для рассеянного поля в виде

$$u^{(1)}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{mn} \frac{S_{mn}(c, \eta)}{N_{mn}(c)} R_{|mn}^{(4)}(c, \xi) \exp(im\varphi), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 J(\eta, \varphi) S_{mn}(c, \eta) \times \\ &\times R_{|mn}^{(1)}(c, \Xi) \exp(-im\varphi) d\eta d\varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что асимптотика рассеянного поля в дальней зоне имеет вид

$$u^{(1)}(\mathbf{r}) \sim i \frac{\exp(-ikr)}{kr} g(\eta, \varphi) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (13)$$

где диаграмма рассеянного поля $g(\eta, \varphi)$ определяется выражением

$$g(\eta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^n a_{mn} \frac{S_{mn}(c, \eta)}{N_{nm}(c)} \exp(im\varphi). \quad (14)$$

Рассмотрим случай, когда падающее поле $u^{(0)}(\mathbf{r})$ является плоской волной:

$$\begin{aligned} u^{(0)}(\mathbf{r}) &= \exp(-ikr \cos \gamma), \\ \cos \gamma &= \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \end{aligned} \quad (15)$$

В вытянутых сфероидальных координатах для $u^{(0)}(\mathbf{r})$ имеет место следующее представление [11]:

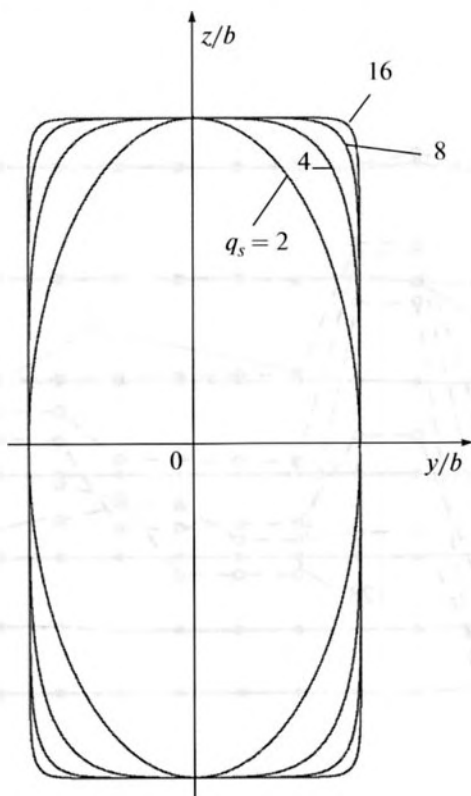


Рис. 1. Поперечное сечение суперэллипсоида для $q_r = 2$, $b/a = 2$, $d = a$. Значение параметра суперэллиптичности q_s указано вблизи соответствующей кривой.

$$u^{(0)}(\mathbf{r}) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-i)^n \frac{S_{mn}(c, \eta_0) S_{mn}(c, \eta)}{N_{mn}(c)} \times \\ \times R_{mn}^{(1)}(c, \xi) \exp[im(\varphi - \varphi_0)], \quad (16) \\ \eta_0 = \cos \theta_0.$$

Используя соотношение (8) и представления (11), (15), можно $J(\eta, \varphi)$ записать в следующем виде:

$$J(\eta, \varphi) = J^{(0)}(\eta, \varphi) + J^{(1)}(\eta, \varphi), \quad (17)$$

где

$$J^{(0)}(\eta, \varphi) = 2f \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-i)^n \frac{S_{mn}(c, \eta_0)}{N_{mn}(c)} \times \\ \times \exp[im(\varphi - \varphi_0)] \left[(\Xi^2 - 1) S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(1)}(c, \Xi) - \right. \\ \left. - (1 - \eta^2) \Xi' S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(1)}(c, \Xi) - \right. \\ \left. - im \frac{\Xi^2 - \eta^2}{(1 - \eta^2)(\Xi^2 - 1)} \Xi' S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(1)}(c, \Xi) \right], \quad (18)$$

$$J^{(1)}(\eta, \varphi) = f \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{a_{mn}}{N_{mn}(c)} \exp(im\varphi) \times \\ \times \left[(\Xi^2 - 1) S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(4)}(c, \Xi) - \right. \\ \left. - (1 - \eta^2) \Xi' S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(4)}(c, \Xi) - \right. \\ \left. - im \frac{\Xi^2 - \eta^2}{(1 - \eta^2)(\Xi^2 - 1)} \Xi' S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(4)}(c, \Xi) \right]. \quad (19)$$

Подставляя разложения (18) и (19) в (12), получаем искомую систему линейных алгебраических уравнений МДУ относительно неизвестных коэффициентов a_{mn} :

$$a_{mn} = a_{mn}^{(0)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} G_{mn, \mu\nu} a_{\mu\nu}, \quad (20) \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

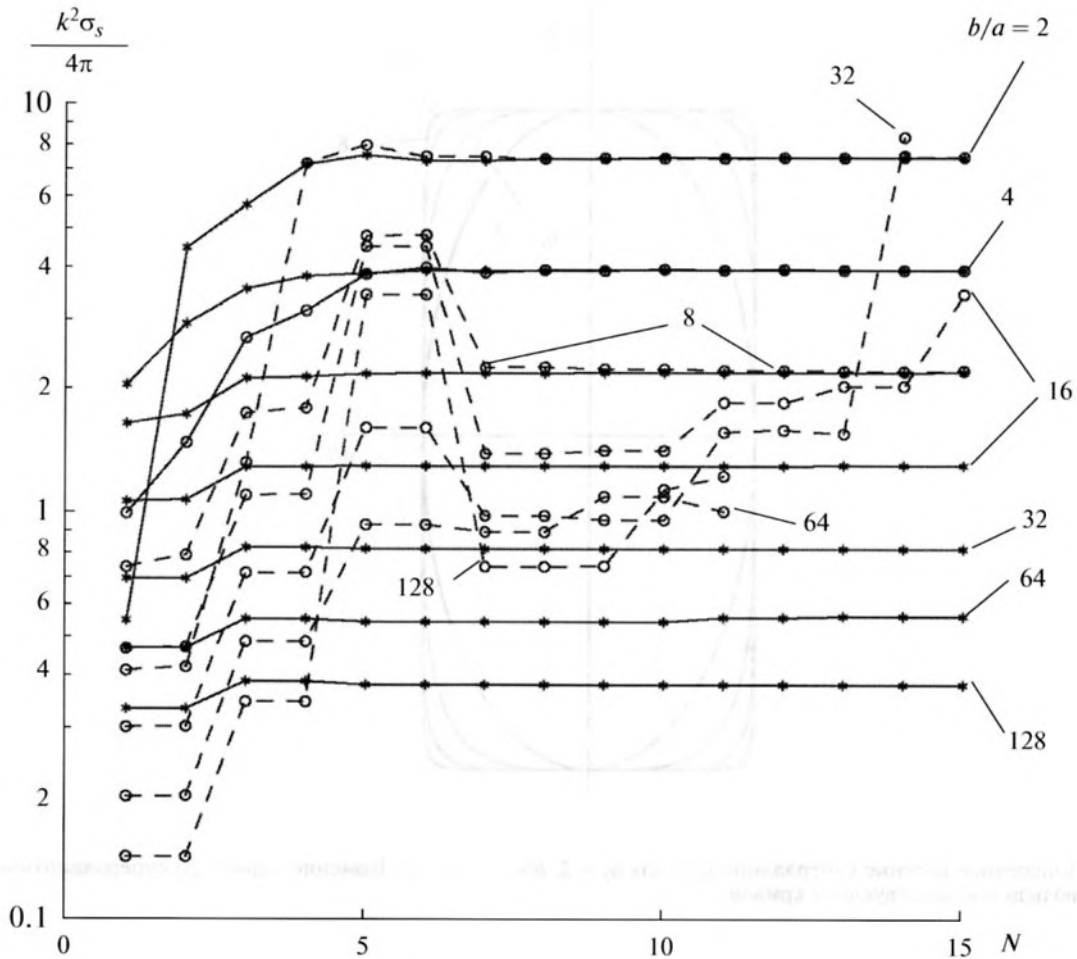


Рис. 2. Зависимость нормированного сечения рассеяния плоской волны на суперэллипсоиде вращения от числа гармоник N . Параметры задачи: $kb = 4$, $q_s = 16$, $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$. Значение параметра b/a указано вблизи соответствующей кривой. Сплошная линия и звездочки – используются вытянутые сфероидальные координаты, штриховая линия и кружочки – сферические координаты.

где

$$\begin{aligned}
 a_{mn}^{(0)} = & \frac{ic}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(1)}(c, \Xi) \exp(-im\varphi) \times \\
 & \times \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} (-i)^{\nu} \frac{S_{\mu\nu}(c, \eta_0)}{N_{\mu\nu}(c)} \exp[i\mu(\varphi - \varphi_0)] \times \\
 & \times \left[(\Xi^2 - 1) S_{\mu\nu}(c, \eta) R_{\mu\nu}^{(1)}(c, \Xi) - \right. \\
 & \left. - (1 - \eta^2) \Xi'_{\eta} S'_{\mu\nu}(c, \eta) R_{\mu\nu}^{(1)}(c, \Xi) - \right. \\
 & \left. - i\mu \frac{\Xi^2 - \eta^2}{(1 - \eta^2)(\Xi^2 - 1)} \Xi'_{\varphi} S_{\mu\nu}(c, \eta) R_{\mu\nu}^{(1)}(c, \Xi) \right] d\eta d\varphi, \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{mn,\mu\nu} = & \frac{ic}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(1)}(c, \Xi) \times \\
 & \times \frac{\exp[-i(m - \mu)\varphi]}{N_{\mu\nu}(c)} \left[(\Xi^2 - 1) S_{\mu\nu}(c, \eta) R_{\mu\nu}^{(4)'}(c, \Xi) - \right. \\
 & \left. - (1 - \eta^2) \Xi'_{\eta} S'_{\mu\nu}(c, \eta) R_{\mu\nu}^{(4)'}(c, \Xi) - \right. \\
 & \left. - i\mu \frac{\Xi^2 - \eta^2}{(1 - \eta^2)(\Xi^2 - 1)} \Xi'_{\varphi} S_{\mu\nu}(c, \eta) R_{\mu\nu}^{(4)'}(c, \Xi) \right] d\eta d\varphi. \quad (22)
 \end{aligned}$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим примеры использования описанной выше методики для решения некоторых задач рассеяния. Систему уравнений (20) решали

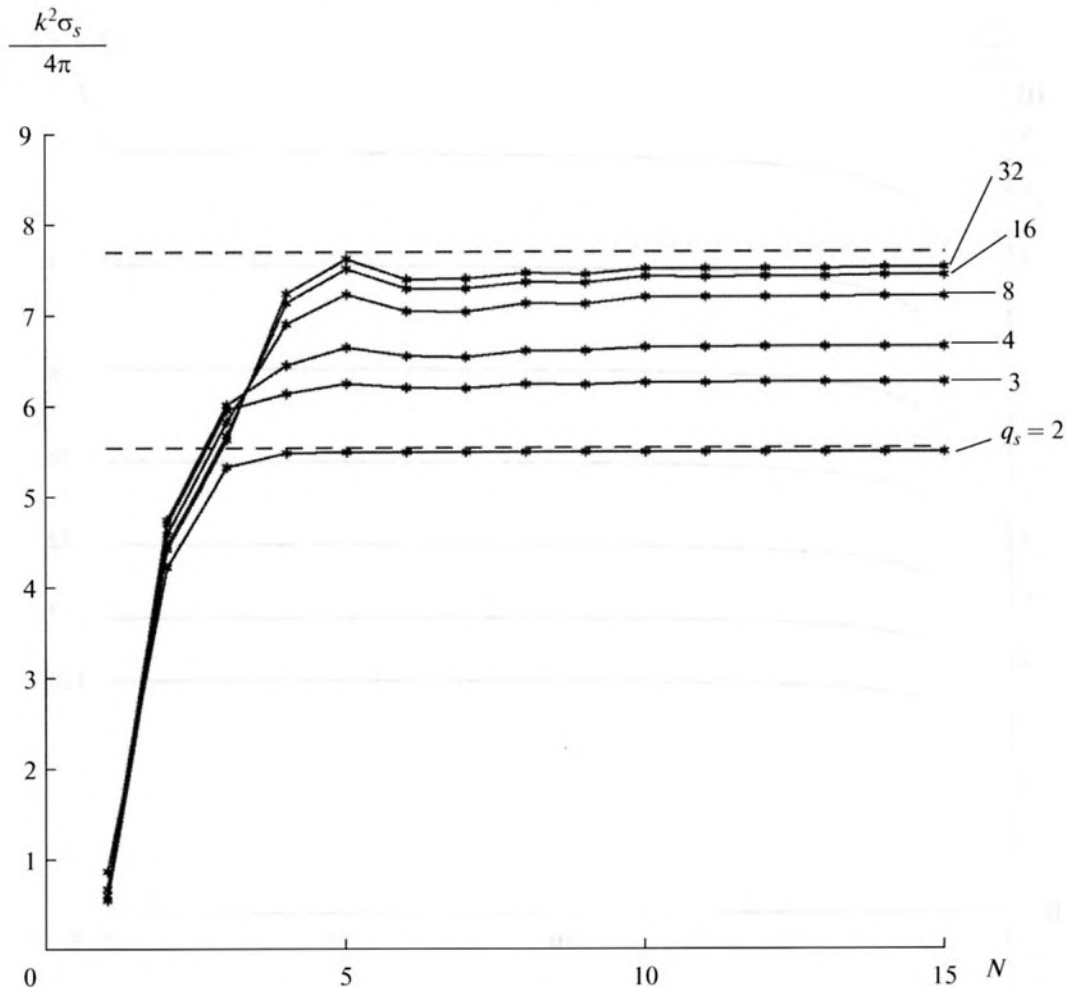


Рис. 3. Зависимость нормированного сечения рассеяния плоской волны на суперэллипсоиде вращения от числа гармоник N . Параметры задачи: $kb = 4$, $b/a = 2$, $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$. Значение параметра суперэллиптичности q_s указано вблизи соответствующей кривой.

численно, используя метод редукции, описанный в работе [13]. Для демонстрации возможностей предлагаемого подхода в настоящей работе рассмотрено рассеяние плоской волны на суперэллипсоиде, поверхность которого в декартовых координатах задается соотношением:

$$\left(\left| \frac{x}{d} \right|^{q_r} + \left| \frac{y}{a} \right|^{q_r} \right)^{q_s/q_r} + \left| \frac{z}{b} \right|^{q_s} = 1, \quad (23)$$

где параметры суперэллиптичности q_r и q_s — действительные числа. При расчетах ограничивались случаем $q_r, q_s \geq 2$, $b/a, b/d > 1$. В этом случае поверхность, задаваемая соотношением (23), является выпуклой и гладкой. Отметим, что при $q_r = q_s = 2$ и $a = d$ рассеиватель является вытянутым эллипсоидом вращения. На рис. 1 приведены осевые сечения суперэллипсоида вращения для

различных значений параметра суперэллиптичности q_s .

Приведем результаты, иллюстрирующие сходимость рассматриваемого метода. Вначале рассмотрим рассеяние на суперэллипсоиде вращения ($q_r = 2$, $a = d$). На рис. 2 приведена зависимость нормированного сечения рассеяния $k^2 \sigma_s / 4\pi$ плоской волны на суперэллипсоиде вращения от числа гармоник N (максимальное значение индекса n в разложении (11) равно $N - 1$). Значение $k^2 \sigma_s / 4\pi$ определяется выражением:

$$\frac{k^2 \sigma_s}{4\pi} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{|a_{mn}|^2}{N_{mn}(c)}. \quad (24)$$

Представленные на рис. 2 результаты были получены двумя способами, основанными на МДУ:

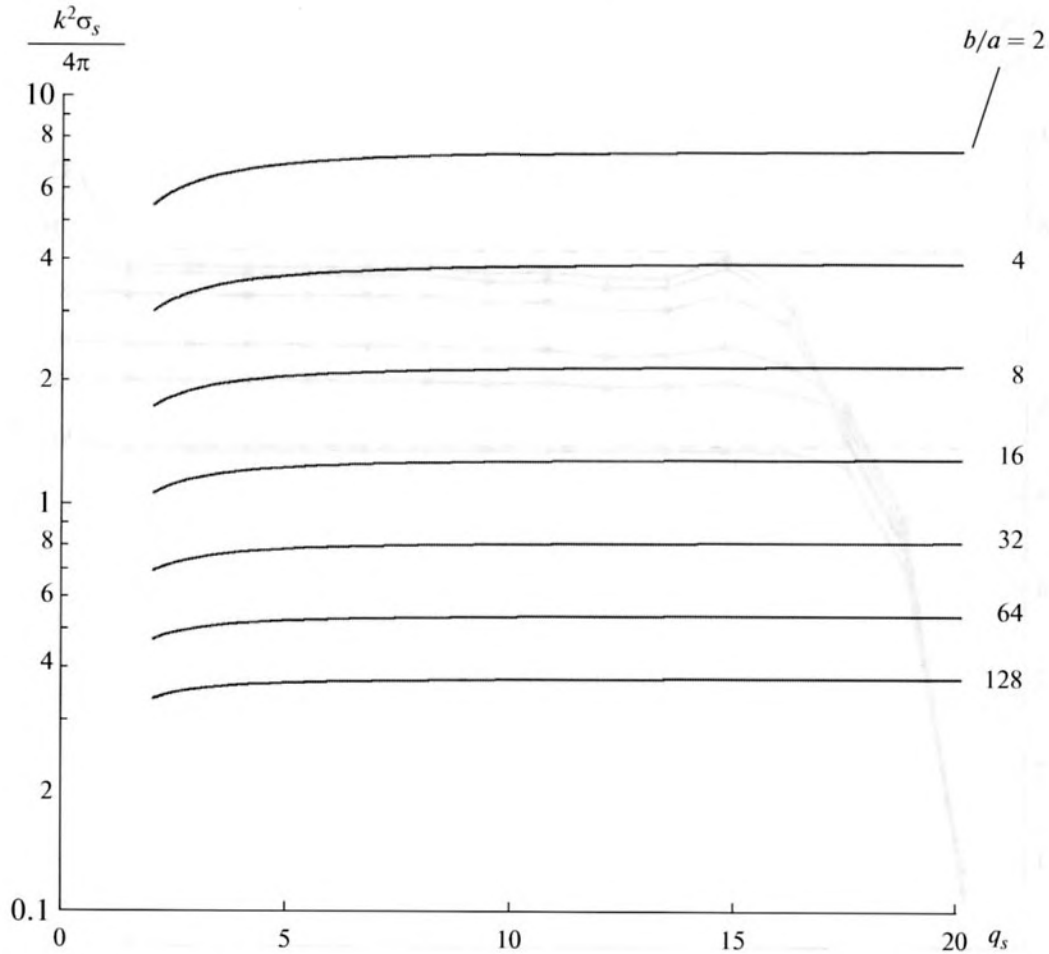


Рис. 4. Зависимость нормированного сечения рассеяния плоской волны на суперэллипсоиде вращения от параметра суперэллиптичности q_s . Параметры задачи: $kb = 4$, $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$. Значение параметра b/a указано вблизи соответствующей кривой.

сплошная линия и звездочки иллюстрирует результаты, полученные при использовании вытянутых сфероидальных координат. Результаты расчета по методике, использующей МДУ, уравнения которого получены в сферических координатах, показаны штриховой линией и кружочками. Из приведенных результатов следует, что при использовании сфероидальных координат скорость сходимости практически не зависит от степени вытянутости рассеивателя (в рассматриваемом случае – от отношения b/a). Отметим, что использование сферических координат позволяет рассчитывать дифракцию на телах, степень вытянутости которых не слишком велика (до $b/a = 8$ в рассматриваемом случае).

При расчетах осуществлялась проверка точности выполнения оптической теоремы [14]. В рассматриваемом случае оптическая теорема может быть записана в виде

$$\sigma_s = -\frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re}[g(\theta_0, \varphi_0)]. \quad (25)$$

При расчетах контролировали величину нормированной погрешности выполнения оптической теоремы Δ_{opt} , задаваемой выражением

$$\Delta_{\text{opt}} = \frac{4\pi}{k^2 \sigma_s} \left| \frac{k^2 \sigma_s}{4\pi} + \operatorname{Re}[g(\theta_0, \varphi_0)] \right| \quad (26)$$

и характеризующую точность выполнения оптической теоремы. Во всех приведенных в настоящей работе примерах при использовании вытянутых сфероидальных координат $\Delta_{\text{opt}} < 10^{-5}$.

С целью дополнительной верификации излагаемого подхода было проведено сравнение ре-

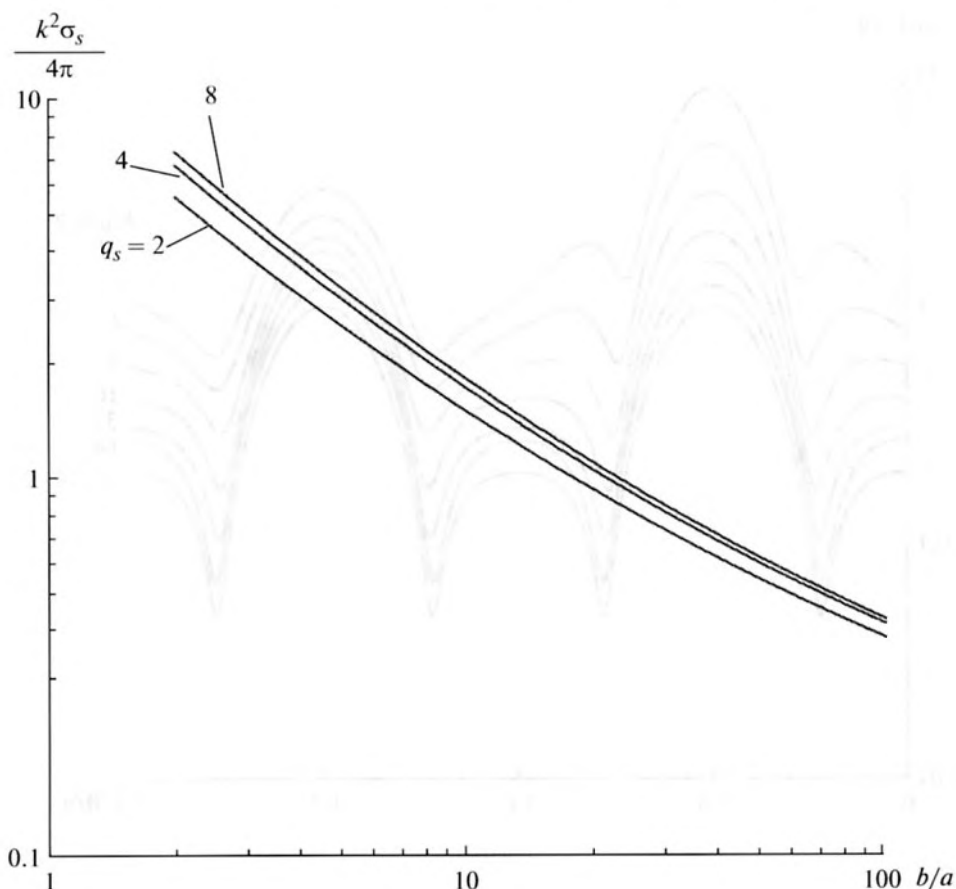


Рис. 5. Зависимость нормированного сечения рассеяния плоской волны на суперэллипсоиде вращения от отношения полуосей. Параметры задачи: $kb = 4$, $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$. Значение параметра суперэллиптичности q_s указано вблизи соответствующей кривой.

зультатов, полученных при использовании МДУ в вытянутых сфероидальных координатах, с результатами решения аналогичных задач, полученными методом продолженных граничных условий [15]. На рис. 3 представлена зависимость нормированного сечения рассеяния плоской волны на суперэллипсоиде вращения от числа N гармоник. Пунктиром показаны результаты расчетов из работы [15] для сфероида (нижний пунктир) и цилиндра (верхний пунктир) для тех же параметров задачи.

Алгоритм расчета, реализованный на основе описанного в работе метода, оказался достаточно эффективным. Это позволило исследовать решение задачи рассеяния в широком диапазоне параметров, характеризующих геометрию рассеивателя. Приведем некоторые результаты такого исследования. На рис. 4 приведена зависимость нормированного сечения рассеяния плоской волны на суперэллипсоиде вращения от параметра

суперэллиптичности q_s . Как видно, влияние параметра суперэллиптичности уменьшается с ростом степени вытянутости рассеивателя (отношения b/a): значения нормированного сечения рассеяния на эллипсоиде вращения и на цилиндре мало различаются при $b/a \gg 1$. Это утверждение может быть проиллюстрировано также результатами, представленными на рис. 5, на котором приведены зависимости нормированного сечения рассеяния плоской волны на суперэллипсоиде вращения от отношения полуосей, полученные для различных значений параметра суперэллиптичности.

На рис. 6 приведена диаграмма рассеяния плоской волны на суперэллипсоиде вращения. Данные результаты иллюстрируют положение, впервые сформулированное ранее (см., например, [9]): высокая сходимость алгоритмов, реализованных на основе МДУ, связана, в частности, с тем, что диаграмма рассеяния — искомая характе-

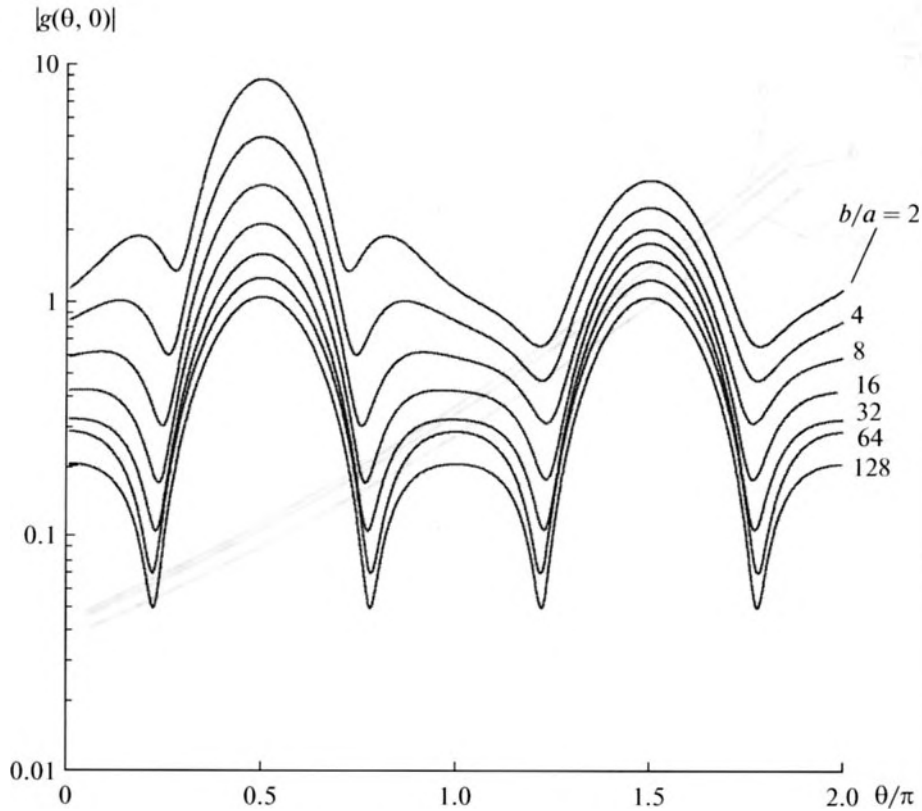


Рис. 6. Диаграмма рассеяния плоской волны на суперэллипсоиде вращения. Параметры задачи: $kb = 4$, $q_s = 16$, $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$. Значение параметра b/a указано вблизи соответствующей кривой.

ристика в МДУ — является функционалом от распределения поверхностных источников.

Выше были рассмотрены случаи, когда рассеиватель является телом вращения. Необходимо отметить, что эффективность предлагаемой методики достаточно высока для того, чтобы применить ее для решения существенно более сложной задачи — дифракции на теле общего вида. На рис. 7 приведен пример решения такой задачи. Представлена диаграмма рассеяния плоской волны на так называемом суперквадрикe. Поверхность рассеивателя в этом случае описывается соотношением (23), в котором $q_r = q_s$. Как следует из этого соотношения, поверхность суперквадрика в рассматриваемом случае напоминает призму со скругленными краями и почти плоскими гранями. Сравнение результатов, представленных на рис. 7, с аналогичными результатами, полученными для суперэллипсоида вращения (см. рис. 6), показывает, что “уплощение” рассеивателя приводит к

возрастанию амплитуды рассеяния как в прямом, так и в обратном направлениях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведены соотношения метода диаграммных уравнений (МДУ) в вытянутых сфероидалных координатах для численного моделирования рассеяния волн. Обсуждается сходимость и устойчивость численных алгоритмов, реализованных на основе МДУ. Точность решения контролируется посредством вычисления баланса потоков мощностей для падающей и рассеянной волн (проверка выполнения “оптической теоремы”). Исследованы различные примеры, демонстрирующие эффективность предложенного подхода. Показано, что данный метод обладает высоким быстродействием и универсальностью, что продемонстрировано, в частности, на примере рассеивателя, не являющегося телом вращения.

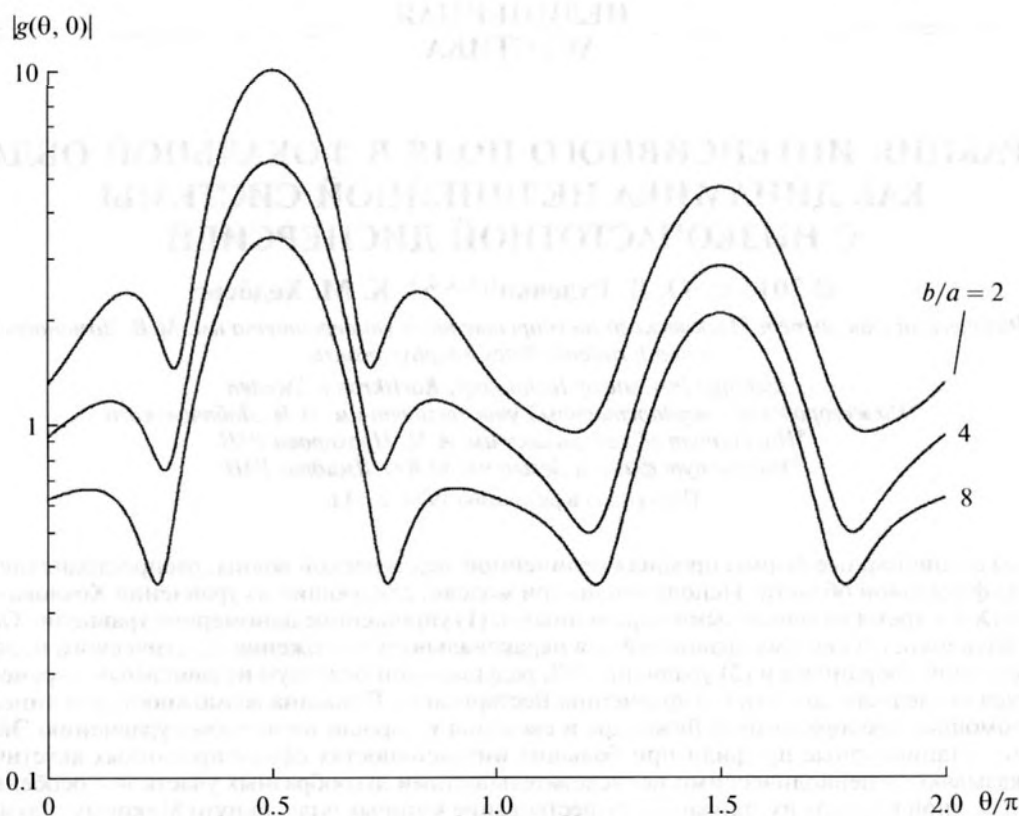


Рис. 7. Диаграмма рассеяния плоской волны на суперквадрате. Параметры задачи: $kb = 4$, $d = a$, $q_s = q_r = 16$, $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$. Значение параметра b/a указано вблизи соответствующей кривой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-02-00062.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федорюк М.В. Дифракция звуковых волн на трехосном эллипсоиде // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 1. С. 160–164.
2. Абрамов А.А., Дышко А.Л., Конохова Н.Б., Левитина Т.В. О численно-аналитическом исследовании задач дифракции плоской звуковой волны на идеальных вытянутых сфероидах и трехосных эллипсоидах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1995. Т. 35. № 9. С. 1374–1400.
3. Клещев А.А. Рассеяние звука идеальными сфероидами в предельном случае высоких частот // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 5. С. 699–704.
4. Андронов И.В. Расчет дифракции на сильно вытянутых телах вращения // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 1. С. 28–35.
5. Кюркчан А.Г. Об одном новом интегральном уравнении в теории дифракции // ДАН. 1992. Т. 325. № 2. С. 273–275.
6. Кюркчан А.Г. Об одном методе решения задач дифракции волн на рассеивателях конечных размеров // ДАН. 1994. Т. 337. № 6. С. 728–731.
7. Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И. Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения. М.: ООО “ИД Медиа Паблшер”, 2014. 226 с.
8. До Дык Тханг, Кюркчан А.Г. Эффективный метод решения задач дифракции волн на рассеивателях, имеющих изломы границы // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 1. С. 51–58.
9. Кюркчан А.Г., Клеев А.И. Решение задач дифракции волн на рассеивателях конечных размеров методом диаграммных уравнений // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40. № 6. С. 897–905.
10. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 311 с.
11. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
12. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 588 с.
13. Кюркчан А.Г., Демин Д.Б. Моделирование характеристик рассеяния волн телами с диэлектрическим покрытием при помощи импедансных граничных условий // Электромагнитные волны и электронные системы. 2003. Т. 8. № 11–12. С. 22–32.
14. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
15. Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И. Решение задачи дифракции волн методом продолженных граничных условий // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 2. С. 1–10.