

ДИФРАКЦИЯ ИНТЕНСИВНОГО ПОЛЯ В ФОКАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ
КАК ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ
С НИЗКОЧАСТОТНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ© 2015 г. О. В. Руденко^{1, 2, 3, 4, 5}, К. М. Хедберг²¹Физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru²Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden³Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского⁴Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН⁵Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН

Поступила в редакцию 19.06.2014 г.

Описаны стационарные формы профиля нелинейной акустической волны, распространяющейся в пределах фокальной области. Используются три модели, следующие из уравнения Хохлова–Заболотского (ХЗ) с тремя независимыми переменными: (1) упрощенное одномерное уравнение Островского–Вахненко, (2) система уравнений для параксиального разложения акустического поля в ряд по поперечной координате и (3) уравнение ХЗ, редуцированное к двум независимым переменным. Структура последнего аналогична уравнению Вестервельга. Показана возможность его линеаризации с помощью преобразования Лежандра и сведения к хорошо изученному уравнению Эйлера–Трикоми. Стационарные профили при больших интенсивностях сфокусированных акустических волн оказываются периодическими последовательностями дугообразных участков с особенностями производной в точках их сшивания, существование которых подчеркнуто Маковым. Такие профили возникают во многих нелинейных системах с низкочастотной дисперсией. Профили с разрывами (ударными фронтами) изменяют свою форму при прохождении через фокальную область и не являются стационарными. Оценка максимальных давлений и интенсивностей в фокусе согласуется с полученными ранее данными компьютерных расчетов и экспериментальных измерений.

Ключевые слова: HIFU, нелинейность, низкочастотная дисперсия, ударная волна, разрыв производной, фокусировка, предельные поля.

DOI: 10.7868/S0320791915010104

ВВЕДЕНИЕ

Фокусированные акустические поля большой интенсивности (HIFU) используются во многих ультразвуковых технологиях и приборах медицинской техники. Фокусировка нужна для локализации акустической энергии. С ростом локализации роль нелинейных эффектов возрастает. В сходящихся волнах образуются ударные фронты. Возникает нелинейное поглощение. В фокальной области принципиален учет дифракции. Анализ разнообразных явлений, связанных с нелинейной фокусировкой, дан в обзоре [1] (раздел 5). Там же приведен список публикаций. Укажем здесь только на некоторые из них, где были получены принципиальные результаты, необходимые для дальнейшего изложения.

В работе [2] рассчитан коэффициент концентрации и показано, что он уменьшается с ростом интенсивности из-за нелинейного затухания волны (см. также классический обзор Наугольных [3]). Однако нелинейность иногда способна, на-

против, увеличить коэффициент концентрации из-за более “острой” фокусировки высших гармоник [4, 5]. Расчет этого эффекта проведен Островским и Сутиным [5] на основе поэтапного подхода. Подход состоит в следующем.

При “острой” фокусировке (рис. 1) можно выделить два этапа – две области значений осевой координаты x . На первом этапе, который простирается от поверхности вогнутого излучателя до начала фокальной зоны, волна является сферически сходящейся. Она испытывает здесь главным образом нелинейные искажения, а дифракция несущественна. На втором этапе, в пределах короткой перетяжки длиной l_* , фронт волны становится плоским, а ее профиль искажается практически только из-за фазовых сдвигов между гармониками. Сдвиги появляются благодаря низкочастотной дисперсии, вызванной дифракцией (см. учебник [6], глава 7, § 4, а также глава 9, § 6).

Как показано на рис. 1, наиболее интересная для нас область перетяжки имеет форму, близкую

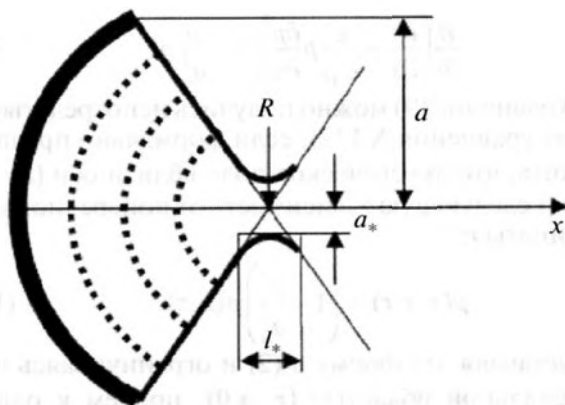


Рис. 1. Схема "острой" фокусировки с обозначениями параметров.

к цилиндрической. Для пучков, круглых в поперечном сечении, длина этого цилиндра равна l_* , а радиус основания равен a_* :

$$l_* = \frac{2R^2}{l_d} \ll R, \quad a_* = \frac{aR}{l_d} \ll a. \quad (1)$$

В этой формуле $l_d = \omega a^2 / 2c$ – дифракционная длина, R – радиус кривизны акустического излучателя (фокусное расстояние), a – исходный (в сечении $x = 0$) радиус пучка. Здесь и в дальнейшем фокусировку будем считать сильной, а дифракцию – слабой. Именно в этом случае, когда $l_d \gg R$, можно сформировать наиболее интенсивные поля в фокусе.

Цилиндрическую область будем рассматривать как лучевую трубку, в которой распространяется плоская нелинейная волна. Теперь, суммируя сказанное, можно сформулировать математическую модель.

ПАРАКСИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И ПРОФИЛИ ДИФРАГИРУЮЩИХ ВОЛН

Как известно, нелинейные пучки описываются уравнением ХЗ [7]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) = \frac{c}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad (2)$$

Здесь p – акустическое давление, x – аксиальная координата, r – радиальная полярная координата, $\tau = t - x/c$ – время в движущейся системе отсчета, которая сопровождает волну, бегущую со скоростью звука c . Нелинейный параметр среды обозначен как ε . История вывода уравнения (2) и получения основных результатов изложена в обзоре [8].

Решения уравнения ХЗ для слабого проявления нелинейности, найденные методом последовательных приближений, описаны в работах [4, 9].

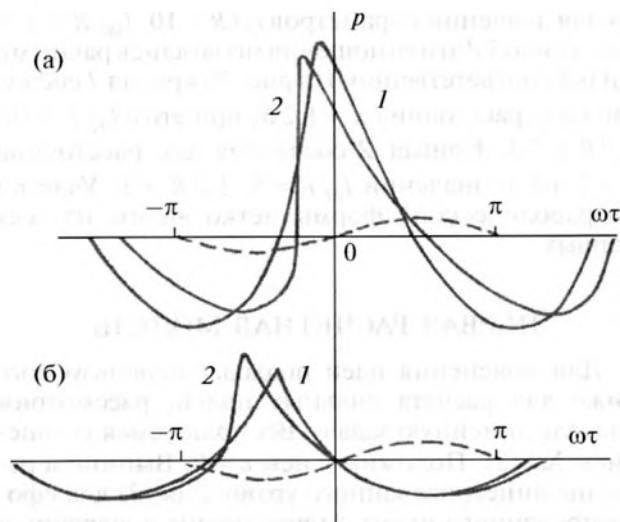


Рис. 2. Типичные профили периодической волны по данным аналитических (кривые 1) [11] и численных [12] (кривые 2) расчетов. Штриховая кривая – исходный гармонический профиль волны. На рис. 2а изображены профили в фокусе, на рис. 2б – за фокусом.

Первые решения для сильно выраженной нелинейности, приводящей к образованию разрывов, получены в работе [10] (см. также [1, 6]). Вблизи оси пучка решение отыскивалось в виде разложения в ряд по поперечной координате:

$$p(x, r, \tau) = p_0(x, \tau) - \frac{r^2}{2a^2} p_2(x, \tau) + \frac{r^4}{4a^4} p_4(x, \tau) + \dots \quad (3)$$

Ограничиваясь двумя первыми членами разложения (3), можно получить систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p_0 \frac{\partial p_0}{\partial \tau} \right) = -\frac{2c}{a^2} p_2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p_2 \frac{\partial (p_0 p_2)}{\partial \tau} \right) = 0.$$

Ее удалось решить точно [10].

Решение системы (4) для периодической волны из-за дифракции ведет себя иначе, чем в ее отсутствие [10]. Положительный полупериод уменьшается по длительности, отрицательный – увеличивается. Положительное пиковое давление превышает модуль отрицательного давления, а при определенном соотношении параметров – и свое исходное значение. пилообразная волна содержит разрывы, несимметричные относительно нулевого уровня. Гладкие участки профиля между разрывами представляют собой не прямые линии (как в отсутствие дифракции), а кривые, похожие на параболы.

Такие формы профиля неоднократно наблюдались в экспериментах, рассчитывались аналитически и численно (рис. 2). На рис. 2а изображены два профиля в фокусе $x = R$. Кривая 1 считается

на для значений параметров $l_d/R = 10$, $l_{sh}/R = 3.3$. Для кривой 2 эти отношения полагались равными 2 и 0.8 соответственно. На рис. 26 кривая 1 сосчитана для расстояния $x = 1.2R$; при этом $l_d/R = 10$, $l_{sh}/R = 3.3$. Кривая 2 сосчитана для расстояния $x = 2.4R$ и значений $l_d/R = 5$, $l_{sh}/R = 2$. Участки “параболической” формы четко видны на всех кривых.

ПЕРВАЯ РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ

Для пояснения идеи подхода, используемого ниже для расчета сильных полей, рассмотрим вначале линейную задачу. Воспользуемся уравнением ХЗ (2). Положим в нем $\varepsilon = 0$. Выпишем решение линеаризованного уравнения (2) для сфокусированного пучка с гауссовским поперечным распределением амплитуды. При этих условиях решение имеет наиболее простую форму [6]:

$$\frac{p(x, r, \tau)}{P_0} = \frac{1}{f(x)} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2 f^2(x)}\right) \sin(\omega\tau + \varphi(x, r)). \quad (5)$$

Здесь p – акустическое давление, P_0 – его амплитуда на оси пучка (при $r = 0$). Функции, входящие в решение (5), определяются выражениями

$$f = \sqrt{\left(1 - \frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{x}{l_d}\right)^2}, \quad (6)$$

$$\varphi = \arctg \frac{x/l_d}{1 - x/R} + \pi H(x - R) - \frac{r^2 l_d}{a^2} \frac{d}{dx} \ln f.$$

Здесь H – функция Хевисайда, равная единице при положительных значениях аргумента и нулю при его отрицательных значениях. В пределах “перетяжки” длиной l_* (рис. 1), в приближении $l_d \gg R$, решение (5), (6) упрощается:

$$\frac{p}{P_0} = \frac{l_d}{R} \exp\left(-\frac{r^2 l_d^2}{a^2 R^2}\right) \times \sin\left(\omega\tau + \arctg\left(\frac{l_d}{R^2}(x - R)\right) - \frac{r^2 l_d}{a^2 R}\right). \quad (7)$$

Нетрудно проверить, что на оси пучка решение (7) удовлетворяет уравнению, более просто по сравнению с исходным уравнением (2):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial \tau} = -\frac{2c}{a_*^2} p. \quad (8)$$

Здесь a_* – ширина перетяжки (1). Длина перетяжки l_* (1) (рис. 1) определяется как расстояние между двумя точками на оси, в которых ширина пучка равна $\sqrt{2}a_*$.

Теперь перейдем к рассмотрению нелинейной задачи. Примем, что уравнение ХЗ в пределах перетяжки можно заменить очевидным нелинейным обобщением уравнения (8):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) = -\frac{2c}{a_*^2} p. \quad (9)$$

Уравнение (9) можно получить непосредственно из уравнения ХЗ (2), если формально предположить, что акустическое поле вблизи оси ($r = 0$) имеет следующую зависимость от поперечной координаты r :

$$p(x, \tau, r) = \left(1 - \frac{r^2}{a_*^2}\right) p(x, \tau). \quad (10)$$

Подставляя эту форму в (2) и ограничиваясь параксиальной областью ($r \rightarrow 0$), приходим к одномерной модели (9). Эта модель радикально упрощает качественный анализ нелинейной низкочастотной дифракции. Очевидно, что одномерное уравнение (9) гораздо проще двумерного уравнения (2) как для аналитического, так и для численного исследования.

Очевидно также, что форма (10) есть частный случай параксиального разложения (3). Действительно, полагая в разложении (3)

$$p_2 = p_0 = p(x, \tau), \quad a = a_*, \quad (11)$$

придем к выражению (10). Условие (11) означает, что значение акустического давления на оси и ширина пучка должны быть связаны между собой.

Следует указать, что уравнение (9) – довольно популярная модель в теории волн. Его часто называют уравнением Островского–Вахненко [13]. Оно было получено для неакустических задач – океанологии (внутренние волны во вращающемся океане [14]) и математической физики (нахождение решений, похожих на солитоны [15]).

Для сокращения записи формул уравнение (9) используется далее в безразмерной форме:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = -\gamma^2 V. \quad (12)$$

Безразмерные обозначения вводятся следующим образом:

$$V = \frac{R p}{l_d p_0}, \quad \theta = \omega\tau, \quad z = \frac{x l_d}{l_{sh} R}, \quad (13)$$

$$l_{sh} = \frac{c^3 \rho}{\varepsilon \omega p_0}, \quad \gamma^2 = \frac{l_{sh}}{R}.$$

Здесь l_{sh} – длина образования разрыва для плоской волны с теми же значениями исходной амплитуды и частоты, что и у сфокусированного пучка.

СТАЦИОНАРНАЯ ВОЛНА В ПЕРЕТЯЖКЕ. ПЕРВАЯ МОДЕЛЬ

Из физических соображений следует, что фокальная область играет роль волновода в том смысле, что ширина пучка и амплитуда волны практически постоянны в пределах короткой пе-

ретьяжки. К тому же, нелинейное укручение переднего фронта волны подавлено дисперсионной расфазировкой гармоник, вызванной дифракцией ограниченного пучка. Эти соображения согласуются с приближениями, использованными в работе [5]. Они могут служить пояснением того, почему в перетьяжке формируется стационарная бегущая волна:

$$V = V(\theta + \beta z). \quad (14)$$

Здесь β – константа, зависящая от разницы между скоростью распространения стационарной волны и скоростью звука. Известно, что волна в выпуклом (например, гауссовском) пучке с максимумом на оси распространяется быстрее звука (см. рис. 2, а также [1, 6]), и поэтому $\beta > 0$.

Волноводный режим распространения нелинейных пучков ранее исследовался Маковым [16] по аналогии с явлением самоканализации в лазерной физике [17] (см. также [18]). Маков показал аналитически, что гладкие участки профиля представляют собой параболы.

Решение уравнения (12) в виде (14) описывает стационарную волну, форма которой не меняется при распространении. Эта подстановка сводит уравнение (12) в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\beta V - \frac{V^2}{2} \right) = -\gamma^2 V. \quad (15)$$

Анализ уравнения (15) проведен в работе [15]. Однако для лучшего понимания результатов удобно кратко воспроизвести здесь основные формулы в наших обозначениях и применительно к рассматриваемой здесь физической постановке задачи.

Автономное уравнение (15) один раз интегрируется и сводится к уравнению первого порядка:

$$\frac{dV}{d\theta} = \pm \gamma \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{V^3 - \frac{3}{2} \beta V^2 + \frac{\beta^3}{2} (1-C)}}. \quad (16)$$

Здесь C – константа интегрирования. Удобно использовать обозначения $V = \beta U$, $T = \theta \gamma \sqrt{2/3}$ и переписать (16) так:

$$\begin{aligned} \dot{U} &\equiv \frac{dU}{dT} = \pm \frac{\sqrt{\Theta(U)}}{\beta|1-U|}, \\ \Theta &= U^3 - \frac{3}{2}U^2 + \frac{1}{2}(1-C) = \\ &= (U-U_1)(U-U_2)(U-U_3). \end{aligned} \quad (17)$$

При значениях константы $0 < C < 1$ подкоренной полином $\Theta(U)$ имеет три различных действительных корня: $U_1 < U_2 < U_3$. Они равны:

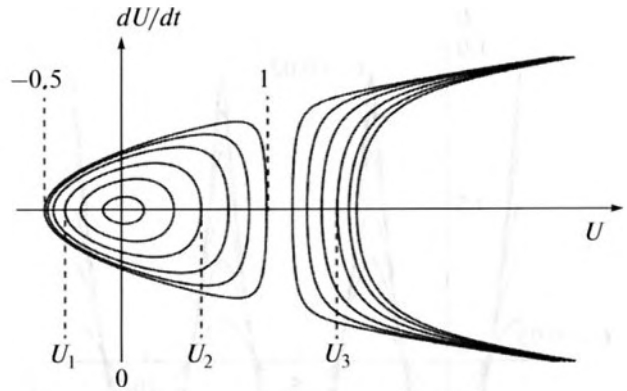


Рис. 3. Фазовый портрет $\dot{U}(U)$ для уравнения (17).

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right), \quad U_2 = \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right), \\ U_3 &= \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\cos \varphi = 1 - 2C$.

Фазовый портрет $\dot{U}(U)$ для уравнения (17) построен на рис. 3. Фазовые траектории существуют в двух областях: $U_1 < U < U_2$ и $U > U_3$. С физической точки зрения наиболее интересны замкнутые траектории, которые соответствуют периодическим колебаниям. Для этого случая ($U_1 < U < U_2 < U_3$) решение уравнения (17) имеет вид [19]:

$$\frac{1-U_3}{\sqrt{U_3-U_1}} F(\varphi, q) + \sqrt{U_3-U_1} E(\varphi, q) = \pm \frac{1}{2}(T - T_0). \quad (19)$$

Здесь T_0 – вторая константа интегрирования, F, E – неполные эллиптические интегралы первого и второго рода [20],

$$q = \sqrt{\frac{U_2-U_1}{U_3-U_1}}, \quad \sin \varphi = \sqrt{\frac{U-U_1}{U_2-U_1}}. \quad (20)$$

Профили колебаний во времени для значений $C = 0.95, 0.75, 0.5, 0.25, 0.1, 0.02$ показаны на рис. 4. Видно, что при малых амплитудах форма колебаний близка к гармонической. При возрастании амплитуды (C стремится к нулю) форма искажается. Появляется острый положительный пик, соответствующий разрыву производной.

Полагая $U = U_2$, $\varphi = \pi/2$, $\pm(T - T_0) = T_{\text{пер}}/2$ в формулах (19) и (20), получим выражение для периода $T_{\text{пер}}$:

$$\frac{1-U_3}{\sqrt{U_3-U_1}} K(q) + \sqrt{U_3-U_1} E(q) = \frac{T_{\text{пер}}}{4}. \quad (21)$$

Здесь $K(q)$ и $E(q)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода [20]. Период $T_{\text{пер}}$ зависит от значений констант γ, β, C .

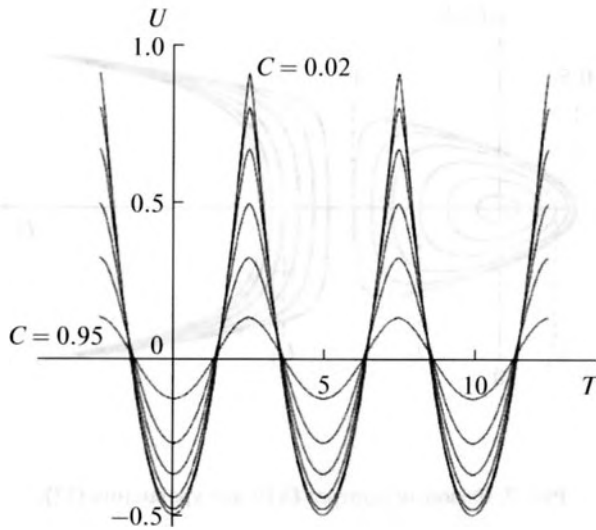


Рис. 4. Формы колебаний для различных значений $C = 0.95, 0.75, 0.5, 0.25, 0.1, 0.02$. С увеличением амплитуды (C стремится к нулю) профиль волны искажается и положительный пик становится острым.

Интересно рассмотреть предельные случаи слабых и сильных нелинейных искажений. Для линейного случая, когда константа C близка к единице, решение (16) содержит только одну гармонику

$$V = \beta\sqrt{1-C}\sin\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\beta}}(\theta - \theta_0)\right). \quad (22)$$

Нормированная частота этой волны $\gamma/\sqrt{\beta}$.

В противоположном пределе, когда $C = 0$, подкоренной полином в уравнении (16) принимает вид

$$V^3 - \frac{3}{2}V^2 + \frac{\beta^3}{2} = (V - \beta)^2\left(V + \frac{\beta}{2}\right). \quad (23)$$

При этом решение (16) имеет неперриодическую форму квадратичной параболы:

$$V = \frac{\gamma^2}{6}(\theta - \theta_0)^2 - \frac{\beta}{2}. \quad (24)$$

Предельная кривая, к которой сходится семейство замкнутых траекторий (гладких функций) при значениях константы $C \rightarrow 0$ на рис. 3, тоже замкнута, но содержит особенности при $U = 1$. Это результат неравномерной сходимости. Замкнутость особой кривой означает, что периодическая волна может быть сконструирована в виде комбинации парабол, сдвинутых на период относительно друг друга. Если период равен 2π , константа θ_0 должна равняться $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots, \pm 2n\pi, \dots$, где n — натуральное число.

В общем случае переход от одной параболы к другой происходит скачком. Физически скачок представляет собой фронт ударной волны сжатия. Две соседние параболы, соответствующие значе-

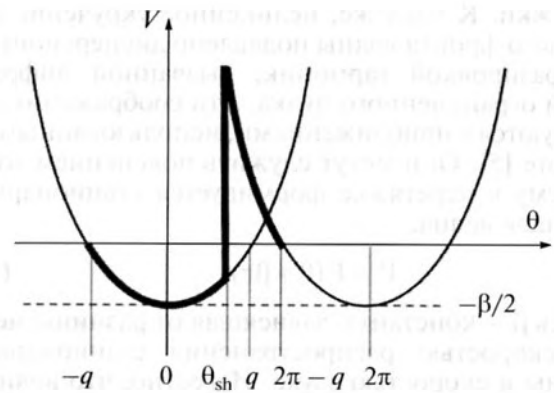


Рис. 5. Построение периодического профиля волны с ударным фронтом.

ниям $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = 2\pi$ (24), показаны на рис. 5. Положение разрыва θ_{sh} определяется из закона сохранения количества движения. Он эквивалентен требованию, чтобы площадь под кривой $V(\theta)$ равнялась нулю. Это значит, что равен нулю следующий интеграл по периоду:

$$\int_{-q}^{\theta_{sh}} \left(\frac{\gamma^2}{6}\theta^2 - \frac{\beta}{2}\right) d\theta + \int_{\theta_{sh}}^{2\pi-q} \left(\frac{\gamma^2}{6}(\theta - 2\pi)^2 - \frac{\beta}{2}\right) d\theta = 0. \quad (25)$$

Здесь $q = \sqrt{3\beta}/\gamma$. Из уравнения (25) определим положение разрыва на рис. 3:

$$\theta_{sh} = \pi - \sqrt{\frac{3\beta}{\gamma^2} - \frac{\pi^2}{3}}. \quad (26)$$

Однако константа β , определяющая скорость распространения волны (см. (14)), в формуле (26) не определена. Необходимо дополнительно использовать условие стационарности: положение фронта θ_{sh} в профиле стационарной волны не может изменяться в процессе распространения. Иными словами, скорость движения фронта должна совпадать со скоростью гладких участков профиля. Скорость фронта в сопровождающей волну системе координат равна

$$\frac{d\theta_{sh}}{dz} = -\frac{1}{2}(V_1 + V_2). \quad (27)$$

Она определяется значениями поля V_1, V_2 непосредственно перед ударным фронтом и сразу за ним [21, 22]. С другой стороны, равенство скоростей означает, что

$$\frac{d\theta_{sh}}{dz} = -\beta. \quad (28)$$

Подставляя значение координаты ударного фронта (26) в уравнения двух парабол, изображенных на рис. 5, найдем:

$$V_{1,2} = \frac{\pi}{3}\gamma^2\left(\frac{\pi}{3} \mp \sqrt{\frac{3\beta}{\gamma^2} - \frac{\pi^2}{3}}\right). \quad (29)$$

Теперь из (27)–(29) можно найти нужное значение скорости волны в сопровождающей системе координат:

$$\beta = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \gamma^2. \quad (30)$$

Для этой скорости профиль волны стационарен. Интересно рассчитать соответствующую форму профиля. Эта форма изображена на рис. 6, который отвечает предельной кривой ($C \rightarrow 0$) на рис. 4. Профиль состоит из семейства парабол, сдвинутых по оси времени на период 2π :

$$V_n = \frac{\gamma^2}{6} \left((\theta - 2\pi n)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right). \quad (31)$$

Максимальное и минимальное значения переменной V равны

$$V_{\max} = \beta, \quad V_{\min} = -\frac{\beta}{2}. \quad (32)$$

Математические результаты этого раздела использованы ниже для конкретной задачи – оценки параметров акустической волны большой интенсивности, сформированной в результате фокусировки.

ПАРАМЕТРЫ СИЛЬНОГО ПОЛЯ В ФОКАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Профили стационарной волны изображены на рис. 4 и 6. Вычисления проведены в разделе 3. Как следует из формул (32) и обозначений (30) и (13), максимальное и минимальное акустические давления определяются формулами

$$V_{\max} = 2|V_{\min}| = \beta, \quad p_{\max} = 2|p_{\min}| = \frac{\pi^2 c^2 \rho}{18 \varepsilon} \left(\frac{a}{R}\right)^2. \quad (33)$$

Предельное значение интенсивности достигается для стационарной волны, показанной на рис. 6, которая имеет не только специальную форму профиля, но и определенную амплитуду, не зависящую от исходной амплитуды P_0 и частоты ω . Это явление насыщения впервые исследовано в работе [2]. Для сильно сфокусированной волны в воде и угла фокусировки 60° оценка максимального давления равна $p_{\max} \approx 100$ МПа ≈ 1000 атм. Интенсивность в фокальной области

$$I = \frac{1}{2\pi\rho c} \int_0^\pi p^2(\theta) d\theta = \frac{1}{40} \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 \frac{\rho c^3}{\varepsilon^2} \left(\frac{a}{R}\right)^4. \quad (34)$$

Она приблизительно оценивается как $I \approx 50$ кВт/см². Предельное значение 96 кВт/см² фокальной интенсивности было найдено в результате численного моделирования, а значение 33 кВт/см² измерено экспериментально [23]. Это величины того же порядка, но несколько выше и ниже аналитической оценки (34). Интенсивности, близкие к предельному значению, уже достигнуты в современных медицинских устройствах [24].

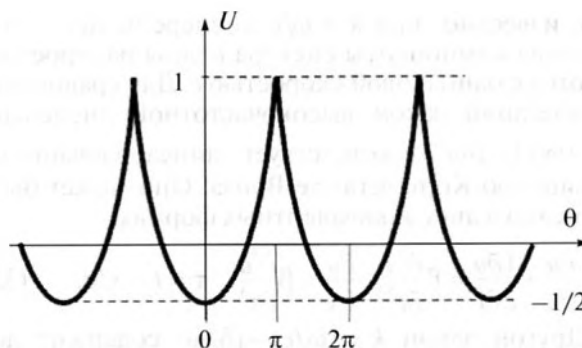


Рис. 6. Стационарная нелинейная периодическая волна в фокальной области – в перетяжке пучка.

Поскольку рассмотрена одномерная модель реальной трехмерной фокусировки, согласие с экспериментальными данными можно считать удовлетворительным. Даже численные расчеты могут соответствовать эксперименту лишь по порядку величины, поскольку уравнение ХЗ справедливо для волн, наклоненных под малыми углами к оси. Однако для того, чтобы создать предельно сильные поля, нужно использовать “острую” фокусировку. С другой стороны, возможны неточности и в экспериментальных данных. Известно, что абсолютные измерения акустической интенсивности сопряжены с техническими проблемами. К примеру, трудно воспроизвести в эксперименте распределение интенсивного поля на поверхности электромеханического преобразователя, которое соответствовало бы распределению, использованному при численном моделировании. Следовательно, согласие между любыми экспериментальными и теоретическим данными может быть точным лишь по порядку величин.

Профили, похожие на параболические, получались аналитически в работах [11, 25, 26] и в численных и лабораторных экспериментах (см., например, [23]). Можно заметить, что разрывные асимметричные профили с ударным фронтом, как на рис. 5, можно также реализовать в фокальной области при нелинейном распространении сфокусированного пучка. Однако эти профили не будут стационарными и должны изменять свою форму в результате нелинейных потерь энергии на ударных фронтах. Профили с особенностью производной (рис. 6) способны, по-видимому, переносить максимальную энергию волны в фокальную область с минимальными нелинейными потерями “по пути” от излучателя к фокусу.

ПРИМЕРЫ ДРУГИХ СИСТЕМ С НИЗКОЧАСТОТНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Дифракция – это процесс тем более сильный, чем ниже частота волны. Существует множество других систем с подобными законами дисперсии.

Как известно, при $k = \omega/c$ дисперсии нет – частотные компоненты спектра волны распространяются с одинаковой скоростью c . Для сравнения, простейший закон высокочастотной дисперсии $k = (\omega/c) - \beta\omega^3$ соответствует линеаризованному уравнению Кортевега–де Вриза. Оно может быть записано в двух эквивалентных формах:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \beta \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}, \quad \tau = t - x/c. \quad (35)$$

Другой закон $k = (\omega/c) - (\delta/\omega)$ содержит дополнительный член, растущий с уменьшением частоты. Следовательно, он соответствует низкочастотной дисперсии. Дифференциальное уравнение для этого случая есть

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = -\delta u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} = -\delta u. \quad (36)$$

Эволюционные уравнения (35), (36) имеют довольно общий характер. Их вывод зависит от конкретной физической системы, но результат очевиден. Нелинейные члены входят аддитивно в исходные системы уравнений. Если нелинейность слабая, не диспергирующая и квадратично зависит от полевых переменных, нелинейные обобщения этих уравнений имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial \tau} = \beta \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = -\delta u. \quad (37)$$

Первое – это уравнение Кортевега–де Вриза, а второе – Островского–Вахненко (12), которое приведено выше для моделирования интенсивной акустической волны в фокальной области. Более общее уравнение с переменными коэффициентами использовалось ранее для иллюстрации формальной схемы решения нелинейных волновых уравнений методом групп Ли. Метод “априорного использования симметрий”, предложенный в работе [26], состоит в обобщении данной модели на более сложную модель, допускающую дополнительные симметрии (так называемые преобразования групп эквивалентности). Уравнение (12) может описывать волны различной физической природы, и возможная область его физических приложений довольно широка. Два примера иллюстрируют универсальность этой модели.

Пример 1. Релятивистское уравнение Клейна–Гордона. Для волновой функции ψ оно записывается так:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = k_0^2 \psi, \quad k_0 = \frac{mc}{\hbar}. \quad (38)$$

Закон дисперсии для (38) имеет вид:

$$\frac{\omega}{c} = \pm \sqrt{k^2 + k_0^2}. \quad (39)$$

При $k_0 \ll k$ получим упрощенное соотношение, позволяющее записать эволюционное уравне-

ние (36) для волны, бегущей в положительном направлении оси x :

$$k \approx \frac{\omega}{c} - \frac{k_0^2 c}{2\omega}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x \partial \tau} = -\frac{k_0^2 c}{2} \psi. \quad (40)$$

Пример 2. Рассмотрим плоский акустический волновод. Здесь линеаризованная модель – это двумерное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (41)$$

Колебательная скорость u обращается в ноль на жестких стенках, расположенных при $y = 0$ и $y = d$, поэтому решение (41) ищется в форме

$$u = u(x, t) \sin\left(\frac{\pi n y}{d}\right). \quad (42)$$

Здесь ось x направлена вдоль волновода, n – номер моды. Подставляя (42) в (41), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\pi n}{d}\right)^2 u. \quad (43)$$

При слабом влиянии дисперсии мы можем использовать метод медленно изменяющегося профиля [21, 22]. В результате получим упрощенное уравнение вида (36):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} = -\frac{c}{2} \left(\frac{\pi n}{d}\right)^2 u. \quad (44)$$

СТАЦИОНАРНАЯ ВОЛНА В ПЕРЕТЯЖКЕ. ВТОРАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим систему уравнений (4), к которым сводится уравнение ХЗ вблизи оси пучка. Для волны, имеющей выделенное направление пространства – ось x , решение ищем в виде

$$p = p\left(\tau_1 = \tau + \frac{\Delta}{c} x, r\right). \quad (45)$$

Здесь Δ – приращение скорости волны на оси пучка, вызванное дифракцией. Как следует из формулы (6), вблизи геометрического фокуса

$$\Delta \approx \frac{cl_d}{\omega R^2} = \frac{a^2}{2R^2}. \quad (46)$$

Система (4) при подстановке в нее (45) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{\Delta}{c} p_0 - \frac{\varepsilon}{2c^3 \rho} p_0^2 \right) &= -\frac{2c}{a^2} p_2, \\ \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{\Delta}{c} p_2 - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p_0 p_2 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь и далее индекс при переменной τ_1 опущен. Система (47) сводится к одному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{\Delta}{c} p_0 - \frac{\varepsilon}{2c^3 \rho} p_0^2 \right) = \\ = -\frac{2c^2 \varepsilon^2 \rho}{a^2} (G\tau + F) \left(\frac{\Delta}{c} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p_0 \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (48)$$

отличному от (9). В нем G, F – константы интегрирования. При $G = 0$ уравнение (48) удается проинтегрировать. Для нормированного давления $P = p_0 / (\rho c^2)$ запишем его так:

$$\left(\frac{\Delta}{\varepsilon} - P \right) \frac{d^2 P}{d\tau^2} - \left(\frac{dP}{d\tau} \right)^2 = -\frac{2c^2}{a^2} F \left(\frac{\Delta}{\varepsilon} - P \right)^{-1}. \quad (49)$$

Интегрируя один раз, имеем

$$\frac{dP}{d(\omega\tau)} = \pm \sqrt{E + P} \left(\frac{\Delta}{\varepsilon} - P \right)^{-1}. \quad (50)$$

Здесь константы интегрирования обозначены буквами ω, E . Первая константа имеет смысл частоты, а вторая определяется условием равенства нулю интеграла от акустического давления по периоду волны. Интегрируя второй раз, придем к искомому решению:

$$\pm \omega(\tau - \tau_n) = 2 \left(\frac{\Delta}{\varepsilon} + E \right) (E + P)^{1/2} - \frac{2}{3} (E + P)^{3/2}. \quad (51)$$

Как следует из формулы (50), максимальное значение давления $P = \Delta/\varepsilon$ достигается при обращении производной (50) в бесконечность. Периодическая волна, сконструированная путем сдвига кривых (51) на период друг относительно друга (за счет выбора констант τ_n), изображена на рис. 7, кривая 1. Эта форма похожа на профиль, изображенный на рис. 6. Однако на рис. 6 скачок производной имел конечное значение, а на рис. 7 показана особенность типа “cusp”. Константу $E = \Delta/4\varepsilon$ для этой волны находим из условия

$$\int_{-E}^{\Delta/\varepsilon} P \left(\frac{\Delta}{\varepsilon} - P \right) \frac{dP}{\sqrt{E + P}} = 0. \quad (52)$$

Максимальное акустическое давление с учетом (46) в этом случае

$$p_{\max} = 4|p_{\min}| = \frac{c^2 \rho}{2\varepsilon} \left(\frac{a}{R} \right)^2 \quad (53)$$

оказывается примерно таким же, как и давление, рассчитанное по первой модели (33).

СТАЦИОНАРНАЯ ВОЛНА В РАМКАХ ОБЩЕГО ПОДХОДА

Проведенные расчеты были основаны на предположениях о поведении поля вблизи оси пучка (10) (модель 1) и (3) (модель 2). Если отказаться от этих предположений и искать решение уравнения ХЗ (2) в виде (45), удастся свести ХЗ к уравнению с меньшим числом переменных:

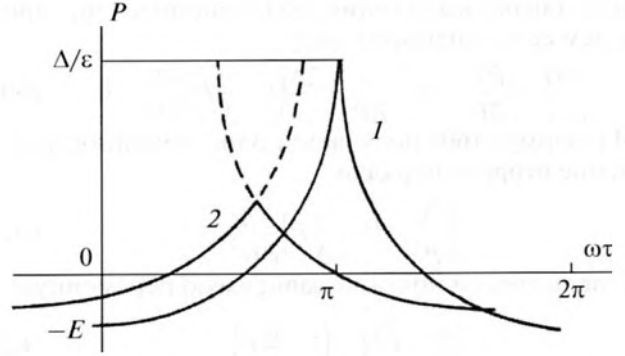


Рис. 7. Стационарная нелинейная периодическая волна (51) в перетяжке пучка. Волна наибольшей (кривая 1) и меньшей (кривая 2) амплитуды.

$$\Delta_{\perp} p - \frac{2\Delta \partial^2 p}{c^2 \partial \tau^2} = -\frac{\varepsilon}{c^4 \rho} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2}. \quad (54)$$

Интересно, что (54) формально совпадает с уравнением Вестервельта [27] для среды без диссипации, хотя физический смысл переменных здесь иной. Уравнение (54) в частном случае при $\Delta = 0$ для шелевых пучков с поперечной декартовой координатой y получено в работе [16] (формула (3)). В ней сказано, что найти общее решение не представляется возможным. Это не совсем так, поскольку некоторые уравнения типа (54) допускают линеаризацию и формально могут быть решены точно.

Чтобы показать это, запишем (54) в виде системы уравнений:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \rho \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2\Delta}{c^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(p - \frac{\varepsilon}{2\Delta c^2 \rho} p^2 \right) = 0. \quad (55)$$

Здесь u – вспомогательная переменная, которой удобно придать смысл колебательной скорости. Введем для удобства нормированные переменные $P = p/\rho c^2$, $U = u/c$. При этом система (55) запишется так:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2\Delta}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(P - \frac{\varepsilon}{2\Delta} P^2 \right) = 0. \quad (56)$$

Совершим преобразование Лежандра [28], считая поперечную координату y и время τ функциями акустического давления P и колебательной скорости U :

$$\tau = T(P, U), \quad y = Y(P, U). \quad (57)$$

Производные, входящие в систему (56), примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau} &= \frac{1}{D} \frac{\partial Y}{\partial U}, \quad \frac{\partial U}{\partial \tau} = -\frac{1}{D} \frac{\partial Y}{\partial P}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial U}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial P}. \end{aligned} \quad (58)$$

Якобиан перехода в формулах (58) равен

$$D = \frac{\partial T \partial Y}{\partial P \partial U} - \frac{\partial T \partial Y}{\partial U \partial P}. \quad (59)$$

Подставляя выражения (58) в систему (56), приведем ее к линейному виду:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial Y}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial U} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial P} + \frac{2\Delta}{c} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\Delta} P\right) \frac{\partial Y}{\partial U} = 0. \quad (60)$$

Из формул (60) получается одно линейное уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial P^2} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\Delta} P\right) \frac{\partial^2 Y}{\partial U^2}. \quad (61)$$

Теперь введем новую независимую переменную

$$\Pi = \left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right)^{2/3} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\Delta} P\right). \quad (62)$$

При этом из (61) получается уравнение Эйлера–Трикоми [28]:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \Pi^2} = \Pi \frac{\partial^2 Y}{\partial U^2}. \quad (63)$$

Это гиперболическое уравнение (в области значений $\Pi > 0$) становится эллиптическим (для значений $\Pi < 0$). Его решения хорошо изучены.

Нетрудно показать, что уравнение (54) имеет частное решение, аналогичное решению Римана уравнений гидродинамики:

$$p = \Phi \left(\tau \pm \frac{y}{c} \sqrt{2\Delta - \frac{\varepsilon}{c^2} p} \right). \quad (64)$$

Здесь Φ – произвольная функция своего аргумента. Это решение обращает в ноль Якобиан (59), поэтому оно является особым и не содержится в общем решении, которое дается уравнением Эйлера–Трикоми (63).

Анализ результатов, следующих из уравнения (63) применительно к полю в фокальной области, выходит за рамки настоящей статьи и может быть проведен позднее.

Отметим также, что уравнение (54) сводится к простейшему виду:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Q^2}{\partial \tau^2} = \Delta_{\perp} Q, \quad Q = \Delta - \frac{\varepsilon}{\rho c^2} p. \quad (65)$$

Форма (65) допускает разделение переменных $Q = T(\tau)R(r)$. Функции отдельных переменных удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$T'' + \lambda^2 T = 0, \quad \Delta_{\perp} R + \frac{\lambda^2}{c^2} R^2 = 0. \quad (66)$$

Результаты, полученные в рамках аналогичного подхода (для случая $\Delta = 0$), изложены в работе [16] (см. также [26]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проанализированы формы интенсивной акустической волны в фокальной области. Рассчитаны периодические профили стационарных волн. С усилением нелинейности гладкий профиль стремится к форме с разрывом производной в

точках, где достигается максимальное положительное давление. Профили, содержащие ударные фронты, изменяются вследствие нелинейного затухания и не могут быть стационарными. В частности, нестационарные разрывные профили, изображенные на рис. 5, описываются автомодельными решениями [26]. Как пример использования аналитических результатов, получены формулы для оценки предельной интенсивности сфокусированной волны. Численная оценка лежит в промежутке между аналогичной оценкой, полученной при численном моделировании нелинейной фокусировки, и данными экспериментальных измерений. Остается открытым вопрос о формировании стационарных профилей в фокальной области и об их универсальности как промежуточных асимптотик в смысле Зельдовича–Баренблатта [29]. Для ответа на этот вопрос нужно решить нелинейную обратную задачу [30] – рассчитать структуру полей на поверхности излучателя, обеспечивающих требуемую структуру поля вблизи фокуса.

Авторы признательны Ю.Н. Макову за профессиональные и полезные обсуждения результатов.

Исследования поддержаны грантом РФФ № 14-22-00042.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rudenko O.V. Nonlinear sawtooth-shaped waves // *Physics—Uspekhi (Adv. Phys. Sci.)*. 1995. V. 38. № 9. P. 965–989.
2. Naugol'nykh K.A., Romanenko E.V. Amplification factor of a focusing system as a function of sound intensity // *Sov. Phys. Acoustics*. 1959. V. 5. № 2. P. 191–195.
3. Naugol'nykh K.A. Absorption of finite-amplitude waves / In: *High-intensity ultrasonic fields*. Ed. by Rozenberg L.D. New York: Plenum Press, 1971. P. 3–74.
4. Rudenko O.V., Soluyan S.I., Khokhlov R.V. Confinement of a quasilane beam of periodic perturbations in nonlinear medium // *Sov. Phys. Acoust.* 1974. V. 19. № 6. P. 556–559.
5. Ostrovskii L.A., Sutin A.M. Focusing of acoustic waves of finite amplitude // *Sov. Phys. Doklady*. 1975. V. 221. № 6. P. 1300–1303.
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. 2-е изд. М.: Наука, 1990.
7. Zabolotskaya E.A., Khokhlov R.V. Quasi-plane waves in nonlinear acoustics of limited beams // *Sov. Phys. Acoustics*. 1969. V. 15. № 1. P. 35–41.
8. Rudenko O.V. The 40th anniversary of the Khokhlov–Zabolotskaya equation // *Acoust. Phys.* 2010. V. 56. № 4. P. 457–466.
9. Novikov B.K., Rudenko O.V., Timoshenko V.I. *Nonlinear underwater acoustics*. New York: AIP, 1987.
10. Rudenko O.V., Soluyan S.I., Khokhlov R.V. Nonlinear theory of paraxial sound beams // *Sov. Phys. Doklady*. 1975. V. 20. № 5. P. 836–837.

11. *Hamilton M.F., Rudenko O.V., Khokhlova V.A.* A new method for calculating the paraxial region of intense acoustic beams // *Acoust. Phys.* 1997. V. 43. № 1. P. 39–44.
12. *Bakhvalov N.S., Zhileikin Ya.M., Zabolotskaya E.A.* Nonlinear theory of sound beams. New York: AIP, 1987.
13. *Brunelli J.C., Sakovich S.* Hamiltonian structures for the Ostrovsky–Vakhnenko equation // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2013. V. 18. P. 56–62.
14. *Ostrovsky L.A.* Nonlinear internal waves in a rotating ocean // *Okeanologia.* 1978. V. 18. № 2. P. 181–191.
15. *Vakhnenko V.A.* Solitons in a nonlinear model medium // *J. Phys. A.* 1992. V. 25. P. 4181–4187.
16. *Makov Yu.N.* Waveguide propagation of sound beams in nonlinear medium // *Acoust. Phys.* 2000. V. 46. № 5. P. 596–599.
17. *Chiao R.Y., Garmire E., Townes C.H.* Self-trapping of optical beams // *Phys. Rev. Lett.* 1964. V. 13. P. 479–481.
18. *Rudenko O.V., Sapozhnikov O.A.* Self-action effects for wave beams containing shock fronts // *Physics–Uspekhi (Adv. Phys. Sci.)*. 2004. V. 47. № 9. P. 907–922.
19. *Gradstein I.S., Ryshik M.* Tables of series, products, and integrals. V. 1, 2. Germany: Verlag Harri Deutsch, 1981.
20. *Abramovitz M., Stegun I.* Handbook of mathematical functions. New York: Dower Publications, 1970.
21. *Rudenko O.V., Soluyan S.I.* Theoretical foundations of nonlinear acoustics. New York: Plenum, Consultants Bureau, 1977.
22. *Rudenko O.V., Gurbatov S.N., Hedberg C.M.* Nonlinear acoustics through problems and examples. Canada, Trafford, 2010.
23. *Bessonova O.V., Khokhlova V.A., Bailey M.R., Canney M.R., Crum L.A.* Focusing of high power ultrasound beams and limiting values of shock wave parameters // *Acoust. Phys.* 2009. V. 55. № 4–5. P. 463–473.
24. *Wu F., Wang Z.B., Chen W.Z., et al.* Extracorporeal focused ultrasound surgery for treatment of human solid carcinomas: early Chinese clinical experience // *Ultrasound Med. Biol.* 2004. V. 30. № 2. P. 245–260.
25. *Hamilton M.F., Khokhlova V.A., Rudenko O.V.* Analytical method for describing the paraxial region of finite amplitude sound beams // *J. Acoust. Soc. Am.* 1997. V. 101. № 3. P. 1298–1307.
26. *Ibragimov N.H., Rudenko O.V.* Principle of an *a priori* use of symmetries in the theory of nonlinear waves // *Acoust. Phys.* 2004. V. 50. № 4. P. 406–419.
27. *Westervelt P.J.* Parametric acoustic array // *J. Acoust. Soc. Am.* 1963. V. 35. № 4. P. 535–537.
28. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Hydrodynamics. New York: Academic Press, 1986.
29. *Barenblatt G.I., Zeldovich Ya.B.* Intermediate asymptotics in mathematical physics // *Russian Mathematical Surveys.* 1971. V. 26. № 2. P. 45–61.
30. *Rudenko O.V.* High-power focused ultrasound: nonlinear effects, shear wave excitation and medical diagnostics (review) // *Moscow Univ. Phys. Bulletin.* 1996. № 6. P. 18–32.