АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2015, том 61, № 2, с. 165–168

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 532.516

ЭФФЕКТИВНАЯ ВЯЗКОСТЬ ДИСПЕРСНЫХ СРЕД ПРИ ДЕФОРМАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

© 2015 г. В. С. Федотовский, Т. Н. Верещагина

Физико-энергетический институт им. А.И. Лейпунского

249033 Обнинск, пл. Бондаренко 1

E-mail: fedotovsky@ippe.ru

Поступила в редакцию 10.06.2014 г.

Рассмотрены гидродинамические диссипативные процессы при деформационных колебаниях дисперсной среды с твердыми сферическими включениями. На основе простой ячеечной модели получена зависимость для скорости диссипации энергии, определяющей эффективную сдвиговую вязкость суспензии при высокочастотных деформационных колебаниях. Показано, что к известным формулам для эффективной вязкости добавляется существенное динамическое слагаемое, зависящее от частоты деформационных колебаний, радиуса включений и вязкости жидкости.

Ключевые слова: дисперсная среда, сферические включения, деформационные колебания, эффективная вязкость.

DOI: 10.7868/S0320791915020033

ВВЕДЕНИЕ

Один из основных эффектов в гидродинамике стационарных сдвиговых течений дисперсных сред состоит, как известно, в увеличении эффективной сдвиговой вязкости. Результаты многочисленных экспериментов и известные реологические модели, основанные на решении стационарного уравнения Стокса, дают увеличение эффективной вязкости дисперсных сред, в частности суспензий, с ростом объемной концентрации включений [1, 2].

В быстрых же колебательных процессах при виброакустических воздействиях на суспензию ситуация существенно меняется. Если плотность включений отличается от плотности несущей жидкости, то основной эффект в дисперсной среде обусловлен инерционно-вязким взаимодействием включений с жидкостью при их относительных поступательных колебаниях [3]. Среда "приобретает" эффективные инерционно-вязкие свойства, характеризующиеся комплексной динамической плотностью, зависящей от размера, концентрации, относительной плотности включений и частоты поступательных колебаний [4]. Действительная часть комплексной плотности является мерой инерции дисперсной среды, а мнимая часть характеризует вязкую диссипацию, демпфирование поступательных колебаний или трансляционную вязкость.

При распространении звука в дисперсной среде, как и в однородной жидкости, движение каждого представительного элемента является суперпозицией поступательных, объемных и деформационных сдвиговых колебаний. С каждым типом колебаний дисперсной среды связаны эффективные динамические свойства — комплексная плотность, объемная и сдвиговая вязкость. Здесь также основную роль играет комплексная динамическая плотность, в значительной мере определяющая скорость и затухание звука.

Что же касается эффективной сдвиговой вязкости в акустических процессах, то обычно считается, что она играет менее существенную роль и, по-видимому, по этой причине не исследовалась. Однако для сред, в которых плотность включений равна плотности жидкости, инерционно-вязкое взаимодействие при поступательных колебаниях исчезает из-за отсутствия относительного движения. В этом случае эффективная сдвиговая вязкость становится одним из основных диссипативных свойств.

При низкочастотных сдвиговых колебаниях такой среды движение жидкости в окрестности включений определяется вязкими силами, а ее сдвиговая вязкость может быть определена по известным формулам реологии суспензий. В предельном случае малой концентрации твердых сферических включений большинство реологических формул асимптотически переходят в формулу Эйнштейна. Однако при высокочастотных деформационных колебаниях дисперсной среды движение жидкости в окрестности включений определяется инерционными силами везде, кроме тонких пограничных слоев, возникающих на поверхности включений. В этих пограничных слоях происходит основная диссипация, определяющая сдвиговую вязкость дисперсной среды.

Основная цель работы заключается в иллюстрации существенного влияния высокочастотных деформационных колебаний дисперсной среды на эффективную сдвиговую вязкость.

ДЕФОРМАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим деформационные колебания несжимаемой дисперсной среды, образованной равномерно распределенными в несущей жидкости твердыми сферическими включениями. Для простоты и наглядности воспользуемся простой ячеечной моделью, где элементарным представительным объемом будем считать сферическую ячейку жидкости радиусом b с одним твердым включением радиусом a. Отношение объемов включения и ячейки примем равным объемной концентрации включений в среде $\alpha = (a/b)^3$. Для определенности рассмотрим случай, когда плотность включений равна плотности несущей жидкости.

При деформационных чисто сдвиговых колебаниях дисперсной среды, представляющих ее периодическое растяжение–сжатие в одном направлении и сжатие–растяжение в двух других направлениях, усредненные по элементарным ячейкам компоненты поля скорости в декартовых координатах имеют вид

$$U_x = \dot{\varepsilon}x,\ \ U_y = -\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}y,\ \ U_z = -\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}z, \tag{1}$$

где $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$ – колебательная скорость относительного удлинения представительного элемента среды. В этом случае, как и при деформационных колебаниях однородной жидкости, поворотом системы координат тензор скорости деформации диагонального вида с компонентами $\dot{\varepsilon}$, $-\dot{\varepsilon}/2$, $-\dot{\varepsilon}/2$ можно привести к недиагональному виду с соответствующими компонентами скорости сдвиговой деформации. Нормальные растягивающие и сжимающие напряжения, создающие чисто сдвиговые деформации, трансформируются при этом в касательные напряжения [5].

При деформационных колебаниях среды любой ее сферический объем радиусом b, в том числе и сферический объем с центром в начале координат, периодически деформируется в вытянутый и сплюснутый сфероид, форму которого в полярных координатах r, θ представим в виде

$$R(\theta) = b\left[1 + \varepsilon Y_2(\cos\theta)\right], \tag{2}$$

где $Y_2(\cos\theta) = \dfrac{3\cos^2\theta - 1}{2}$ – поверхностная сферическая функция второго порядка, θ – полярный угол, отсчитываемый от оси x. Поскольку скорость диссипации энергии в элементе единичного объема однородной жидкости с вязкостью η при скорости сдвиговой деформации вида (1) равна $\dot{E}_1 = 2\eta\left[\dot{\varepsilon}^2 + 2(\dot{\varepsilon}/2)^2\right] = 3\eta\dot{\varepsilon}^2$, то в сферическом объеме жидкости радиусом b она равна

$$\dot{E}_0 = (4/3)\pi b^3 \dot{E}_1 = 4\pi b^3 \eta\dot{\varepsilon}^2. \tag{3}$$

Далее для вычисления скорости диссипации в дисперсной среде примем, что поверхность сферической ячейки также деформируется в сфероид по формуле (2). При этом для определения эффективной вязкости дисперсной среды вычисленную скорость диссипации в ячейке с включением будем относить к скорости диссипации в ячейке однородной жидкости (3). Граничные условия для составляющих скорости и вязких напряжений на поверхности ячейки ($r = b$) и твердого включения ($r = a$) запишем в виде

$$u_r(r = b) = \dot{\varepsilon} b Y_2(\cos\theta),\ \ u_r(r = a) = 0, \tag{4}$$

$$\sigma_{r\theta}(r = b) = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right)_{r=b} = 0, \quad u_\theta(r = a) = 0. \tag{5}$$

Отметим, что в общем случае задачу о сдвиговых колебаниях дисперсной среды или сфероидальных колебаниях жидкой ячейки с включением следует рассматривать на основе нестационарного уравнения Стокса $\rho\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{u}$, приводящего, однако, к весьма громоздким результатам. В связи с этим ограничимся здесь предельными случаями низкочастотных и высокочастотных сдвиговых колебаний, соответствующих малым и большим колебательным числам Рейнольдса ($\mathrm{Re}_\omega = \rho a^2\omega/\eta$), определенным по радиусу включений, частоте колебаний, плотности и вязкости жидкости.

СФЕРОИДАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЯЧЕЙКИ ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ ПРИ $\mathrm{Re}_\omega \ll 1$

Наиболее простой подход к изучению сдвиговой вязкости концентрированных дисперсных сред дает модель деформируемой в сфероид ячейки со свободной поверхностью. Относительную сдвиговую вязкость дисперсной среды определим при этом как отношение диссипации энергии в ячейке с включением к диссипации в ячейке однородной жидкости.

Если жидкая ячейка с твердым включением совершает низкочастотные сфероидальные колебания и силы инерции малы по сравнению вязкими силами, то скорость, давление, вязкие напряжения и диссипация при $\mathrm{Re}_\omega \ll 1$ находятся из решения стационарного уравнения Стокса $\nabla p = \eta\nabla^2\mathbf{u}$, удовлетворяющего уравнению неразрывности $\nabla\mathbf{u} = 0$ и граничным условиям (4), (5). Из решения стационарного уравнения Стокса была получена зависимость для вязкой диссипации энергии в ячейке с включением в виде

$$\dot{E} = 4\pi\eta\dot{\varepsilon}^2 b^3\left[1 + \frac{\left(\frac{5}{2}\alpha - \frac{5}{2}\alpha^{10/3}\right)}{f(\alpha)}\right], \tag{6}$$

где

$$f(\alpha) = 1 - \frac{25}{4}\alpha + \frac{21}{2}\alpha^{5/3} - \frac{25}{4}\alpha^{7/3} + \alpha^{10/3}.$$

Отсюда отношение эффективной вязкости дисперсной среды к вязкости несущей жидкости, равное отношению скоростей диссипации (6) и (3), было получено Бреннером [6] в виде

$$\frac{\eta_{\text{eff}}}{\eta} = \frac{\dot{E}}{\dot{E}_0} = 1 + \frac{5}{2}\alpha\frac{1-\alpha^{7/3}}{f(\alpha)}. \quad (7)$$

С достаточной для оценок точностью формулу (7) при умеренной концентрации включений ($\alpha \le 0.3$), как и ряд других формул, удовлетворительно согласующихся с известными экспериментальными данными, можно записать в более простом виде:

$$\frac{\eta_{\text{eff}}}{\eta} \approx \frac{2+\alpha}{2(1-2\alpha)}. \quad (8)$$

При $\alpha \le 0.3$ результаты по (7) и (8) отличаются менее чем на 5%. При малой же концентрации включений ($\alpha \ll 1$) соотношения (7) или (8) асимптотически переходят в формулу Эйнштейна для вязкости суспензий:

$$\frac{\eta_{\text{eff}}}{\eta} = 1 + \frac{5}{2}\alpha. \quad (9)$$

СФЕРОИДАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЯЧЕЙКИ ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ ПРИ $\mathrm{Re}_\omega \gg 1$

В этом случае инерционные силы являются преобладающими, и движение жидкости можно считать потенциальным во всей ячейке кроме вязкого пограничного слоя на поверхности включения. Считая толщину пограничного слоя $\delta = (2\eta/\rho\omega)^{1/2}$ много меньшей радиуса включений a, поле скорости идеальной жидкости в ячейке найдем из решения уравнения Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$ для потенциала скорости:

$$\varphi = -\frac{\dot{\varepsilon}}{1-\alpha^{5/3}}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{a^5}{3r^3}\right)Y_2(\cos\theta), \quad (10)$$

удовлетворяющего граничным условиям (4) для радиальной составляющей скорости.

Для касательной же составляющей скорости идеальной жидкости на поверхности ячейки ($r = b$) и включения ($r = a$) вместо граничных условий (5) получим следующие соотношения:

$$u_\theta(b,\theta) = -\frac{1}{b}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)_{r=b} = -\frac{3\dot{\varepsilon}b\left(1+\frac{2}{3}\alpha^{5/3}\right)}{4\left(1-\alpha^{5/3}\right)}\sin 2\theta, \quad (11)$$

$$u_\theta(a,\theta) = -\frac{1}{a}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)_{r=a} = -\frac{5\dot{\varepsilon}b\alpha^{1/3}}{4\left(1-\alpha^{5/3}\right)}\sin 2\theta. \quad (12)$$

При условии прилипания жидкости на поверхности включения, $u_\theta(r = a) = 0$, касательная скорость идеальной жидкости (12) "вырабатывается" в вязком пограничном слое δ, где и происходит диссипация энергии.

Считая тонкий пограничный слой локально плоским, скорость диссипации энергии на всей поверхности сферического включения определим как

$$\dot{E} = 2\pi a^2\frac{\eta}{\delta}\int_0^\pi u_\theta^2(a,\theta)\sin\theta d\theta. \quad (13)$$

В результате получим

$$\dot{E} = \frac{10}{3}\pi\eta\frac{a}{\delta}\frac{\dot{\varepsilon}^2 b^3\alpha}{\left(1-\alpha^{5/3}\right)^2}. \quad (14)$$

Таким образом, сдвиговая вязкость дисперсной среды в этом случае выражается формулой

$$\frac{\eta_{\text{eff}}}{\eta} = \frac{\dot{E}}{\dot{E}_0} = \frac{5}{6}\frac{a\alpha}{\delta\left(1-\alpha^{5/3}\right)^2} \quad (15)$$

или, при малой концентрации включений, – формулой

$$\frac{\eta_{\text{eff}}}{\eta} = \frac{5}{6}\frac{a}{\delta}\alpha. \quad (16)$$

Далее для объединения частных результатов по эффективной вязкости дисперсных сред при малых и больших колебательных чисел Рейнольдса воспользуемся решением аналогичной по физическому смыслу задачи о силе вязкого сопротивления, действующей на твердую сферу при ее поступательных колебаниях в вязкой жидкости. В этой задаче точное решение нестационарного уравнения Стокса, справедливое при произвольных Re_ω, дает известную формулу Ламба [7, 8] для силы вязкого сопротивления (без инерционной составляющей) в виде суммы стационарной составляющей Стокса и динамической составляющей, обусловленной поступательными колебаниями сферы со скоростью $V(t)$:

$$F = 6\pi\eta a\left(1 + \frac{a}{\delta}\right)V. \quad (17)$$

Здесь следует отметить, что второе слагаемое в (17) может быть также получено из решения задачи в приближении идеальной жидкости, как и формула (16). С учетом образования тонкого пограничного слоя на поверхности колеблющейся сферы при $\mathrm{Re}_\omega \gg 1$ динамическая составляющая силы вязкого сопротивления $6\pi\eta a(a/\delta)V$ определяется как $F = (1/2)d\dot{E}/dV$, где скорость диссипации в пограничном слое вычисляется по формуле (13) при подстановке в нее касательной скорости идеальной жидкости $u_\theta(a,\theta) = (3/2)V\sin\theta$, соответствующей поступательным колебаниям сферы [4].

Таким образом, тот факт, что при произвольных колебательных числах Рейнольдса диссипация и сила вязкого сопротивления равны сумме предельных значений при $\mathrm{Re}_\omega \ll 1$ и $\mathrm{Re}_\omega \gg 1$, использован здесь как основание для суммирования частных результатов по эффективной вязкости дисперсных сред. Исходя из этого, формулу для эффективной вязкости дисперсных сред при малой концентрации сферических включений запишем в виде суммы стационарной и динамической составляющих (9) и (16):

$$\frac{\eta_{\text{eff}}}{\eta} = 1 + \frac{5}{2}\alpha\left(1 + \frac{a}{3\delta}\right).$$

В этой формуле, иллюстрирующей роль динамического слагаемого в эффективной вязкости дисперсной среды при ее деформационных колебаниях, состоит цель работы. Например, для такой дисперсной среды, как водная суспензия твердых частиц радиусом 0.1 мм, при частоте деформационных колебаний $f = 10$ кГц параметр $a/\delta \approx 15$, что дает шестикратное увеличение эйнштейновского слагаемого $(5/2)\alpha$.

Для концентрированных сред эффективная сдвиговая вязкость, по-видимому, также может быть представлена в виде суммы составляющих (8) и (15), соответствующих низкочастотным и высокочастотным деформационным колебаниям:

$$\frac{\eta^*}{\eta} \approx \frac{2+\alpha}{2(1-2\alpha)} + \frac{5a\alpha}{6\delta\left(1-\alpha^{5/3}\right)^2}.$$

Отсюда следует, что, например, при $a = 0.3$ эффективная вязкость водной суспензии частиц за счет динамического слагаемого будет примерно в три раза больше, чем при стационарном сдвиговом течении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе рассмотренных вязких диссипативных процессов в дисперсной среде при ее деформационных колебаниях показано, что к известным реологическим формулам для эффективной сдвиговой вязкости должна быть добавлена динамическая составляющая, обусловленная образованием на поверхности включений вязкого пограничного слоя с повышенной диссипацией. Приведенная для разбавленных суспензий формула Эйнштейна с дополнительным динамическим слагаемым является по физическому смыслу и содержанию аналогом известной формулы Ламба для силы вязкого сопротивления, действующей на колеблющуюся в жидкости сферу.

Во избежание недоразумений отметим специфику деформационных или чисто сдвиговых колебаний среды. В отличие от обычно рассматриваемого движения дисперсной среды при сдвиговых течениях в вискозиметрах, здесь движение среды и ее элементарных ячеек с включениями происходят без вращения.

Отметим также, что при распространении акустических волн в дисперсных средах деформационные колебания среды сопровождаются объемными колебаниями. В этом случае эффективную сдвиговую вязкость следует рассматривать одновременно с эффективной объемной вязкостью, не имеющей, однако, динамической составляющей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. *Krieger I.M.* Rheology of monodisperse lattices // Adv. Colloid Interface Sci. 1972. V. 3. P. 111–118.
3. *Лебедев-Степанов П.В., Руденко О.В.* О затухании звука в жидкости, содержащей взвешенные частицы микро- и нанометровых размеров // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 706–711.
4. *Федотовский В.С., Орлов А.И., Лунина С.В., Пильщикова Е.А.* Комплексная плотность суспензий в колебательно-волновых процессах // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 2. С. 173–178.
5. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 335 с.
6. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
7. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.