АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2015, том 61, № 6, с. 656–668

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.2:517.4

МАТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ АНАЛИЗЕ РАССЕЯНИЯ НА НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛОТНОСТИ И СКОРОСТИ ЗВУКА

© 2015 г. К. В. Дмитриев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы
E-mail: kdmitrie@aesc.msu.ru

Поступила в редакцию 14.11.2015 г.

Введены матричные функции Грина для линеаризованной системы уравнений гидродинамики. Установлены связи между запаздывающей и опережающей функциями Грина, между функциями Грина прямого и сопряженного операторов системы уравнений гидродинамики. Получено выражение для принципа взаимности и соотношение типа уравнения Марченко. Разработанный математический аппарат применен к анализу рассеяния на квазиточечной рефракционно-плотностной неоднородности среды. При этом получены ограничения на фазу и амплитуду коэффициентов рассеяния такой неоднородности. Существование максимально возможной амплитуды рассеянного поля необходимо учитывать при проектировании метаматериалов, состоящих из отдельных элементов малого волнового размера, в том числе с резонансными свойствами.

Ключевые слова: метасреды, рассеяние волн, матричные функции Грина.

DOI: 10.7868/S0320791915060040

ВВЕДЕНИЕ

Дважды отрицательные акустические среды характеризуются одновременно отрицательными эффективными динамическими параметрами: плотностью среды ρ и сжимаемостью η. На практике такие среды реализованы [1–3] в виде метасред, состоящих из отдельных элементов, которые имеют в определенной полосе частот резонансы, создающие рассеянное поле дипольного и монопольного типа. При этом, чтобы характеризовать среду эффективными параметрами, т.е. рассматривать ее как сплошную, каждый подобный резонатор должен, с одной стороны, иметь малый размер по сравнению с длиной волны в метасреде. С другой стороны, вклад рассеянного поля резонатора должен быть существенен, чтобы эффективные параметры среды могли стать отрицательными. В связи с этим возникает вопрос о наличии принципиальных ограничений на амплитуду этого поля.

Рассеянное поле порождается вторичными источниками, равными, по определению, произведению функции рассеивателя и полного волнового поля в каждой точке расположения рассеивателя. Пусть рассеяние происходит на неоднородности малого волнового размера, вызванной отличием скорости звука $c(\mathbf{z}) = 1/\sqrt{\rho(\mathbf{z})\eta(\mathbf{z})}$ (где $\mathbf{z}$ – радиус-вектор точки пространства) от значения c_0 в однородной среде. Известно [4], что при этом возникает вторичный источник монопольного типа, амплитуда и фаза которого связаны между собой, а характеризующий данный вторичный источник коэффициент рассеяния ограничен по модулю. Такая связь является весьма общей вне зависимости от конкретной физической природы неоднородности с малым волновым размером (квазиточечной неоднородности). Например, в [5] было установлено ее наличие при рассеянии волны на газовом пузырьке, причем учет поверхностного натяжения приводит к изменению характеристик процесса рассеяния, но не нарушает этой связи. В [6] импедансным методом показано, что максимально возможная рассеиваемая объектом заданной формы мощность не может превышать более чем в четыре раза максимально возможную мощность, которая поглощается другим объектом такой же формы и размера.

Вторичный источник дипольного типа может возникнуть, если среда содержит неоднородность плотности. В представляемой работе результаты [4] обобщаются на случай квазиточечной неоднородности не только по скорости звука $c(\mathbf{z})$, но и одновременно по плотности $\rho(\mathbf{z})$. Такая неоднородность может порождать вторичный источник смешанного монопольно-дипольного типа. Для анализа подобных ситуаций представляется более удобным использовать подход [7] к решению пря-

мой задачи рассеяния на основе уравнений типа уравнений Липпмана–Швингера, записываемых для системы уравнений гидродинамики, а не на основе дифференциальных уравнений второго порядка. Этот подход позволяет избежать сложностей, связанных с появлением членов, содержащих градиенты волновых полей и плотности среды [8]. Подобные сложности особенно существенны в тех случаях, когда в рассматриваемой неоднородной среде имеются границы и приходится иметь дело с обобщенными функциями.

Жесткая связь между фазой и амплитудой поля, рассеянного неоднородностью, близкой к точечной, свидетельствует о необходимости математически описывать этот процесс с точки зрения многократного перерассеяния, что будет обсуждаться в настоящей работе. Это может быть сделано с помощью функции Грина, рассматриваемой при близких значениях двух ее пространственных аргументов. В двумерном и трехмерном случаях при стремлении разности аргументов к нулю функция Грина (а значит, и роль перерассеяний) неограниченно возрастает внутри квазиточечной неоднородности. Следовательно, квазиточечный рассеиватель всегда является сильным рассеивателем, т.е. полное акустическое поле внутри него существенно отличается от падающего поля.

Ограничение, накладываемое на максимально возможную амплитуду поля, рассеянного квазиточечной неоднородностью, играет роль при выборе конструкции проектируемых метаматериалов. В частности, расстояние между отдельными элементами метаматериала не должно быть слишком большим. В противном случае рассеиваемое ими поле может быть внутри метаматериала много меньше падающего поля.

МАТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЬ

Рассматривается геометрия задачи, аналогичная изложенной в [4]. Внутри однородного и изотропного пространства с плотностью ρ_0 и сжимаемостью $\eta_0 = 1/(\rho_0 c_0^2)$ расположена область $\mathfrak{R}$ конечных размеров, где соответствующие параметры ρ и η являются неоднородными. Предполагается, что поглощение в среде отсутствует. Область $\mathfrak{R}$ окружена двумя замкнутыми гладкими выпуклыми поверхностями $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ (в двумерном случае – контурами), на которых располагаются точечные излучатели и приемники соответственно. Для определенности, но без ограничения общности, предполагается, что поверхность $\mathcal{X}$ лежит целиком внутри области $V_{\mathcal{Y}}$, ограниченной поверхностью $\mathcal{Y}$.

В монохроматическом случае при временно́й зависимости полей $\sim\exp(-i\omega t)$ рассматриваются запаздывающее (обозначается верхним индексом "+"), и опережающее (обозначается верхним индексом "–") поля колебательной скорости $\mathbf{v}^{\pm}$ и давления $p^{\pm}$. Для каждой из этих волновых переменных $\zeta^{+}(\mathbf{y})$ справедливо условие излучения Зоммерфельда [9, с. 438–439], а для переменных $\zeta^{-}(\mathbf{y})$ – комплексно сопряженное условие при $y \equiv |\mathbf{y}| \to \infty$:

$$\frac{\partial\zeta^{+}}{\partial y} - ik_0\zeta^{+} = o\left(y^{(D-1)/2}\right); \quad \frac{\partial\zeta^{-}}{\partial y} + ik_0\zeta^{-} = o\left(y^{(D-1)/2}\right). \quad (1)$$

Здесь $k_0 = \omega\sqrt{\rho_0\eta_0}$ – волновое число в фоновой среде, D – размерность задачи.

Поля $\mathbf{v}^{\pm}$ и $p^{\pm}$ создаются скалярной $\phi^{\pm}\delta(\mathbf{x})$ и векторной $\mathbf{f}^{\pm}\delta(\mathbf{x})$ функциями; значения $\phi^{\pm}$ и $\mathbf{f}^{\pm}$ не зависят от координат. Тогда система уравнений гидродинамики имеет вид

$$\begin{cases} -i\omega\rho(\mathbf{z})\mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{z}}p^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{\pm}\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}), \\ \nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) - i\omega\eta(\mathbf{z})p^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \phi^{\pm}\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}). \end{cases} \quad (2)$$

Надо обратить внимание, что в (2) предполагается временна́я зависимость $\sim\exp(-i\omega t)$ как для запаздывающих, так и для опережающих полей. Правые части каждого из уравнений (2) в дальнейшем будут называться соответственно скалярными и векторными точечными первичными источниками поля, расположенными в точке $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Опережающее поле, в отличие от запаздывающего, не является физически реализуемым, поскольку нарушает принцип причинности. Опережающее поле описывает волну, появляющуюся на бесконечности, сходящуюся к источнику и предшествующую этому источнику по времени, что и означает "опережение". Поток энергии при этом направлен из бесконечности к источнику поля. Опережающее поле как математический объект вводится и используется при решении ряда обратных задач. В качестве элемента математического аппарата оно используется и в настоящей работе.

Пусть орты осей декартовой системы координат задаются единичными векторами $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$ и $\mathbf{e}^{(3)}$ (в двумерном случае орт $\mathbf{e}^{(3)}$ не рассматривается). Вводятся матрицы

$$\hat{\sigma}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_{(3)} \\ \mathbf{e}_{(1)} & \mathbf{e}_{(2)} & \mathbf{e}_{(3)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\sigma}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_{(3)} \\ -\mathbf{e}_{(1)} & -\mathbf{e}_{(2)} & -\mathbf{e}_{(3)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначения $\hat{\sigma}$ и индексы 1–3 введены здесь из-за некоторой схожести вида этих матриц с матри-

цами Паули. Кроме того, будут использоваться, в обозначениях Дирака, вектор-столбцы полевых переменных $|u^{\pm}\rangle$ и первичных источников поля $|F^{\pm}\rangle$:

$$|u^{\pm}\rangle \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{\pm} \\ p^{\pm} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} V^{\pm}_{(1)} \\ V^{\pm}_{(2)} \\ V^{\pm}_{(3)} \\ p^{\pm} \end{pmatrix}; \quad |F^{\pm}\rangle \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{\pm} \\ \phi^{\pm} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f^{\pm}_{(1)} \\ f^{\pm}_{(2)} \\ f^{\pm}_{(3)} \\ \phi^{\pm} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{v} = \mathbf{e}_{(1)}V_{(1)} + \mathbf{e}_{(2)}V_{(2)} + \mathbf{e}_{(3)}V_{(3)}$ и $\mathbf{f} = \mathbf{e}_{(1)}f_{(1)} + \mathbf{e}_{(2)}f_{(2)} + \mathbf{e}_{(3)}f_{(3)}$. Вводя оператор

$$\hat{A}(\mathbf{z}) \equiv \begin{pmatrix} -i\omega\rho(\mathbf{z}) & 0 & 0 & \partial/\partial z_{(1)} \\ 0 & -i\omega\rho(\mathbf{z}) & 0 & \partial/\partial z_{(2)} \\ 0 & 0 & -i\omega\rho(\mathbf{z}) & \partial/\partial z_{(3)} \\ \partial/\partial z_{(1)} & \partial/\partial z_{(2)} & \partial/\partial z_{(3)} & -i\omega\eta(\mathbf{z}) \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{z} = \{z_{(1)}, z_{(2)}, z_{(3)}\}$ в декартовой системе координат, систему уравнений (2) можно переписать в более компактной матричной форме:

$$\hat{A}(\mathbf{z})|u^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\rangle = |F^{\pm}\rangle\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}). \tag{3}$$

Оператору $\hat{A}(\mathbf{z})$ соответствует сопряженный [10, с. 805, 806] оператор

$$\tilde{A}(\mathbf{z}) \equiv \begin{pmatrix} -i\omega\rho(\mathbf{z}) & 0 & 0 & -\partial/\partial z_{(1)} \\ 0 & -i\omega\rho(\mathbf{z}) & 0 & -\partial/\partial z_{(2)} \\ 0 & 0 & -i\omega\rho(\mathbf{z}) & -\partial/\partial z_{(3)} \\ -\partial/\partial z_{(1)} & -\partial/\partial z_{(2)} & -\partial/\partial z_{(3)} & -i\omega\eta(\mathbf{z}) \end{pmatrix}.$$

Факт сопряженности операторов $\hat{A}(\mathbf{z})$ и $\tilde{A}(\mathbf{z})$ можно проверить непосредственно: для произвольных полей $|u_1\rangle$ и $|u_2\rangle$ выполнено

$$\langle u_1|\hat{A}(\mathbf{z})|u_2\rangle - \langle u_2|\tilde{A}(\mathbf{z})|u_1\rangle = \\ = \nabla(\mathbf{v}_1(\mathbf{z})p_2(\mathbf{z}) + p_1(\mathbf{z})\mathbf{v}_2(\mathbf{z})) = \nabla(\langle u_1|\hat{\sigma}_1|u_2\rangle).$$

Операторы $\hat{A}(\mathbf{z})$ и $\tilde{A}(\mathbf{z})$ связаны соотношением

$$\tilde{A}(\mathbf{z}) = -\hat{A}^*(\mathbf{z}), \tag{4}$$

где символ "*" означает комплексное сопряжение.

Решение системы уравнений (3) записывается как

$$|u^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\rangle = \int \hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')|F^{\pm}\rangle\delta(\mathbf{z}'-\mathbf{x})d\mathbf{z}' \equiv \hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})|F^{\pm}\rangle,$$

т.е.

$$|u^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\rangle = \hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})|F^{\pm}\rangle. \tag{5}$$

Здесь $\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})$ — запаздывающая и опережающая матричные функции Грина *неоднородной* среды, которые удовлетворяют уравнению

$$\hat{A}(\mathbf{z})\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \hat{E}\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}), \tag{6}$$

где $\hat{E}$ — единичный оператор. Аналогично вводятся запаздывающая и опережающая матричные функции Грина $\tilde{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r})$ для сопряженного оператора $\tilde{A}(\mathbf{z})$, удовлетворяющие уравнению

$$\tilde{A}(\mathbf{z})\tilde{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}) = \hat{E}\delta(\mathbf{z}-\mathbf{r}). \tag{7}$$

Важно, что функции $\tilde{G}^{+}(\mathbf{z},\mathbf{r})$ и $\tilde{G}^{-}(\mathbf{z},\mathbf{r})$ удовлетворяют, соответственно, тем же самым условиям излучения Зоммерфельда, что и функции $\hat{G}^{+}(\mathbf{z},\mathbf{x})$ и $\hat{G}^{-}(\mathbf{z},\mathbf{x})$ при $|\mathbf{z}| \to \infty$.

Для дальнейших рассуждений необходимо показать, что функции Грина $\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})$ и $\tilde{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r})$ являются симметричными матрицами. Пусть внутри произвольной области $\Im$ среды равномерно распределены первичные источники с плотностью, равной в одном случае $|\Phi_1\rangle$, а в другом — $|\Phi_2\rangle$. По аналогии с (3) им соответствуют поля $|U_1(\mathbf{z})\rangle$ и $|U_2(\mathbf{z})\rangle$, где

$$\hat{A}(\mathbf{z})|U_{1,2}(\mathbf{z})\rangle = |\Phi_{1,2}\rangle \text{ при } \mathbf{z} \in \Im, \tag{8}$$

причем $|U_{1,2}(\mathbf{z})\rangle = \int_{\Im} \hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')|\Phi_{1,2}(\mathbf{z}')\rangle d\mathbf{z}'$, $\mathbf{z}' \in \Im$. Тогда следующий интеграл, в котором участвуют матричные элементы функций Грина, будет равен нулю:

$$\int_{\Im}\left[\langle\Phi_2|\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')|\Phi_1\rangle - \langle\Phi_1|\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')|\Phi_2\rangle\right]d\mathbf{z}' = \\ = \langle\Phi_2|\int_{\Im}\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')|\Phi_1\rangle d\mathbf{z}' - \langle\Phi_1|\int_{\Im}\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')|\Phi_2\rangle d\mathbf{z}' = \\ = \langle\Phi_2|U_1(\mathbf{z})\rangle - \langle\Phi_1|U_2(\mathbf{z})\rangle = \\ = \langle U_2(\mathbf{z})|\hat{A}(\mathbf{z})|U_1(\mathbf{z})\rangle - \langle U_1(\mathbf{z})|\hat{A}(\mathbf{z})|U_2(\mathbf{z})\rangle = 0, \tag{9}$$

что обусловлено симметрией оператора $\hat{A}(\mathbf{z})$. При этом в выражениях $\langle\Phi_{1,2}| = \langle U_{1,2}(\mathbf{z})|\hat{A}(\mathbf{z})$, которые являются транспонированными выражениями (8) и используются в (9), действие матричных элементов оператора $\hat{A}(\mathbf{z})$, содержащих производную, сводится именно к дифференцированию, а не к умножению. Поскольку область $\Im$ выбирается произвольно, подынтегральное выражение в самом левом интеграле в (9) равно нулю, т.е.

$$\langle\Phi_2|\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')|\Phi_1\rangle = \langle\Phi_1|\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')|\Phi_2\rangle. \tag{10}$$

Пусть теперь все элементы вектор-столбцов $|\Phi_1\rangle$ и $|\Phi_2\rangle$ являются нулевыми, кроме соответственно i-го и j-го, которые равны 1. Тогда выражение $\langle\Phi_1|\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')|\Phi_2\rangle \equiv \left(\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')\right)_{ij}$ определяет ij-й матричный элемент функции Грина; аналогично $\langle\Phi_2|\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')|\Phi_1\rangle \equiv \left(\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')\right)_{ji}$. Равенство (10) ее диагонально симметричных матричных элементов означает симметрию функции Грина. Аналогично показывается симметричность матричных функций Грина $\tilde{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r})$ сопряженного оператора.

Применение операции комплексного сопряжения к уравнению (6) и сравнение полученного выражения с (7) при $\mathbf{r} = \mathbf{x}$ дает, с учетом (4),

$$\left\{\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\}^{*} = -\tilde{G}^{\mp}(\mathbf{z},\mathbf{x}). \tag{11}$$

Изменение верхних индексов "$\pm$" на "$\mp$" в правой части (11) обусловлено необходимостью согласования условий излучения на бесконечности (1), поскольку операция комплексного сопряжения переводит одно из них в другое. Разность уравнения (6), предварительно умноженного справа на вектор-столбец источников $|F^{\pm}\rangle$, а слева – на $\langle\tilde{F}^{\pm}|\tilde{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r})$, и уравнения (7), умноженного справа на вектор-столбец источников $|\tilde{F}^{\pm}\rangle$, а слева – на $\langle F^{\pm}|\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})$, имеет вид

$$\begin{gathered}\langle\tilde{F}^{\pm}|\tilde{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r})\hat{A}(\mathbf{z})\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})|F^{\pm}\rangle - \\ -\langle F^{\pm}|\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\tilde{A}(\mathbf{z})\tilde{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r})|\tilde{F}^{\pm}\rangle = \\ = \langle\tilde{F}^{\pm}|\tilde{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r})|F^{\pm}\rangle\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}) - \langle F^{\pm}|\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})|\tilde{F}^{\pm}\rangle\delta(\mathbf{z}-\mathbf{r}).\end{gathered} \tag{12}$$

С учетом (11) левая часть выражения (12) записывается как $\nabla\left(\langle\tilde{u}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r})|\hat{\sigma}_1|u^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\rangle\right)$, где

$$|u^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\rangle \equiv \begin{pmatrix}\mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\\ p^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\end{pmatrix} = \hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})|F^{\pm}\rangle$$

и

$$|\tilde{u}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r})\rangle \equiv \begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{v}}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r})\\ \tilde{p}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r})\end{pmatrix} = \tilde{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r})|\tilde{F}^{\pm}\rangle = -\left\{\hat{G}^{\mp}(\mathbf{z},\mathbf{r})\right\}^{*}|\tilde{F}^{\pm}\rangle.$$

Тогда интегрирование выражения (12) по переменной $\mathbf{z}$ внутри области $V_{\mathcal{Y}}$ с применением теоремы Гаусса, а также с учетом независимости $|F^{\pm}\rangle$ и $|\tilde{F}^{\pm}\rangle$ от координат, приводит к уравнению

$$\begin{gathered}\langle\tilde{F}^{\pm}|\tilde{G}^{\pm}(\mathbf{x},\mathbf{r})|F^{\pm}\rangle - \langle F^{\pm}|\hat{G}^{\pm}(\mathbf{r},\mathbf{x})|\tilde{F}^{\pm}\rangle = \\ = \oint_{\mathcal{Y}}\mathbf{n}_{\mathbf{y}}\langle\tilde{u}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{r})|\hat{\sigma}_1|u^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{x})\rangle d\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}\in\mathcal{Y}, \quad \mathbf{r}\in V_{\mathcal{Y}},\end{gathered} \tag{13}$$

где $\mathbf{n}_{\mathbf{y}}$ – вектор внешней нормали к поверхности $\mathcal{Y}$ в точке $\mathbf{y}$. Пусть поверхность $\mathcal{Y}$ выбрана в виде окружности (при размерности задачи $D = 2$) или сферы (при $D = 3$) радиуса $y \equiv |\mathbf{y}| \to \infty$. В правой части (13), с учетом того, что $\rho(\mathbf{y}) = \rho_0$ при $y \to \infty$, можно осуществить переход к описанию полей $|u^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{x})\rangle$ и $|\tilde{u}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{r})\rangle$ через скалярные потенциалы $\varphi^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{x})$ и $\tilde{\varphi}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{r})$:

$$\begin{gathered}\mathbf{n}_{\mathbf{y}}\langle\tilde{u}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{r})|\hat{\sigma}_1|u^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{x})\rangle = \\ = \mathbf{n}_{\mathbf{y}}\left[p^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{x})\tilde{\mathbf{v}}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{r}) + \tilde{p}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{r})\mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{x})\right] = \\ = i\omega\rho_0\left[\tilde{\varphi}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial y}\varphi^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{x}) - \varphi^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial y}\tilde{\varphi}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{r})\right],\end{gathered} \tag{14}$$

где $p^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = i\omega\rho_0\varphi^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{x})$, $\mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{y}}\varphi^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{x})$, $\tilde{p}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{r}) = i\omega\rho_0\tilde{\varphi}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{r})$, $\tilde{\mathbf{v}}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\varphi}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{r})$. Потенциалы $\varphi^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{x})$ и $\tilde{\varphi}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{r})$ удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда (1) и при $y \to \infty$ имеют соответствующие этим условиям асимптотики

$$\varphi^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \varphi^{\pm}(\alpha,\mathbf{x})\frac{\exp(\pm ik_0 y)}{y^{(D-1)/2}} + o(y^{(1-D)/2})$$

$$\text{и } \tilde{\varphi}^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{r}) = \tilde{\varphi}^{\pm}(\alpha,\mathbf{r})\frac{\exp(\pm ik_0 y)}{y^{(D-1)/2}} + o(y^{(1-D)/2}),$$

где α – совокупность угловых переменных радиус-вектора $\mathbf{y}$ в полярной или сферической системе координат. С учетом этого выражение (14) оказывается равным $o(y^{1-D})$, а значит, интеграл в (13) равен 0.

Далее, во-первых, соотношение (13) справедливо при произвольных вектор-столбцах источников, а во-вторых, имеет место симметрия (относительно диагонали) функций Грина, за счет чего справедливо (10) и, в частности, $\langle F^{\pm}|\hat{G}^{\pm}(\mathbf{r},\mathbf{x})|\tilde{F}^{\pm}\rangle = \langle\tilde{F}^{\pm}|\hat{G}^{\pm}(\mathbf{r},\mathbf{x})|F^{\pm}\rangle$. Это приводит к теореме взаимности для матричных функций Грина в виде

$$\tilde{G}^{\pm}(\mathbf{x},\mathbf{r}) = \hat{G}^{\pm}(\mathbf{r},\mathbf{x}). \tag{15}$$

Кроме того, из (11) при $\mathbf{z} = \mathbf{r}$, с учетом (15), получается теорема взаимности, не включающая матричные функции Грина сопряженного оператора:

$$\hat{G}^{\pm}(\mathbf{r},\mathbf{x}) = -\left\{\hat{G}^{\mp}(\mathbf{x},\mathbf{r})\right\}^{*}. \tag{16}$$

Результат действия присутствующей в (16) операции $(-1)\cdot\{\bullet\}^{*}$ на скалярную и векторную части функции Грина оказывается разным. Это можно проиллюстрировать на примере матричной функции Грина *однородной* среды $\hat{G}_0^{\pm}$, явный вид которой известен. Так, например, в двумерном (размерность $D = 2$) случае она представляется как

$$\hat{G}_{0,D=2}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} g_{1,D=2}^{\pm} & g_{4,D=2}^{\pm} & \gamma_{1,D=2}^{\pm}\\ g_{4,D=2}^{\pm} & g_{2,D=2}^{\pm} & \gamma_{2,D=2}^{\pm}\\ \gamma_{1,D=2}^{\pm} & \gamma_{2,D=2}^{\pm} & g_{3,D=2}^{\pm}\end{pmatrix}, \tag{17}$$

где

$$g_{1,D=2}^{\pm} = \pm\omega\eta_0 \times$$

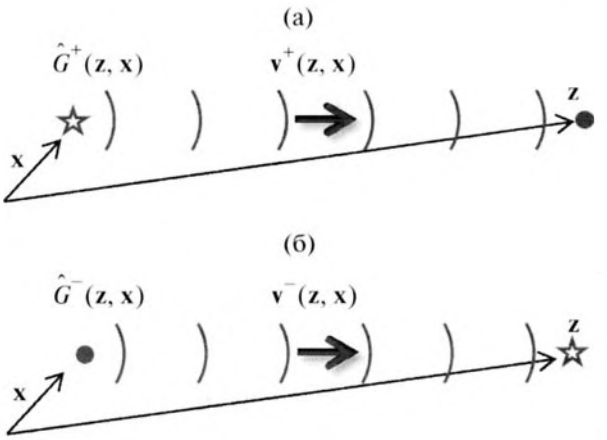
$$\times\left(H_0^{\pm}\frac{(z_{(1)}-x_{(1)})^2}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|^2} + \frac{(z_{(2)}-x_{(2)})^2-(z_{(1)}-x_{(1)})^2}{k_0|\mathbf{z}-\mathbf{x}|^3}H_1^{\pm}\right),$$

$$\gamma_{1,D=2}^{\pm} = \pm ik_0 H_1^{\pm}\frac{(z_{(1)}-x_{(1)})}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|}, \quad g_{2,D=2}^{\pm} = \pm\omega\eta_0 \times$$

$$\times\left(H_0^{\pm}\frac{(z_{(2)}-x_{(2)})^2}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|^2} + \frac{(z_{(1)}-x_{(1)})^2-(z_{(2)}-x_{(2)})^2}{k_0|\mathbf{z}-\mathbf{x}|^3}H_1^{\pm}\right),$$

$$\gamma_{2,D=2}^{\pm} = \pm ik_0 H_1^{\pm}\frac{(z_{(2)}-x_{(2)})}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|}, \quad g_{3,D=2}^{\pm} = \pm\omega\rho_0 H_0^{\pm},$$

$$g_{4,D=2}^{\pm} = \mp\omega\eta_0\frac{(z_{(1)}-x_{(1)})(z_{(2)}-x_{(2)})}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|^2}H_2^{\pm}.$$



Случай запаздывающей $\hat{G}^{+}(\mathbf{z},\mathbf{x})$ (а) и опережающей $\hat{G}^{-}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ (б) функций Грина. Толстой стрелкой обозначено направление колебательной скорости, совпадающее с направлением распространения волны. Источник поля отмечен звездочкой и находится в точке $\mathbf{x}$ (а) и в точке $\mathbf{z}$ (б).

Здесь $\mathbf{z} = (z_{(1)}; z_{(2)})$ и $\mathbf{x} = (x_{(1)}; x_{(2)})$ — точки расположения приемника и излучателя. Для функций Ханкеля первого и второго рода j-го порядка ($j = 0,1,2$) используются обозначения $H_j^{+} \equiv \equiv H_j^{(1)}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{x}|)$ и $H_j^{-} \equiv H_j^{(2)}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{x}|)$ соответственно. Надо отметить, что в [7] при написании конкретного вида выражения для $\hat{G}^{+}_{0,D=2}$ допущены неточности, хотя численное моделирование выполнялось в [7] с использованием правильного выражения для $\hat{G}^{+}_{0,D=2}$.

Поскольку $H_j^{+} = \left(H_j^{-}\right)^{*}$, для элементов матричных функций $\hat{G}_0^{\pm}$ выполнено

$$g^{+} = -(g^{-})^{*} \text{ и } \gamma^{+} = (\gamma^{-})^{*}. \tag{18}$$

Из (17) и (18) видно, что действие на матричную функцию Грина операции $(-1)\cdot\{\bullet\}^{*}$ сводится к тому, что, помимо изменения рода функций Ханкеля, в ее правом столбце меняет знак самый нижний элемент. В то же время, в остальных столбцах меняют знаки все элементы, кроме самых нижних. Следует отметить, что акустическое поле $|u^{\pm}\rangle$ получается действием матричной функции Грина на вектор-столбец источников. Если источник скалярный, т.е. представлен вектор-столбцом $\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \phi\end{pmatrix}$, то создаваемое им акустическое поле определяется самым правым столбцом матричной функции Грина. При этом действие операции $(-1)\cdot\{\bullet\}^{*}$ приводит к изменению знака акустического давления, а колебательная скорость остается прежней: $-\mathbf{v}^{-} = -(\mathbf{v}^{+})^{*}$, $p^{-} = -(p^{+})^{*}$. Если источник векторный, т.е. имеет вид $\begin{pmatrix}\mathbf{f}^{\pm}\\ 0\end{pmatrix}$, то ситуация обратная: данная операция меняет знак колебательной скорости, но не акустического давления. Временна́я зависимость полей $\sim\exp(-i\omega t)$ опережающей и запаздывающей функций Грина одинакова. Поэтому изменение знака акустического давления при неизменной колебательной скорости означает, что расходящаяся на бесконечности волна (запаздывающее поле, рис. 1а) переходит в сходящуюся (опережающее поле, рис. 1б), а источник и приемник поля меняются местами. Именно это отражено в формуле (16).

В случае классических функций Грина $G^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})$ для потенциала колебательных скоростей $\varphi^{\pm}$ имеет место связь $G^{+}(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \left\{G^{-}(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\}^{*}$ вместо (16). Например, для однородной среды в двумерном случае $G_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) = -\dfrac{i}{\omega\rho_0} g^{\pm}_{3,D=2}$, а само поле потенциала $\varphi^{\pm}(\mathbf{z},t)$ связано с полем акустического давления $p^{\pm}(\mathbf{z},t)$ как $p^{\pm}(\mathbf{z},t) = -\rho_0\,\partial\varphi^{\pm}(\mathbf{z},t)/\partial t$ при произвольной временно́й зависимости полей и как $p^{\pm}(\mathbf{z}) = i\omega\rho_0\varphi^{\pm}(\mathbf{z})$ при монохроматической зависимости $p^{\pm}(\mathbf{z},t) = p^{\pm}(\mathbf{z})\exp(-i\omega t)$, $\varphi^{\pm}(\mathbf{z},t) = \varphi^{\pm}(\mathbf{z})\exp(-i\omega t)$. Это согласуется с соотношениями $\varphi^{+}(\mathbf{z}) = \left\{\varphi^{-}(\mathbf{z})\right\}^{*}$, $p^{+}(\mathbf{z}) = -\left\{p^{-}(\mathbf{z})\right\}^{*}$.

Факт однородности среды приводит к тому, что классические функции Грина для потенциала колебательных скоростей зависят только от расстояния между точками $\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}$: $G_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) = G_0^{\pm}(|\mathbf{z}-\mathbf{x}|)$, в то время как матричные функции Грина зависят от вектора разности $\mathbf{z}-\mathbf{x}$: $\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z}-\mathbf{x})$. Физический смысл такого их поведения обусловлен тем, что направление распространения волны связано с вектором колебательной скорости, который может быть получен действием именно матричной функции Грина на вектор-столбец источников. Действие же на источники функции Грина для потенциала дает скалярный потенциал колебательной скорости, знак которого не зависит от направления распространения волны.

Для дальнейших рассуждений необходимо установить связь, которая существует между опережающей и запаздывающей матричными функциями Грина $\hat{G}^{\pm}$ неоднородной среды. Для функций Грина однородной среды $\hat{G}^{\pm}_{0,D=2}$ на основе (17) и (18) можно показать, что

$$\hat{G}^{\pm}_{0,D=2}(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\left(g^{\mp}_{1,D=2}\right)^* & -\left(g^{\mp}_{4,D=2}\right)^* & \left(\gamma^{\mp}_{1,D=2}\right)^* \\ -\left(g^{\mp}_{4,D=2}\right)^* & -\left(g^{\mp}_{2,D=2}\right)^* & \left(\gamma^{\mp}_{2,D=2}\right)^* \\ \left(\gamma^{\mp}_{1,D=2}\right)^* & \left(\gamma^{\mp}_{2,D=2}\right)^* & -\left(g^{\mp}_{3,D=2}\right)^* \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -g^{\mp}_{1,D=2} & -g^{\mp}_{4,D=2} & \gamma^{\mp}_{1,D=2} \\ -g^{\mp}_{4,D=2} & -g^{\mp}_{2,D=2} & \gamma^{\mp}_{2,D=2} \\ \gamma^{\mp}_{1,D=2} & \gamma^{\mp}_{2,D=2} & -g^{\mp}_{3,D=2} \end{pmatrix}^* = -\hat{\sigma}_3\left\{\hat{G}^{\mp}_{0,D=2}(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\}^* \hat{\sigma}_3,$$

или $\hat{G}^{\pm}_{0,D=2}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') = -\hat{\sigma}_3\left\{\hat{G}^{\mp}_{0,D=2}(\mathbf{z},\mathbf{z}'')\right\}^* \hat{\sigma}_3$ при произвольных $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}''$. Вид функций Грина (17) не изменится в случае произвольных аргументов $(\mathbf{z}, \mathbf{z}'')$. Для случая произвольной размерности выполнено аналогичное соотношение:

$$\hat{G}^{\pm}_{0}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') = -\hat{\sigma}_3\left\{\hat{G}^{\mp}_{0}(\mathbf{z},\mathbf{z}'')\right\}^* \hat{\sigma}_3. \qquad (19)$$

Надо обратить внимание, что матричные функции Грина имеют один и тот же порядок аргументов $(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ в обеих частях выражения (19). Функции Грина неоднородной среды для произвольных точек $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}''$ являются решениями уравнений типа Липпмана–Швингера:

$$\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') = \hat{G}^{\pm}_{0}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') + \int\limits_{\Re}\hat{G}^{\pm}_{0}(\mathbf{z},\mathbf{z}')\hat{A}_1(\mathbf{z}')\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')d\mathbf{z}'. \quad (20)$$

Здесь оператор $\hat{A}_1(\mathbf{z}') \equiv \hat{A}_0(\mathbf{z}') - \hat{A}(\mathbf{z}')$ является аналогом функции рассеивателя, а оператор

$$\hat{A}_0(\mathbf{z}) \equiv \begin{pmatrix} -i\omega\rho_0 & 0 & 0 & -\partial/\partial z_{(1)} \\ 0 & -i\omega\rho_0 & 0 & -\partial/\partial z_{(2)} \\ 0 & 0 & -i\omega\rho_0 & -\partial/\partial z_{(3)} \\ -\partial/\partial z_{(1)} & -\partial/\partial z_{(2)} & -\partial/\partial z_{(3)} & -i\omega\eta_0 \end{pmatrix}$$

характеризует волновой процесс в однородной фоновой среде, совпадая с оператором $\hat{A}(\mathbf{z})$ при $\mathbf{z} \notin \Re$. Тогда

$$\hat{A}_1(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} -i\omega(\rho_0 - \rho(\mathbf{z})) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\omega(\rho_0 - \rho(\mathbf{z})) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega(\rho_0 - \rho(\mathbf{z})) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega(\eta_0 - \eta(\mathbf{z})) \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Явный вид $\hat{A}_1$ и $\hat{\sigma}_3$ позволяет записать ряд соотношений:

$$\hat{A}_1^* = -\hat{A}_1; \quad \hat{A}_1 = \hat{\sigma}_3\hat{A}_1\hat{\sigma}_3; \quad \hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_3 = \hat{E}. \qquad (22)$$

Тогда из (20) путем замены верхних индексов "$\pm$" на "$\mp$", комплексного сопряжения получаемого выражения, умножения его на $\hat{\sigma}_3$ слева и справа, а также учета (19) и (22), следует выражение

$$-\hat{\sigma}_3\left\{\hat{G}^{\mp}(\mathbf{z},\mathbf{z}'')\right\}^* \hat{\sigma}_3 = \hat{G}^{\pm}_{0}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') +$$
$$+ \int\limits_{\Re}\hat{G}^{\pm}_{0}(\mathbf{z},\mathbf{z}')\hat{A}_1(\mathbf{z}')\left(-\hat{\sigma}_3\left\{\hat{G}^{\mp}(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')\right\}^* \hat{\sigma}_3\right)d\mathbf{z}'; \quad \mathbf{z}'' \notin \Re. \quad (23)$$

Оно представляет собой уравнение Липпмана–Швингера относительно величины $-\hat{\sigma}_3\left\{\hat{G}^{\mp}(\mathbf{z},\mathbf{z}'')\right\}^* \hat{\sigma}_3$ и по внешнему виду совпадает с уравнением (20), рассматриваемым относительно $\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'')$. Единственность решения каждого из уравнений (20) и (23) относительно упомянутых величин приводит к связи между функциями Грина неоднородной среды, обобщающей связь (19):

$$\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') = -\hat{\sigma}_3\left\{\hat{G}^{\mp}(\mathbf{z},\mathbf{z}'')\right\}^* \hat{\sigma}_3. \qquad (24)$$

Система полученных уравнений (15), (16), (24) определяет связь между запаздывающими и опережающими матричными функциями Грина, их преобразование при изменении порядка аргументов и при переходе к сопряженному оператору $\tilde{A}(\mathbf{z})$. Это дает возможность с помощью одной известной функции Грина получить все остальные. Чтобы наложить дополнительные ограничения на вид этих функций, нужно привлечь дополнительные соображения. А именно, пусть имеется запаздывающее поле излучателя, находящегося в точке $\mathbf{x} \in \mathscr{X}$, а также имеется опережающее поле излучателя, находящегося в точке $\mathbf{r} \in \Re$. Тогда акустические поля давления и колебательной скорости в каждом случае описываются системой (2):

$$\begin{cases} -i\omega\rho(\mathbf{z})\mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{z}}p^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \mathbf{f}^+\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}), & (25а) \\ \nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) - i\omega\eta(\mathbf{z})p^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \phi^+\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}); & (25б) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -i\omega\rho(\mathbf{z})\mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) + \nabla_{\mathbf{z}}p^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) = \mathbf{f}^-\delta(\mathbf{z}-\mathbf{r}), & (25в) \\ \nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) - i\omega\eta(\mathbf{z})p^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) = \phi^-\delta(\mathbf{z}-\mathbf{r}). & (25г) \end{cases}$$

Если умножить уравнения (25а)–(25г) соответственно на $\mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})$, $p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})$, $-\mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})$ и $-p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})$ и сложить все вместе полученные выражения, то все

члены, которые явно содержат параметры среды $\rho(\mathbf{z})$ и $\eta(\mathbf{z})$, взаимно уничтожаются:

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\nabla_z p^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) + p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\nabla_z \mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) - \\ &- \mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\nabla_z p^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) - p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\nabla_z \mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\mathbf{f}^+\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}) + p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\phi^+\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}) - \\ &- \mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\mathbf{f}^-\delta(\mathbf{z}-\mathbf{r}) - p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\phi^-\delta(\mathbf{z}-\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{26}$$

Уравнения (25б) и (25г) позволяют выразить функции дивергенции колебательных скоростей:

$$\begin{aligned}&\nabla_z \mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \phi^+\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}) + i\omega\eta(\mathbf{z})p^+(\mathbf{z},\mathbf{x}), \\ &\nabla_z \mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) = \phi^-\delta(\mathbf{z}-\mathbf{r}) + i\omega\eta(\mathbf{z})p^-(\mathbf{z},\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{27}$$

Тогда левую часть (26) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\nabla_z p^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) + p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\nabla_z \mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) - \\ &- \mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\nabla_z p^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) - p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\nabla_z \mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\nabla_z p^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) + p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\phi^+\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}) + \\ &+ i\omega\eta(\mathbf{z})p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})p^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) - \mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\nabla_z p^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) - \\ &- p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\phi^-\delta(\mathbf{z}-\mathbf{r}) - i\omega\eta(\mathbf{z})p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})p^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\nabla_z p^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) + p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\phi^+\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}) - \\ &- \mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\nabla_z p^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) - p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\phi^-\delta(\mathbf{z}-\mathbf{r}) + \\ &+ \left[p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\nabla_z \mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) - p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\nabla_z \mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\right] + \\ &+ \left[p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\nabla_z \mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) - p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\nabla_z \mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\right] = \\ &= \mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\nabla_z p^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) + p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\nabla_z \mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) - \\ &- \mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\nabla_z p^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) - p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\nabla_z \mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) - \\ &- p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\nabla_z \mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) + p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\nabla_z \mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) + \\ &+ p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\phi^+\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}) - p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\phi^-\delta(\mathbf{z}-\mathbf{r}) = \\ &= \nabla_z\left\{\mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})p^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) - p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\} - \\ &- p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\nabla_z \mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r}) + p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\nabla_z \mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) + \\ &+ p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\phi^+\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}) - p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\phi^-\delta(\mathbf{z}-\mathbf{r}) = \\ &= \nabla_z\left\{\mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})p^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) - p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\} \\ &- 2p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\phi^-\delta(\mathbf{z}-\mathbf{r}) + 2p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\phi^+\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{28}$$

Здесь при выполнении последнего преобразования снова применялись выражения (27). Приравнивание полученного итогового выражения (28) и правой части выражения (26) с последующим приведением подобных слагаемых позволяет записать

$$\begin{aligned}&\nabla_z\left\{\mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})p^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) - p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\} = \left\{\mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\mathbf{f}^+ - \right. \\ &\left. - p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\phi^+\right\}\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}) - \left\{\mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\mathbf{f}^- - p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\phi^-\right\}\delta(\mathbf{z}-\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{29}$$

Каждое из выражений, стоящих в (29) в фигурных скобках, можно записать в более компактной матричной форме с помощью введенных ранее матриц $\hat{\sigma}_2$, $\hat{\sigma}_3$ и представления полей в обозначениях Дирака:

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})p^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) - p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \\ &= \begin{pmatrix} v^-_{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{r}) & v^-_{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{r}) & v^-_{(3)}(\mathbf{z},\mathbf{r}) & p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\end{pmatrix}\times \\ &\times\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_{(3)} \\ -\mathbf{e}_{(1)} & -\mathbf{e}_{(2)} & -\mathbf{e}_{(3)} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^+_{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{x}) \\ v^+_{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{x}) \\ v^+_{(3)}(\mathbf{z},\mathbf{x}) \\ p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\end{pmatrix} = \\ &= \left\langle u^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\middle|\hat{\sigma}_2\middle|u^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\rangle;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\mathbf{f}^+ - p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\phi^+ = \\ &= \begin{pmatrix} v^-_{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{r}) & v^-_{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{r}) & v^-_{(3)}(\mathbf{z},\mathbf{r}) & p^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\end{pmatrix}\times \\ &\times\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f^+_{(1)} \\ f^+_{(2)} \\ f^+_{(3)} \\ \phi^+\end{pmatrix} = \left\langle u^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\middle|\hat{\sigma}_3\middle|F^+\right\rangle;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\mathbf{f}^- - p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\phi^- = \begin{pmatrix} f^-_{(1)} & f^-_{(2)} & f^-_{(3)} & \phi^-\end{pmatrix}\times \\ &\times\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^+_{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{x}) \\ v^+_{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{x}) \\ v^+_{(3)}(\mathbf{z},\mathbf{x}) \\ p^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\end{pmatrix} = \left\langle F^-\middle|\hat{\sigma}_3\middle|u^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\rangle.\end{aligned}$$

С учетом этого выражение (29) принимает вид

$$\begin{aligned}&\nabla_z\left\langle u^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\middle|\hat{\sigma}_2\middle|u^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\rangle = \\ &= \left\langle u^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\middle|\hat{\sigma}_3\middle|F^+\right\rangle\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}) - \left\langle F^-\middle|\hat{\sigma}_3\middle|u^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\rangle\delta(\mathbf{z}-\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{30}$$

Связь (5) между акустическими полями и их источниками через соответствующие функции Грина позволяет в итоге записать (30) в виде

$$\begin{aligned}&\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x})\left\langle F^-\middle|\hat{G}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\hat{\sigma}_3\middle|F^+\right\rangle - \delta(\mathbf{z}-\mathbf{r})\times \\ &\times\left\langle F^-\middle|\hat{\sigma}_3\hat{G}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\middle|F^+\right\rangle = \nabla_z\left\langle F^-\middle|\hat{G}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\hat{\sigma}_2\hat{G}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\middle|F^+\right\rangle.\end{aligned}$$

Поскольку данное соотношение выполнено при любых вектор-столбцах $\left|F^\pm\right\rangle$, оно означает равенство всех матричных элементов и, следовательно, равенство матриц, входящих в левую и правую части уравнения:

$$\begin{aligned}&\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x})\hat{G}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\hat{\sigma}_3 - \delta(\mathbf{z}-\mathbf{r})\hat{\sigma}_3\hat{G}^+(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \\ &= \nabla_z\left\{\hat{G}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\hat{\sigma}_2\hat{G}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\}.\end{aligned} \tag{31}$$

Здесь величина $\hat{G}^-(\mathbf{z},\mathbf{r})\hat{\sigma}_2\hat{G}^+(\mathbf{z},\mathbf{x})$ представляет собой матрицу, элементами которой являются векторы координатного пространства, и оператор ∇_z действует на каждый из таких матричных векторных элементов отдельно. После выполнения интегрирования по переменной $\mathbf{z}$ внутри области $V_{\mathcal{D}}$

и применения теоремы Гаусса соотношение (31) переходит в следующее:

$$\hat{G}^-(\mathbf{x},\mathbf{r})\hat{\sigma}_3 - \hat{\sigma}_3\hat{G}^+(\mathbf{r},\mathbf{x}) = \oint_{\mathcal{Y}} \hat{G}^-(\mathbf{y},\mathbf{r})\hat{\sigma}_{\mathbf{y}}\hat{G}^+(\mathbf{y},\mathbf{x})d\mathbf{y}, \quad \text{где } \hat{\sigma}_{\mathbf{y}} \equiv \hat{\sigma}_2\mathbf{n}_{\mathbf{y}};\ \ \mathbf{y},\mathbf{r} \in V_{\mathcal{Y}}. \tag{32}$$

Выражение (32) является аналогом уравнения типа уравнения Марченко, обобщая соответствующее соотношение из работ [4, 11]. После умножения (32) слева на $\hat{\sigma}_3$ оно преобразуется, с учетом (16), (24) и $\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_3 \equiv \hat{E}$, к виду

$$\hat{G}^-(\mathbf{r},\mathbf{x}) - \hat{G}^+(\mathbf{r},\mathbf{x}) = \oint_{\mathcal{Y}} \hat{G}^-(\mathbf{r},\mathbf{y})\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_{\mathbf{y}}\hat{G}^+(\mathbf{y},\mathbf{x})d\mathbf{y}. \tag{33}$$

Аналогичное соотношение как частный случай выполнено для однородных функций Грина:

$$\hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{x}) - \hat{G}_0^+(\mathbf{r},\mathbf{x}) = \oint_{\mathcal{Y}} \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{y})\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_{\mathbf{y}}\hat{G}_0^+(\mathbf{y},\mathbf{x})d\mathbf{y}. \tag{34}$$

Полученная таким образом совокупность соотношений (15), (16), (24), (33) обладает некоторой избыточностью и тем самым позволяет наложить определенные ограничения на каждую из матричных функций Грина. Подобные ограничения в случае классических функций Грина для потенциала скорости приводили в [4] к наличию взаимосвязи между фазой и амплитудой волны, рассеянной на точечной неоднородности рефракционного типа. Подход, основанный на матричных функциях Грина, позволяет получить подобную связь для точечной неоднородности более общего типа (рефракционно-плотностного), что рассматривается ниже.

МАТРИЧНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ РАССЕЯНИЯ В СЛУЧАЕ ТОЧЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛОТНОСТИ И СЖИМАЕМОСТИ СРЕДЫ

Пусть неоднородность представлена *точечным рассеивателем*, расположенным в точке $\mathbf{r}_0$, т. е.

$$\hat{A}_1(\mathbf{z}) = \hat{\varepsilon}\delta(\mathbf{z} - \mathbf{r}_0), \tag{35}$$

где матрица $\hat{\varepsilon}$ включает параметры этой неоднородности. Тогда уравнение типа Липпмана–Швингера (20) для функций Грина неоднородной среды не будет содержать операции интегрирования:

$$\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') = \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') + \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\hat{\varepsilon}\hat{G}^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}''). \tag{36}$$

Порождаемые полем $\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'')$ вторичные источники $\hat{\varepsilon}\hat{G}^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')$ можно по аналогии с [4] попытаться записать как

$$\hat{\varepsilon}\hat{G}^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'') = \hat{\beta}^{\pm}\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}''). \tag{37}$$

При этом матричные коэффициенты рассеяния $\hat{\beta}^{\pm}$ учитывают все процессы перерассеяния, идущие внутри неоднородности. Математический смысл осуществленного таким образом перехода от полного поля в точке расположения неоднородности $\hat{G}^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')$, сформированного в результате многократного рассеяния внутри этой неоднородности и в ее окрестности, к падающему полю $\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')$ состоит в следующем. Акустическое поле, рассеянное неоднородностью конечного размера, может быть представлено в виде бесконечного ряда, члены которого имеют различные порядки мультипольности. При этом неоднородность сжимаемости и неоднородность плотности среды вызывают появление членов соответственно нулевого (монопольного) и первого (дипольного) порядков мультипольности, даже когда эта неоднородность точечная. Действительно, систему уравнений гидродинамики (2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} -i\omega\rho_0\mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{z}}p^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \\ = \mathbf{f}^{\pm}\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}) + i\omega\big(\rho(\mathbf{z}) - \rho_0\big)\mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}), \\ \nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) - i\omega\eta_0 p^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \\ = \phi^{\pm}\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}) + i\omega\big(\eta(\mathbf{z}) - \eta_0\big)p^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}), \end{cases}$$

где в левую часть входят параметры только однородной фоновой среды ρ_0, η_0. При этом в правой части появляются векторные вторичные источники (дипольного типа) $i\omega(\rho(\mathbf{z}) - \rho_0)\mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})$, связанные с неоднородностью плотности $(\rho(\mathbf{z}) - \rho_0)$, и скалярные вторичные источники (монопольного типа) $i\omega(\eta(\mathbf{z}) - \eta_0)p^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})$, связанные с неоднородностью сжимаемости $(\eta(\mathbf{z}) - \eta_0)$. Рассеяние квадрупольного и более высоких порядков может быть вызвано определенным пространственным распределением плотности и сжимаемости внутри неоднородности, т.е. определяется геометрией неоднородности. При уменьшении размера неоднородности, по-видимому, можно ограничиться учетом только рассеяния монопольного и дипольного порядков, которое может быть описано с помощью вторичных источников в виде перенормированной функции Грина однородной среды $\hat{\beta}^{\pm}\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')$. Амплитуды вторичных источников монопольного типа и каждой пространственной компоненты дипольного типа задаются с помощью матричных коэффициентов рассеяния $\hat{\beta}^{\pm}$.

С учетом (37) уравнение (36) для функций Грина принимает вид

$$\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') = \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') + \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^{\pm}\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}''). \tag{38}$$

Выполняя взаимное вычитание уравнений (38), записанных для опережающей и запаздывающей функций Грина, и полагая при этом $\mathbf{z} \equiv \mathbf{r}$ и $\mathbf{z}'' \equiv \mathbf{x}$, можно получить

$$\begin{aligned} &\hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^-\hat{G}_0^-(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) - \hat{G}_0^+(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^+\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) = \\ &= \{\hat{G}^-(\mathbf{r},\mathbf{x}) - \hat{G}^+(\mathbf{r},\mathbf{x})\} - \{\hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{x}) - \hat{G}_0^+(\mathbf{r},\mathbf{x})\}. \end{aligned} \tag{39}$$

Правая часть этого соотношения с учетом (33) и (34) может быть преобразована к разности интегралов по поверхности $\mathcal{Y}$; после этого уравнение

(38) позволяет исключить из рассмотрения функции Грина неоднородной среды:

$$\begin{aligned}
&\{\hat{G}^-(\mathbf{r},\mathbf{x}) - \hat{G}^+(\mathbf{r},\mathbf{x})\} - \{\hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{x}) - \hat{G}_0^+(\mathbf{r},\mathbf{x})\} = \\
&= \oint_{\mathcal{Y}} \hat{G}^-(\mathbf{r},\mathbf{y})\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_{\mathbf{y}}\hat{G}^+(\mathbf{y},\mathbf{x})d\mathbf{y} - \oint_{\mathcal{Y}} \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{y})\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_{\mathbf{y}}\hat{G}_0^+(\mathbf{y},\mathbf{x})d\mathbf{y} = \\
&= \oint_{\mathcal{Y}} \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{y})\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_{\mathbf{y}}\hat{G}_0^+(\mathbf{y},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^+\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x})d\mathbf{y} + \\
&+ \oint_{\mathcal{Y}} \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^-\hat{G}_0^-(\mathbf{r}_0,\mathbf{y})\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_{\mathbf{y}}\hat{G}_0^+(\mathbf{y},\mathbf{x})d\mathbf{y} + \\
&+ \oint_{\mathcal{Y}} \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^-\hat{G}_0^-(\mathbf{r}_0,\mathbf{y})\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_{\mathbf{y}}\hat{G}_0^+(\mathbf{y},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^+\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x})d\mathbf{y} = \\
&= \left\{\oint_{\mathcal{Y}} \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{y})\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_{\mathbf{y}}\hat{G}_0^+(\mathbf{y},\mathbf{r}_0)d\mathbf{y}\right\}\hat{\beta}^+\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) + \\
&+ \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^-\left\{\oint_{\mathcal{Y}} \hat{G}_0^-(\mathbf{r}_0,\mathbf{y})\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_{\mathbf{y}}\hat{G}_0^+(\mathbf{y},\mathbf{x})d\mathbf{y}\right\} + \\
&+ \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^-\left\{\oint_{\mathcal{Y}} \hat{G}_0^-(\mathbf{r}_0,\mathbf{y})\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_{\mathbf{y}}\hat{G}_0^+(\mathbf{y},\mathbf{r}_0)d\mathbf{y}\right\}\hat{\beta}^+\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{40}$$

Каждый из поверхностных интегралов, стоящих здесь в фигурных скобках, может быть преобразован с учетом (34) к разности функций Грина однородной среды, т.е. (40) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\{\hat{G}^-(\mathbf{r},\mathbf{x}) - \hat{G}^+(\mathbf{r},\mathbf{x})\} - \{\hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{x}) - \hat{G}_0^+(\mathbf{r},\mathbf{x})\} = \\
&= \{\hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) - \hat{G}_0^+(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\}\hat{\beta}^+\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) + \\
&+ \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^-\{\hat{G}_0^-(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) - \hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x})\} + \\
&+ \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^-\hat{C}_D\hat{\beta}^+\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) = \\
&= \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^+\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) - \hat{G}_0^+(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^+\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) + \\
&+ \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^-\hat{G}_0^-(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) - \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^-\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) + \\
&+ \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^-\hat{C}_D\hat{\beta}^+\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{41}$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned}
\hat{C}_D &\equiv \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{r}_0}\left(\hat{G}_0^-(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) - \hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x})\right) = \\
&= \oint_{\mathcal{Y}} \hat{G}_0^-(\mathbf{r}_0,\mathbf{y})\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_{\mathbf{y}}\hat{G}_0^+(\mathbf{y},\mathbf{r}_0)d\mathbf{y}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Наконец, приравнивание левой части соотношения (39) и последнего выражения в (41) приводит к итоговому соотношению:

$$\begin{aligned}
&\hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^+\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) - \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^-\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) + \\
&+ \hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^-\hat{C}_D\hat{\beta}^+\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) = 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

Матрица $\hat{C}_D$, определенная в (42), имеет размерность $(D+1)\times(D+1)$; матрицы $\hat{\beta}^\pm$ и $\hat{\varepsilon}$ имеют такую же размерность. Использование в (42) предельного перехода обусловлено тем, что, хотя, согласно (34), формально $\hat{C}_D = \hat{G}_0^-(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_0) - \hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_0)$, но матричные функции Грина $\hat{G}_0^\pm(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_0)$ (т.е. когда точка излучения и точка наблюдения совпадают) имеют бесконечно большие мнимые части. Однако при формировании $\hat{C}_D$ в виде разности они взаимно уничтожаются, что обеспечивает существование предельного значения $\hat{C}_D$. Элементы матрицы $\hat{C}_D$ постоянны и могут быть вычислены явно для пространства каждой заданной размерности D. В частности, для двумерного случая интегрирование (42) дает

$$\hat{C}_{D=2} = -\frac{\omega}{4}\begin{pmatrix} \eta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho_0 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Важно отметить, что матрица $\hat{C}_D$ является диагональной и чисто действительной при всех значениях размерности D.

Выражение (43) можно записать как $\hat{G}_0^-(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)[\hat{\beta}^+ - \hat{\beta}^- + \hat{\beta}^-\hat{C}_D\hat{\beta}^+]\hat{G}_0^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) = 0$. Поскольку точки $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{x}$ выбираются произвольно, а коэффициенты $\hat{\beta}^+$ и $\hat{\beta}^-$ не зависят от выбора этих точек, то обязано выполняться следующее условие для коэффициентов рассеяния:

$$\hat{\beta}^- - \hat{\beta}^+ = \hat{\beta}^-\hat{C}_D\hat{\beta}^+. \tag{45}$$

С другой стороны, из (24) с учетом (38) можно заключить, что

$$\hat{\beta}^\pm = -\hat{\sigma}_3\{\hat{\beta}^\mp\}^*\hat{\sigma}_3. \tag{46}$$

Таким образом, матричные коэффициенты рассеяния удовлетворяют системе уравнений (45), (46). Отсюда можно сделать вывод о принципиальной необходимости математического описания распространения акустических волн с точки зрения многократного рассеяния, несмотря на то, что рассеиватель является точечным. Это обстоятельство ранее отмечалось также в работе [4]. Действительно, в случае однократного (борновского) рассеяния в (37) следовало бы положить $\hat{G}^\pm(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'') = \hat{G}_0^\pm(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')$, откуда $\hat{\beta}^\pm = \hat{\varepsilon}$. С другой стороны, величина $\hat{\varepsilon}$, согласно (21) и (35), определяется только параметрами среды ρ и η, и на нее не накладывается никаких ограничений, что вступает в противоречие с (46). Более того, если бы имело место $\hat{\beta}^+ \equiv \hat{\beta}^- = \hat{\varepsilon}$, то левая часть (45) тождественно обращалась бы в ноль и условие (45) не выполнялось.

Если предположить, что существуют обратные матрицы коэффициентов рассеяния, то уравнение (45) удается записать в более простом виде:

$$\left[\hat{\beta}^+\right]^{-1} - \left[\hat{\beta}^-\right]^{-1} = \hat{C}_D. \tag{47}$$

С учетом $\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_3 = \hat{E}$, можно записать

$$\begin{aligned}
\hat{E} &= \hat{\beta}^\pm\left[\hat{\beta}^\pm\right]^{-1} = \hat{\sigma}_3\hat{\beta}^\pm\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_3\left[\hat{\beta}^\pm\right]^{-1}\hat{\sigma}_3 = \\
&= \left(\hat{\sigma}_3\hat{\beta}^\pm\hat{\sigma}_3\right)\left(\hat{\sigma}_3\left[\hat{\beta}^\pm\right]^{-1}\hat{\sigma}_3\right),
\end{aligned}$$

поэтому $\left(\hat{\sigma}_3\hat{\beta}^{\pm}\hat{\sigma}_3\right)^{-1} = \hat{\sigma}_3\left[\hat{\beta}^{\pm}\right]^{-1}\hat{\sigma}_3$, откуда

$$\left[\hat{\beta}^{\pm}\right]^{-1} = \hat{\sigma}_3\left(\hat{\sigma}_3\hat{\beta}^{\pm}\hat{\sigma}_3\right)^{-1}\hat{\sigma}_3. \tag{48}$$

Тогда подстановка выражения (46) в правую часть (48) приводит к связи между обратными матрицами коэффициентов рассеяния запаздывающих и опережающих полей:

$$\left[\hat{\beta}^{\pm}\right]^{-1} = -\hat{\sigma}_3\left\{\left[\hat{\beta}^{\mp}\right]^{-1}\right\}^{*}\hat{\sigma}_3. \tag{49}$$

Каждый матричный элемент $\hat{\beta}^{+}$ и $\hat{\beta}^{-}$ является комплексным числом. Это связано с тем, что рассеяние падающей волны на неоднородности с необходимостью сопровождается некоторой задержкой по времени, которая выражается в определенном сдвиге фаз между падающей и рассеянной волнами. Таким образом, две комплекснозначные матрицы, каждая с размером $(D+1)\times(D+1)$, содержат в совокупности $4(D+1)^2$ действительных неизвестных величин. С другой стороны, системы уравнений (45) и (46) или же (47) и (49) накладывают ограничение на коэффициенты рассеяния. Каждая из них содержит $4(D+1)^2$ действительных уравнений, но независимыми являются только $2(D+1)^2$ уравнений. Это связано с тем, что при подстановке $\left[\hat{\beta}^{-}\right]^{-1}$ из (49) в (47) взаимно уничтожаются либо действительная, либо мнимая часть каждого матричного элемента результата, и тем самым $2(D+1)^2$ уравнений из $4(D+1)^2$ превращаются в тождества. В том случае, когда матрицы коэффициентов рассеяния необратимы, а значит, справедлива только система уравнений (45), (46), провести аналогичные рассуждения относительно количества независимых уравнений представляется затруднительным. Тем не менее, можно сделать предположение, что и в этом случае результат будет таким же. Таким образом, полученная система уравнений (45), (46) позволяет, с одной стороны, жестко связать матричные коэффициенты рассеяния $\hat{\beta}^{\pm}$, соответствующие запаздывающему и опережающему полям. С другой стороны, она накладывает на эти коэффициенты определенные ограничения, хотя не позволяет определить их конкретные значения.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ФАЗОЙ И АМПЛИТУДОЙ ВТОРИЧНОГО ИСТОЧНИКА, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ РАССЕЯНИИ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ КВАЗИТОЧЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Представляется важным рассмотреть двумерный случай цилиндрически симметричной рефракционно-плотностной неоднородности при стремлении радиуса цилиндра к нулю. Это позволяет считать коэффициенты рассеяния $\hat{\beta}^{\pm}$ неизменными при выполнении поворота системы координат на произвольный угол.

Пусть матрица $\hat{M}$ определяет преобразование вектор-столбцов полевых переменных и источников поля при переходе от одной системы координат к другой:

$$\left|u'^{\pm}\right\rangle = \hat{M}\left|u^{\pm}\right\rangle, \left|F'^{\pm}\right\rangle = \hat{M}\left|F^{\pm}\right\rangle.$$

Для поворота системы координат на угол ϑ матрица $\hat{M}$ имеет вид

$$\hat{M} = \hat{M}_{\text{rot}} \equiv \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Здесь единица в правом нижнем углу матрицы отражает неизменность скалярной части вектор-столбца при повороте. Блок, содержащий синусы и косинусы угла поворота, представляет собой матрицу поворота, определяющую преобразование пространственных координат колебательной скорости и векторной компоненты источников поля. Первичные источники поля $\left|F^{\pm}\right\rangle\delta(\mathbf{z}-\mathbf{z}'')$, расположенные в точке $\mathbf{x}=\mathbf{z}''$, создают в точке расположения неоднородности $\mathbf{z}=\mathbf{r}_0$ поле (5), т.е. $\left|u^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')\right\rangle = \hat{G}^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')\left|F^{\pm}\right\rangle$. Это поле, в свою очередь, порождает вторичные источники типа (37):

$$\left|F^{\pm}_{\text{sec}}\right\rangle \equiv \hat{\varepsilon}\left|u^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')\right\rangle = \hat{\varepsilon}\hat{G}^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')\left|F^{\pm}\right\rangle =$$
$$= \hat{\beta}^{\pm}\hat{G}^{\pm}_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')\left|F^{\pm}\right\rangle = \hat{\beta}^{\pm}\left|u^{\pm}_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')\right\rangle.$$

После преобразования координат $\hat{M}$ должно быть выполнено аналогичное соотношение:

$$\left|F'^{\pm}_{\text{sec}}\right\rangle = \hat{\beta}^{\pm}\left|u'^{\pm}_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')\right\rangle, \tag{51}$$

где $\hat{\beta}^{\pm}$ остаются неизменными в силу цилиндрической симметрии неоднородности; $\left|F'^{\pm}_{\text{sec}}\right\rangle \equiv \hat{M}\left|F^{\pm}_{\text{sec}}\right\rangle$ и $\left|u'^{\pm}_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')\right\rangle \equiv \hat{M}\left|u^{\pm}_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')\right\rangle$. Тогда, с одной стороны, $\left|F'^{\pm}_{\text{sec}}\right\rangle = \hat{\beta}^{\pm}\left|u'^{\pm}_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')\right\rangle = \hat{\beta}^{\pm}\hat{M}\left|u^{\pm}_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')\right\rangle$. С другой стороны,

$$\left|F'^{\pm}_{\text{sec}}\right\rangle = \hat{M}\left|F^{\pm}_{\text{sec}}\right\rangle = \hat{M}\hat{\beta}^{\pm}\left|u^{\pm}_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')\right\rangle. \tag{52}$$

Поскольку поле $\left|u^{\pm}_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')\right\rangle$ может быть выбрано произвольно, то из сравнения выражений (51) и (52) следует, что матрицы $\hat{\beta}^{\pm}$ и $\hat{M}$ коммутируют:

$$\hat{\beta}^{\pm}\hat{M} = \hat{M}\hat{\beta}^{\pm}. \tag{53}$$

Соотношение (53) позволяет, с учетом (50) и произвольности угла ϑ, уточнить явный вид матричных коэффициентов рассеяния:

$$\hat{\beta}^{\pm} = \begin{pmatrix} \beta^{\pm}_1 & \beta^{\pm}_2 & 0 \\ -\beta^{\pm}_2 & \beta^{\pm}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{\pm}_0 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Здесь комплексные величины $\beta_0^{\pm}$ отвечают за рассеяние монопольного типа, а $\beta_{1,2}^{\pm}$ – за рассеяние дипольного типа. Условие параллельности векторной части вторичных источников $\left| F_{\sec}^{\pm} \right\rangle$ и падающего поля колебательной скорости, вытекающее из симметрии задачи относительно направления колебательной скорости падающего поля в точке расположения неоднородности, требует также положить $\beta_2^{\pm} \equiv 0$. С учетом этого, а также явного вида (44) матрицы $\hat{C}_{D=2}$, непосредственная подстановка (54) при $\beta_2^{\pm} \equiv 0$ в систему (45), (46) позволяет свести ее к следующим условиям:

$$\frac{1}{\beta_1^-} - \frac{1}{\beta_1^+} = \frac{i}{4}(-i\omega\eta_0); \quad \frac{1}{\beta_0^-} - \frac{1}{\beta_0^+} = \frac{i}{2}(-i\omega\rho_0);$$
$$\beta_0^{\pm} = -\{\beta_0^{\mp}\}^*; \quad \beta_1^{\pm} = -\{\beta_1^{\mp}\}^*. \tag{55}$$

Второе из этих условий совпадает (с точностью до множителя $i\omega\rho_0$) с соотношением, полученным в [4]. Различие, связанное с наличием этого множителя, обусловлено рассмотрением в представляемой работе полей давления и колебательной скорости, а не поля потенциала колебательной скорости, рассмотренного в [4]. Следует обратить внимание, что коэффициенты $\beta_0^{\pm}$ и $\beta_1^{\pm}$ имеют разную размерность, что непосредственно видно из сравнения первого и второго условий (55). Это обусловлено разной размерностью элементов матриц $\hat{G}^{\pm}$, которые отвечают за различные волновые поля, – поле давления и поле колебательной скорости. В частном случае это можно видеть на примере выражения (17) для матричной функции Грина однородного двумерного пространства.

Комплексные коэффициенты рассеяния $\beta_0^{\pm}$ и $\beta_1^{\pm}$ можно представить в виде $\beta_0^{\pm} = \pm|\beta_0|\exp(\pm i\psi_0)$ и $\beta_1^{\pm} = \pm|\beta_1|\exp(\pm i\psi_1)$, согласующемся с двумя последними выражениями (55). Такой вид позволяет раздельно анализировать амплитуду $|\beta_{0,1}| \equiv |\beta_{0,1}^+| = |\beta_{0,1}^-|$ и фазу $\psi_{0,1}$ коэффициентов рассеяния. Тогда из условий (55) вытекает наличие связи между соответствующими амплитудами и фазами:

$$|\beta_0| = -\frac{4}{\omega\rho_0}\cos\psi_0; \quad |\beta_1| = -\frac{8}{\omega\eta_0}\cos\psi_1. \tag{56}$$

В связи с этим следует отметить ряд обстоятельств. Во-первых, коэффициенты, описывающие рассеяние монопольного и дипольного типа, оказываются ограничены по абсолютной величине значениями $(4/\omega\rho_0)$ и $(8/\omega\eta_0)$ соответственно. Абсолютная величина коэффициентов рассеяния характеризует силу возникающего вторичного источника, который описывает процессы перерассеяния "внутри" и в окрестности точечной неоднородности. Во-вторых, абсолютная величина каждого из этих коэффициентов жестко связана с его фазой, т.е. с фазой возникающего вторичного источника и с фазой порожденной им рассеянной волны. В-третьих, характер этой связи является одинаковым для рассеяния как монопольного типа, так и дипольного. В-четвертых, для запаздывающего и опережающего полей фаза коэффициентов рассеяния имеет противоположный знак, что отражает обратный по времени характер процессов рассеяния в этих двух случаях.

Связь (56) позволяет оценить максимально возможное расстояние l между отдельными элементами метаматериала, при котором его эффективные характеристики существенно отличаются от характеристик фоновой среды. Для обеспечения такого отличия можно потребовать, чтобы поле $\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^{\pm}\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')$, рассеянное расположенным в точке $\mathbf{r}_0$ элементом метаматериала, было сравнимо по абсолютной величине с полем падающей волны $\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'')$ в точке $\mathbf{z}$, где находится соседний элемент. Для оценки с учетом близости точек $\mathbf{z}$ и $\mathbf{r}_0$ можно положить $\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') \cong \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')$. Тогда упомянутое условие сводится к $\left|\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^{\pm}\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')\right| \cong \left|\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')\right|$ или

$$\left|\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^{\pm}\right| \cong \hat{E}. \tag{57}$$

Выбирая оси координат так, чтобы были справедливы равенства $z_{(1)} - r_{0(1)} = l$ и $z_{(2)} - r_{0(2)} = 0$ ($\mathbf{r}_0 = \{r_{0(1)}, r_{0(2)}\}$ в декартовой системе координат), с учетом явного вида матричной функции Грина (17), оценочное соотношение (57) запишется следующим образом:

$$\left|\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \pm\omega\eta_0\left(H_0^{\pm} - H_1^{\pm}/(k_0 l)\right) & 0 & \pm ik_0 H_1^{\pm} \\ 0 & \pm\omega\eta_0\, H_1^{\pm}/(k_0 l) & 0 \\ \pm ik_0 H_1^{\pm} & 0 & \pm\omega\rho_0 H_0^{\pm} \end{pmatrix}\hat{\beta}^{\pm}\right| \cong \hat{E}, \tag{58}$$

где $H_j^{+} \equiv H_j^{(1)}(k_0 l)$ и $H_j^{-} \equiv H_j^{(2)}(k_0 l)$, $j = 0,1$. Для рассеивателя чисто монопольного типа, обладающего максимально возможным коэффициентом рассеяния, когда $|\beta_0| = |\beta_0|_{\max} \equiv 4/(\omega\rho_0)$, $\beta_1 = 0$ и

$\beta_2 = 0$, численно из (58) можно получить, что $l = 0.14\lambda_0$, где $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ – длина волны в фоновой среде. Для рассеивателя чисто дипольного типа, когда $\beta_0 = 0$, $|\beta_1| = |\beta_1|_{\max} \equiv 8/(\omega\eta_0)$ и $\beta_2 = 0$, аналогичная оценка дает $l = 0.4\lambda_0$. Полученные оценки согласуются с [7], где на основании выполненного численного моделирования распространения волн в метасредах показана необходимость наличия определенного (не менее десятка) числа элементов метаматериала на расстоянии, равном длине волны.

РАССЕЯНИЕ ВОЛНЫ НА СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ КВАЗИТОЧЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Сделанные ранее выводы, в частности, уравнения (45), (46) остаются справедливыми и в трехмерном случае. При этом меняется явный вид матричной функции Грина однородной среды. Матрица $\hat{C}_{D=3}$, определенная в (42), при этом оказывается равной

$$\hat{C}_{D=3} = \frac{k_0\omega}{2\pi}\begin{pmatrix} \eta_0/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_0/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_0/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_0 \end{pmatrix}.$$

Для определения максимально возможного значения коэффициента рассеяния в этом случае нужно провести выкладки, аналогичные сделанным в предыдущей части работы. Прежде всего, коэффициенты рассеяния сферически симметричной квазиточечной неоднородности имеют вид

$$\hat{\beta}^{\pm} = \begin{pmatrix} \beta_1^{\pm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1^{\pm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1^{\pm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_0^{\pm} \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Диагональный вид этой матрицы обусловлен симметрией задачи по отношению к преобразованию поворота, а также осевой симметрией по отношению к направлению распространения падающей на неоднородность волны. Тогда система уравнений (45), (46) приводит к условиям, аналогичным (55):

$$\frac{1}{\beta_1^-} - \frac{1}{\beta_1^+} = \frac{ik_0}{6\pi}(-i\omega\eta_0); \quad \frac{1}{\beta_0^-} - \frac{1}{\beta_0^+} = \frac{ik_0}{2\pi}(-i\omega\rho_0);$$
$$\beta_0^{\pm} = -\{\beta_0^{\mp}\}^*; \quad \beta_1^{\pm} = -\{\beta_1^{\mp}\}^*. \tag{60}$$

Представляя комплексные коэффициенты рассеяния $\beta_0^{\pm}$ и $\beta_1^{\pm}$ в виде $\beta_0^{\pm} = \pm|\beta_0|\exp(\pm i\psi_0)$ и $\beta_1^{\pm} = \pm|\beta_1|\exp(\pm i\psi_1)$, согласующемся с двумя последними выражениями (60), можно получить связь между соответствующими амплитудами и фазами в виде

$$|\beta_0| = \frac{4\pi}{k_0\omega\rho_0}\cos\psi_0; \quad |\beta_1| = \frac{12\pi}{k_0\omega\eta_0}\cos\psi_1. \tag{61}$$

Соотношения (61) позволяют определить относительное сечение рассеяния для неоднородности малого волнового размера. Пусть на неоднородность падает запаздывающее поле плоской монохроматической волны $|u_{\text{inc}}^+\rangle = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{\text{inc}}^+ \\ p_{\text{inc}}^+ \end{pmatrix}$, интенсивность которой равна $I_{\text{inc}} = \left(|p_{\text{inc}}^+|^2/2\rho_0 c_0\right)$. Возникающий в процессе рассеяния на неоднородности вторичный источник имеет вид

$$|F_{\text{sec}}^+\rangle = \hat{\beta}^+|u_{\text{inc}}^+\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1^+\mathbf{v}_{\text{inc}}^+ \\ \beta_0^+ p_{\text{inc}}^+ \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{4\pi}{k_0\omega}\begin{pmatrix} 3\cos\psi_1\exp(i\psi_1)\,\mathbf{v}_{\text{inc}}^+/\eta_0 \\ \cos\psi_0\exp(i\psi_0)\,p_{\text{inc}}^+/\rho_0 \end{pmatrix}.$$

При этом рассеянное поле $|u_{\text{sc}}^+(\mathbf{z})\rangle \equiv |u^+(\mathbf{z})\rangle - |u_{\text{inc}}^+(\mathbf{z})\rangle$ в точке $\mathbf{z}$ определяется как $|u_{\text{sc}}^+(\mathbf{z})\rangle = \hat{G}_{0,D=3}^+(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)|F_{\text{sec}}^+\rangle$. Для того чтобы рассчитать полную рассеиваемую неоднородностью мощность N_{sc}, нужно записать поле акустического давления рассеянной волны. Это можно сделать, используя явный вид функции Грина:

$$p_{\text{sc}}^+(\mathbf{z}) = \left(i\cos\psi_0\exp(i\psi_0) + 3\frac{1 - ik_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|}{k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|}\times\right.$$
$$\left.\times\cos\psi_1\exp(i\psi_1)\cos\theta\right)\frac{\exp(ik_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|)}{k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|}p_{\text{inc}}^+. \tag{62}$$

Здесь θ – угол между вектором $\mathbf{z} - \mathbf{r}_0$, проведенным из точки расположения неоднородности $\mathbf{r}_0$ в точку наблюдения $\mathbf{z}$, и вектором колебательной скорости падающего поля $\mathbf{v}_{\text{inc}}^+$. При выводе выражения (62) учитывалась связь между давлением и колебательной скоростью падающей волны в виде $p_{\text{inc}}^+ = \rho_0 c_0 \mathbf{v}_{\text{inc}}^+$. Интегрирование интенсивности рассеянного поля $I_{\text{sc}}(\mathbf{z}) = \left(|p_{\text{sc}}^+(\mathbf{z})|^2/2\rho_0 c_0\right)$ по сфере с центром в точке расположения неоднородности $\mathbf{r}_0$ и радиусом $|\mathbf{z} - \mathbf{r}_0| \to \infty$ дает выражение для полной рассеянной мощности:

$$N_{\text{sc}} = \frac{4\pi}{k_0^2}\left(\cos^2\psi_0 + 3\cos^2\psi_1\right)I_{\text{inc}}.$$

Следует обратить внимание, что N_{sc} определяется только фазами дипольного и монопольного коэффициентов рассеяния. Несмотря на малый волновой размер неоднородности, рассеиваемая мощность остается конечной величиной. Если a – радиус неоднородности, то мощность излучения, проходящего через площадь πa^2 ее попереч-

ного сечения, равна $N_{\text{inc}} = \pi a^2 I_{\text{inc}}$. Тогда относительное сечение рассеяния этой неоднородности равно

$$\sigma = \frac{N_{\text{sc}}}{N_{\text{inc}}} = \frac{4}{(k_0 a)^2}\left(\cos^2\psi_0 + 3\cos^2\psi_1\right).$$

Таким образом, максимально достижимое относительное сечение рассеяния составляет $\sigma_{\max} = 16/(k_0 a)^2$. В том случае, когда рассеяние носит чисто монопольный характер, максимальное сечение в четыре раза меньше. Этот результат находится в соответствии с данными, приведенным в работе [6] для сферы радиусом a.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введенный аппарат матричных функций Грина позволяет описывать процессы рассеяния волн в среде, характеризующейся неоднородным распределением плотности и сжимаемости. Такое описание фактически осуществляется на основе линеаризованной системы уравнений гидродинамики и позволяет раздельно учитывать вклад от этих параметров среды. В рамках представляемой работы удалось получить ряд важных общих соотношений для матричных функций Грина: принцип взаимности, включающий (15) и не включающий (16) функции Грина сопряженного оператора; связь между запаздывающей и опережающей функциями Грина (24); уравнение типа Липпмана–Швингера для матричных функций Грина (20); соотношения типа уравнения Марченко (33).

Применение развитого в работе подхода к рассеянию волны на точечной неоднородности позволило получить общую систему уравнений (45), (46) для матричных коэффициентов рассеяния, характеризующих возникновение вторичных источников поля. При этом существуют общие ограничения, накладываемые на коэффициенты рассеяния, независимо от физической природы волновых процессов "внутри" и в окрестности неоднородности.

В важном частном случае "цилиндрически симметричной" квазиточечной неоднородности можно выделить коэффициенты, характеризующие отдельно рассеяние дипольного и монопольного типов. При этом оказывается, что существует связь (56) между фазой и амплитудой каждого такого коэффициента. Такая связь заключает в себе некоторую дополнительную информацию, которая может быть использована, например, при решении обратных задач рассеяния томографического типа. Подобные выводы можно сделать и в трехмерном случае.

Полученные связи между фазой и амплитудой коэффициентов рассеяния позволяют определить полную рассеянную мощность N_{sc} и относительное сечение рассеяния σ квазиточечной неоднородности. Обе эти величины оказываются ограниченными, причем максимально возможная мощность N_{sc} конечна и не зависит от конкретного значения волнового размера неоднородности, когда он мал.

При разработке конструкций метаматериалов ограниченность максимального коэффициента рассеяния приводит к необходимости увеличивать число элементов на длине волны как минимум до десятка вдоль каждого измерения. Недостаточное их количество может приводить к преобладанию падающего поля над рассеянным, когда поведение метаматериала близко к поведению фоновой среды, и требуемых характеристик достичь не удастся.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-22-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chan C.T., Li Jensen, Fung K.H.* On extending the concept of double negativity to acoustic waves // J. Zhejiang Univ. Science A. 2006. V. 7. № 1. P. 24–28.
2. *Li Jensen, Chan C.T.* Double-negative acoustic metamaterial // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. № 5. P. 055602-1-4.
3. *Wu Y., Lai Y., Zhang Z.-Q.* Effective medium theory for elastic metamaterials in two dimensions // Phys. Rev. B. 2007. V. 76. № 20. P. 205313-1-8.
4. *Буров В.А., Морозов С.А.* Связь между амплитудой и фазой сигнала, рассеянного "точечной" акустической неоднородностью // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 6. С. 751–756.
5. *Бадалян Н.П., Буров В.А., Морозов С.А., Румянцева О.Д.* Рассеяние на акустических граничных рассеивателях с малыми волновыми размерами и их восстановление // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 1. С. 3–10.
6. *Бобровницкий Ю.И.* Импедансная теория рассеяния и поглощения звука: условно лучший поглотитель и предельные возможности пассивных рассеивателей и поглотителей // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 1. С. 113–118.
7. *Буров В.А., Дмитриев К.В., Сергеев С.Н.* Акустические "дважды отрицательные" среды // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 3. С. 292–306.
8. *Горюнов А.А., Сасковец А.В.* Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: МГУ, 1989. 152 с.
9. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
10. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: ИЛ.,1958. 923 с.
11. *Budreck D., Rose J.H.* Three-dimensional inverse scattering in anisotropic elastic media // Inverse Problems. 1990. V. 6. P. 331–348.