

## НЕЛИНЕЙНЫЙ ЭКРАН КАК ЭЛЕМЕНТ СИСТЕМ ДЛЯ ЗВУКОПОГЛОЩЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТОТЫ

© 2016 г. О. В. Руденко<sup>1, 2, 3, 4, 5</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
физический факультет  
119991 ГСП-1 Москва, Ленинские горы  
E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

<sup>2</sup>Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН

<sup>3</sup>Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

<sup>4</sup>Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden

<sup>5</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН

Поступила в редакцию 24.08.2015 г.

Обсуждается модель экрана с диссипативными и нелинейными упругими свойствами, который можно использовать в акустических системах звукопоглощения и преобразования частоты. Изложены схемы расчетов и оценки, необходимые для понимания функциональных возможностей устройства. Приводятся примеры нелинейных элементов в экране и описание приложений, представляющих перспективными.

**Ключевые слова:** нелинейный экран, поглощение, преобразование частоты, параметрический громкоговоритель.

DOI: 10.7868/S032079191601007X

### ВВЕДЕНИЕ

Авторам и читателям Акустического журнала хорошо знаком сайт <http://www.akzh.ru>, который открывает доступ к текстам всех опубликованных в журнале статей [1]. В рубрике 10.07 “Поглотители слабых и интенсивных акустических волн” размещено около 150 работ (см. <http://www.akzh.ru/html/gubr1007.htm>), содержание которых связано с проблемой создания звукопоглощающих материалов и конструкций и проблемой гашения шума. В числе недавно опубликованных работ укажем на статьи [2, 3].

Как показывает анализ данных в рубрике 10.07, для расчетов звукопоглощающих систем используется главным образом “импедансный” подход. Он весьма эффективен для решения линейных задач, когда требуется рассчитать частотные характеристики материала, в том числе зависимости коэффициентов поглощения и отражения от частоты. Если нужно найти импульсный отклик линейной системы (ее передаточную характеристику), разложение в спектр удобно не всегда. Когда же решается нелинейная задача, более продуктивными оказываются подходы, не использующие разложение волн в частотный спектр. Такие подходы и соответствующие нелинейные модели были предложены, в частности, в работах [4, 5].

### ОПИСАНИЕ ЭКРАНА И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Нелинейный экран на рис. 1 содержит тонкую мембрану массы  $m$  и площадью  $S$ , плоскость которой ортогональна оси  $x$  в точке  $x = 0$ . За мембраной в области  $0 < x < d$  расположена конструкция, обладающая диссипативными и упругими (вообще говоря, нелинейными) свойствами. Область  $x > d$  занята массивной неподвижной стенкой.

Слева на экран падает волна  $p_i(t - x/c)$ , а отражается от него волна  $p_r(t + x/c)$ , бегущая в противоположную сторону. Поле акустического давления в области  $x < 0$  есть сумма этих двух волн:

$$p(x, t) = p_i(t - x/c) + p_r(t + x/c). \quad (1)$$

Соответствующее поле колебательной скорости  $u$  таково:

$$\rho c u(x, t) = p_i(t - x/c) - p_r(t + x/c). \quad (2)$$

Здесь  $\rho$  и  $c$  — плотность среды и скорость звука. Смещение плоскости  $x = X(t)$  должно совпадать со смещением частиц в волне на поверхности мембраны. Поэтому выражение для давления, оказываемого волной на мембрану, получаемое из соотношений (1), (2), имеет вид

$$p(x = 0, t) = p_i(t) + p_r(t) = 2p_i(t) - \rho c \dot{X}(t). \quad (3)$$

Точка обозначает дифференцирование по времени. Уравнение движения мембраны с учетом (3) будет таким:

$$\ddot{X} + \left(2\delta + \frac{\rho c S}{m}\right) \dot{X} + \omega_0^2 f(X) = \frac{2S}{m} p_i(t). \quad (4)$$

Здесь функция  $f(X)$  описывает нелинейную упругую реакцию пружинок, изображенных на рис. 1. Коэффициент  $\delta$  описывает линейное трение, зависящее от скорости,  $\omega_0$  – собственная частота колебаний в линейном случае, когда пружинки гукковские (то есть  $f(X) = X$ ), а трения нет. В более общем случае вынужденные колебания мембраны можно описать уравнением

$$\hat{L}X + \frac{\rho c S}{m} \dot{X} + \omega_0^2 f(X) = \frac{2S}{m} p_i(t). \quad (5)$$

Здесь  $\hat{L}$  – линейный дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор.

### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Напомним вначале основные выводы, следующие из решения линейной задачи в рамках модели (4). Как показано в учебном пособии [6] (см. задачу 1.5.11), при падении на экран сигнала, изменяющегося во времени по гармоническому закону  $p_i(t) = p_0 \exp(-i\omega t)$ , возникает отраженная волна:

$$\frac{p_r(t)}{p_0} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\delta\omega \left(1 - \frac{\rho c S}{2\delta m}\right)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\delta\omega \left(1 + \frac{\rho c S}{2\delta m}\right)} \exp(-i\omega t). \quad (6)$$

Формула (6) содержит известный результат: отраженная волна полностью поглощается экраном на частоте  $\omega = \omega_0$ , если диссипация и потери на излучение связаны соотношением

$$2\delta m = \rho c S. \quad (7)$$

Однако этот результат относится лишь к установившемуся режиму. Если на экран падает квазигармонический модулированный сигнал либо одиночный импульс, картина немного усложняется.

Рассмотрим, например, сигнал на резонансной частоте, который появляется в момент времени  $t = 0$ :

$$p_i(t) = p_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \sin(\omega_0 t), \quad t \geq 0. \quad (8)$$

В наиболее интересном случае, когда соотношение (7) выполняется, отраженная волна в приближении узкополосного сигнала  $\omega_0 \tau \gg 1$  имеет вид

$$p_r(t) = p_0 \left( \frac{\rho c S \tau}{m} - 1 \right)^{-1} \times \left[ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{\rho c S}{m} t\right) \right] \sin(\omega_0 t). \quad (9)$$

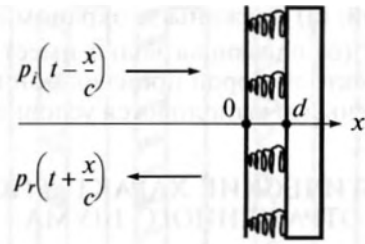


Рис. 1. Схема работы нелинейного экрана.

Как следует из анализа отклика (9), существует переходный процесс. Вначале амплитуда отраженной волны растет, а при  $t \rightarrow \infty$  она стремится к нулю – отражение исчезает.

Если падающий сигнал широкополосный, для нахождения отраженного сигнала удобно воспользоваться решением уравнения (4), записанным (при  $f(X) = X$ ) через функцию Грина  $G(t)$ :

$$X = \frac{2S}{m} \int_0^{\infty} p_i(t-t') G(t') dt'. \quad (10)$$

Здесь обозначено

$$G(t) = \frac{1}{q} \exp(-\delta_* t) \sin(qt), \quad (11)$$

$$\delta_* = \delta + \frac{\rho c S}{2m}, \quad q = \sqrt{\omega_0^2 - \delta_*^2}.$$

Теперь, пользуясь соотношением (3), найдем отраженную волну:

$$p_r(t) = p_i(t) - \frac{2\rho c S}{m} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} p_i(t-t') G(t') dt'. \quad (12)$$

Например, если на экран падает короткий импульс  $p_i(t) = p_0 \delta(t)$ , отраженный сигнал будет таким:

$$p_r(t) = p_0 \delta(t) - \frac{2\rho c S}{m} p_0 \frac{d}{dt} G(t). \quad (13)$$

Из формул (12), (13) следует интересный факт. Для функции Грина следующего вида

$$G = \frac{m}{2\rho c S} H(t) \quad (14)$$

(здесь  $H(t)$  – единичная функция Хевисайда) получается  $p_r(t) \equiv 0$  – отражение отсутствует при любой форме падающего сигнала. При этом из формулы (10) имеем

$$X = \frac{1}{\rho c} \int_0^{\infty} p_i(t-t') dt', \quad \dot{X} = \frac{1}{\rho c} p_i(t). \quad (15)$$

Подставляя вторую формулу (15) в соотношение (3), убеждаемся, что отраженного сигнала нет. Обращаясь к уравнению (4) для вынужденных колебаний мембраны, видим, что оно превращается в уравнение (15) при выполнении одновременно

трех условий: (а) пружины за экраном отсутствуют ( $\omega_0 = 0$ ); (б) падающая волна имеет низкочастотный спектр и второй производной в (4) можно пренебречь; (в) выполняется условие (7).

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТРАЖЕННОГО ШУМА**

Если на экран падает шумовая волна, нужно рассчитать основные статистические характеристики отраженного сигнала – спектр интенсивности и корреляционную функцию. Считаем падающий сигнал стационарным шумом. При этом из формулы (6) получаем следующую связь между спектрами интенсивности  $Q$  падающей и отраженной волн:

$$Q_r(\omega) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 \left(1 - \frac{\rho c S}{2\delta m}\right)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 \left(1 + \frac{\rho c S}{2\delta m}\right)^2} Q_i(\omega). \tag{16}$$

Если выполнено условие (7), связь (16) приобретает простой вид:

$$Q_r(\omega) = \left[ 1 - \left(\frac{2\rho c S}{m}\right)^2 \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \left(\frac{2\rho c S}{m}\right)^2} \right] Q_i(\omega). \tag{17}$$

Интеграл по частотам от функции  $Q_r(\omega)$  дает полную интенсивность  $I_r$  отраженного сигнала. Если принять, что спектральная плотность падающего шума есть константа  $Q_0$  в полосе  $-\Delta < \omega < \Delta$ , из формулы (17) следует

$$I_r = I_i \left(1 - \frac{\pi \rho c S}{\Delta m}\right), \quad I_i = 2\Delta Q_0. \tag{18}$$

Очевидно, интенсивность отраженного сигнала меньше интенсивности падающего – часть энергии волны поглощается экраном.

Корреляционная функция для стационарного шума, согласно теореме Винера–Хинчина, есть преобразование Фурье от спектральной плотности. Считая падающий сигнал узкополосным с центральной частотой  $\omega_0$ , найдем из формулы (17):

$$R_r(\tau) = \frac{\pi}{\Delta} I_i \left[ \delta(\tau) - \frac{\rho c S}{m} \exp\left(-\frac{2\rho c S}{m} |\tau|\right) \right]. \tag{19}$$

Интеграл от (19) равен нулю, поэтому  $Q_r(0) = 0$ .

**НЕЛИНЕЙНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ НИЗКИХ ЧАСТОТ**

Рассмотрим теперь нелинейный экран. Среду в области  $x < 0$  по-прежнему считаем линейной. Похожий подход использован в теории, развитой для диагностики малых неоднородностей [7]. Очевидно, что экран будет генерировать высшие

гармоники спектра падающей волны, которые появятся и в спектре отраженного сигнала.

Пусть на экран с квадратичной нелинейностью  $f(X) = X(1 + \gamma X)$  падает волна, содержащая две близкие высокие частоты:

$$p_i(t) = \frac{1}{2} [P_1 \exp(-i\omega_1 t) + P_2 \exp(-i\omega_2 t)] + \text{с.с.} \tag{20}$$

Символом “с.с.” в формуле (20) обозначены комплексно сопряженные слагаемые, которые в явном виде не выписаны. Разностную частоту считаем малой:  $\omega_1 - \omega_2 = \Omega \ll \omega_1, \omega_2$ . Таким образом, осциллятор (14) будет совершать колебания, спектр которых лежит как в высокочастотной, так и в низкочастотной областях.

Используем метод последовательных приближений, считая, что нелинейность слабая. Для амплитуд высокочастотных гармоник решаем линейное уравнение первого приближения. Получаем

$$X_{1,2} = \frac{2S}{m} \frac{P_{1,2}}{\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2 - i2\delta_* \omega_{1,2}}. \tag{21}$$

Для колебаний на разностной частоте требуется решить уравнение второго приближения

$$\ddot{X} + 2\delta_* \dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{\gamma}{2} \omega_0^2 X_1 X_2^* \exp(-i\Omega t). \tag{22}$$

Амплитуда этой гармоники равна

$$X_- = -\frac{\gamma \omega_0^2}{2} \frac{X_1 X_2^*}{\omega_0^2 - \Omega^2 - i2\delta_* \Omega}. \tag{23}$$

Примем для определенности

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{\Omega}{2}, \quad \omega_2 = \omega_0 - \frac{\Omega}{2}, \quad \Omega \ll \omega_0, \delta. \tag{24}$$

Кроме того, считаем, что условие (7) наилучшего поглощения высокочастотных гармоник выполнено. При этом из (21), (23) следует

$$X_- = -\frac{\gamma}{2} \frac{P_1 P_2^*}{(\rho c \omega_0)^2}. \tag{25}$$

Найдем теперь волну, отраженную от экрана. Она, согласно соотношению (3), в рассматриваемом приближении описывается формулой

$$p_r = p_i - \rho c \dot{X} \approx -i \frac{m\Omega}{2\rho c S} P_1 \exp(-i\omega_1 t) + i \frac{m\Omega}{2\rho c S} P_2 \exp(-i\omega_2 t) - \frac{i}{2} \gamma \frac{\Omega}{\rho c \omega_0^2} P_1 P_2^* \exp(-i\Omega t). \tag{26}$$

Интересующий нас спектр отраженной волны (26) содержит две высокие частоты  $\omega_1, \omega_2$  и одну низкую частоту  $\Omega$ . При этом амплитуды всех гармоник пропорциональны  $\Omega$ . Этот факт отличает преобразование на нелинейном экране от преобразования вниз по спектру в объеме нелинейной среды.

Отношение амплитуд волн низкой и высокой частот по порядку величины равно

$$\frac{LF}{HF} = \frac{\gamma S}{m\omega_0^2} P_{1,2}. \quad (27)$$

При достаточно большой интенсивности падающих на экран волн и достаточно сильной нелинейности отношение (27) может быть порядка единицы. Это связано с тем, что в режиме, обсуждавшемся выше, экран работает одновременно как эффективный поглотитель для высоких частот и как преобразователь волновой энергии в низкочастотный диапазон.

### МИКРОСТРУКТУРЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭКРАНОВ

Начнем с рассмотрения классического нелинейного элемента – контакта Герца. Пусть есть два соприкасающихся шара с радиусами  $R_1, R_2$ , сделанных из материалов с модулями Юнга  $E_1, E_2$  и коэффициентами Пуассона  $\sigma_1, \sigma_2$ . Если шарики прижать друг к другу силой  $F$ , расстояние между их центрами уменьшится на величину  $X$  [8]:

$$X = \beta F^{2/3}, \quad \beta = \left( D^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^{1/3}, \quad (28)$$

$$D = \frac{3}{4} \left( \frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2} \right).$$

Видно, что связь между силой и сближением шаров  $X$  сильно нелинейная – она не может быть разложена в ряд по малым деформациям [9, 10]. Если первый шар лежит на плоской поверхности, нужно положить  $R_2 \rightarrow \infty$ . При этом  $\beta = (D^2/R_1)^{1/3}$ , а модули  $E_2, \sigma_2$  будут характеризовать материал, границей которого является плоскость.

Чтобы усилить нелинейное преобразование, нужно стремиться к тому, чтобы сближение  $X$  под действием акустического давления  $p = F/S$  было максимально возможным. Для этого, очевидно, нужно взять шары небольшого радиуса  $R_1$ , сделанные из резиноподобного материала с малым значением модуля Юнга  $E_1$  и  $\sigma_1 \approx 0.5$ . В этом случае

$$X \approx 0.68 (E^2 R)^{-1/3} F^{2/3}, \quad F \approx 1.8 (E^2 R)^{1/2} X^{3/2}. \quad (29)$$

В формуле (29), очевидно, модуль Юнга и радиус относятся к шару, поэтому индекс “1” опущен.

На схеме 1 рис. 2 показана возможная идея использования нелинейности контактов Герца внутри экрана. На схеме 2 рис. 2 шарики заменены элементами другой формы, деформация которых также сильно нелинейная [8]. В качестве нелинейных элементов можно использовать оболочечные или ламеллярные системы [8], испытывающие сильный изгиб (рис. 2, схема 3). Как показано в работе [11], нелинейным является контакт шероховатых

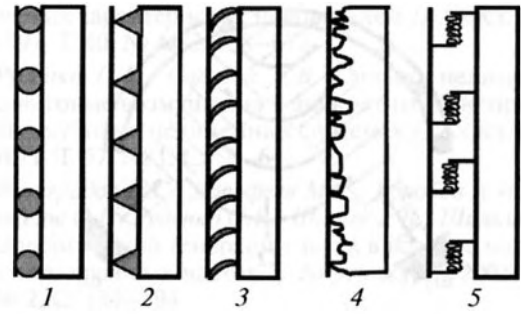


Рис. 2. Нелинейные структуры в экране.

поверхностей, содержащий микровыступы (рис. 2, схема 4). Возможно также использование метаматериалов, где сильная нелинейность обеспечивается деформированием упругих элементов, ограниченными связями [12] (рис. 2, схема 5).

Для проведения оценок вернемся к анализу контактов Герца. Учтем, что в равновесии, когда падающей волны нет, контакт немного поджат за счет собственного веса мембраны (если она ориентирована горизонтально), ее частичного прилипания к стенке или благодаря специально приложенной силе  $F_0$ . Акустическая волна возмущает приложенную силу  $F = F_0 + F'$  и сближение  $X = X_0 + X'$ . Возмущенные значения, зависящие от времени, помечены штрихами. Согласно (29), с точностью до квадратично нелинейных членов эти возмущения связаны соотношением

$$F_0 + F' \approx 1.8 (E^2 R)^{1/2} X_0^{3/2} + 2.7 (E^2 R)^{1/2} X_0^{1/2} X' \left( 1 + \frac{X'}{4X_0} \right). \quad (30)$$

Отсюда находим константы, определяющие нелинейную динамику (4) мембраны:

$$\omega_0^2 = \frac{2.7}{m} N (E^2 R)^{1/2} X_0^{1/2}, \quad \gamma = \frac{1}{4X_0}. \quad (31)$$

Здесь  $N$  – число контактов Герца, определяющих жесткость экрана. Из второй формулы (31) видно, что при слабом поджатии  $X_0$  нелинейность  $\gamma$  может быть большой.

Подставляя выражения (31) в формулу (27), приведем ее к виду

$$\frac{LF}{HF} = \frac{SP_1}{N} (X_0 E^2 R)^{-1/2}. \quad (32)$$

Ниже будет обсуждаться возможность использования нелинейных экранов для усиления эффекта параметрических громкоговорителей в воздушной среде [13]. Типичные уровни акустического давления на частотах порядка 40 кГц здесь достигают 100 Па (130 дБ). При этом смещение частиц среды в акустической волне порядка 1 мкм.

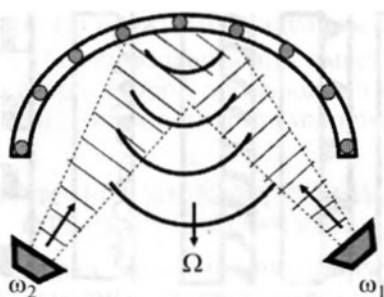


Рис. 3. Нелинейный экран в помещении.

Примем, в соответствии с технологическими возможностями,  $R \sim 4$  мкм,  $E \sim 7.8$  МПа,  $X_0 \sim 1$  мкм,  $N/S \sim 10^7$  1/м<sup>2</sup>. При этом отношение амплитуд (32) будет порядка единицы. Его можно существенно увеличить за счет уменьшения статического поджатия  $X_0$ , а также иных технических приемов, которые здесь не обсуждаются.

#### ВОЗМОЖНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Параметрические громкоговорители в воздушной среде используют принцип нелинейной генерации низкочастотных сигналов пучками волн большой интенсивности, формируемых высокочастотными излучателями. Этот принцип реализован в гидроакустике (см. книгу [14] и приведенную в ней библиографию). Позднее параметрические излучатели стали использоваться в воздушной среде для создания направленного излучения в слышимом диапазоне частот с помощью ультразвуковых излучателей небольшой апертуры. К сожалению, в отличие от подводных приложений, интенсивный ультразвук в воздухе, хотя и не слышен человеком, но создает дискомфорт и небезопасен для здоровья. Это одна из причин, ограничивающих коммерческое использование параметрических громкоговорителей [15]. Нелинейный экран может частично устранить отмеченный недостаток.

На рис. 3 изображен нелинейный экран, облучаемый волновыми пучками с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , лежащими в ультразвуковом диапазоне. В области пересечения пучков рождается волна с частотой  $\Omega$  слышимого диапазона. Звук, воспринимаемый слушателем, идет лишь от “пятна” на экране, которое может перемещаться, создавая стереофонический эффект. Кроме этого, экран может усиливать слышимые частоты и служить элементом, вносящим дополнительный вклад в нелинейную генерацию низких частот в объеме воздушной среды.

На рис. 4 пояснены возможности индивидуального использования нелинейных экранов. На рис. 4а экран выполняет функцию наушника. Направляя на него ультразвуковую волну, можно

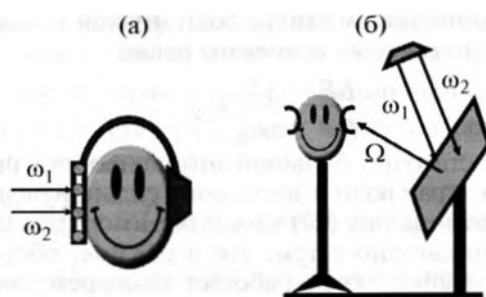


Рис. 4. Индивидуальное использование нелинейных экранов.

реализовать “суфлирование” – скрытно передавать сообщения нужному человеку, не беспокоя его соседей.

На рис. 4б нелинейный экран выполняет функции “экскурсовода”. Подходя к экспонату, человек получает аудиоинформацию о нем, причем эта информация доступна лишь в специальной области рядом с объектом.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе обсуждается использование нелинейных экранов для преобразования энергии волн в низкочастотную область спектра с одновременным подавлением волн высоких частот. Возможны иные применения нелинейных экранов, в которых подавляются другие выбранные области спектра. Как известно, селективное подавление “ключевых” гармоник – это один из способов повышения эффективности нелинейных взаимодействий в средах без дисперсии (см. обзор [16], раздел б). Укажем также, что создание сильно нелинейных микроструктур (см. рис. 2) и метаматериалов на их основе представляет заметный интерес для многих приложений.

Работа поддержана грантом РФФИ 15-02-04306.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шамаев В.Г., Горшков А.Б., Жаров А.В. Архив “Акустического журнала” в Интернете // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 2. С. 283–288.
2. Ипатов М.С., Остроумов М.Н., Соболев А.Ф. Влияние спектра высокоинтенсивного источника звука на звукопоглощающие свойства облицовок резонансного типа // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 4. С. 465–472.
3. Белов В.Д., Мигун Ю.Г., Орлов А.И. Гибридный активный-пассивный звукопоглотитель // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 4. С. 419–424.
4. Руденко О.В., Хирных К.Л. Модель резонатора Гельмгольца для поглощения интенсивного звука // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 3. С. 527–534.

5. *Заикин А.А., Руденко О.В.* Нелинейная модель резонатора Гельмгольца с подвижной стенкой // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 3. С. 378–382.
6. Акустика в задачах. 2-е изд. / Под ред. С.Н. Гурбатова и О.В. Руденко М.: Физматлит, 2009. 336 с.
7. *Hedberg C.M., Rudenko O.V.* Pulse response of a nonlinear layer // J. Acoust. Soc. Am. 2001. V. 110. № 5. P. 2340–2350.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
9. *Руденко О.В.* Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // Успехи физ. наук. 2006. Т. 176. № 1. С. 77–95.
10. *Rudenko O.V., Hedberg C.M.* Strong and weak nonlinear dynamics: models, classification, examples // Acoust. Phys. 2013. V. 59. № 6. P. 644–650.
11. *Руденко О.В., Чинь Ань Ву.* Нелинейные акустические свойства контакта шероховатых поверхностей и возможности акустодиагностики статистических характеристик неровностей // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 4. С. 668–672.
12. *Руденко О.В., Солодов Е.В.* Сильно нелинейные сдвиговые возмущения в дискретных и непрерывных кубично нелинейных системах // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 1. С. 56–64.
13. *Виноградов Н.С., Дорофеев М.С., Коробов А.И., Михайлов С.Г., Руденко О.В., Шанин А.В., Шилкин А.О.* О нелинейной генерации звука в воздухе волнами ультразвуковых частот // Акуст. журн. 2005. Т. 51 № 2. С. 189–194.
14. *Novikov B.K., Rudenko O.V., Timoshenko V.I.* Nonlinear underwater acoustics. New York: Am. Inst. Phys., 1987.
15. *Kim Jung Ho, Kim Jun Tai, Rudenko Oleg V., Shanin Andrey V.* Screen for playing audible signals by demodulating ultrasonic signals having the audible signals. Patent number: 7747029. US Patent 4,667,088. Issued: June 29, 2010. Assignee: Samsung Electronics Co., Ltd.
16. *Rudenko O.V.* Nonlinear sawtooth-shaped waves // Physics-Uspekh (Adv. Phys. Sci.). 1995. V. 38. № 9. P. 965–969.