АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2016, том 62, № 3, с. 271–276

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

ОПТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН

© 2016 г. Ю. А. Еремин*, А. Г. Свешников**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической физики 119991 ГСП-1, Москва, Ленинские горы

**Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, 119991 ГСП-1, Москва, Ленинские горы

E-mail: eremin@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 15.07.2015 г.

Получено обобщение оптической теоремы на случай возбуждения локального тела мультипольными источниками. Установлено, что для вычисления сечения экстинкции достаточно вычислить производные от рассеянного поля в одной-единственной точке. Показано, что такой существенный параметр, как коэффициент Перселля, может быть представлен в аналитическом виде. Проведено обобщение полученного результата на случай локального рассеивателя, внедренного в однородное полупространство.

Ключевые слова: оптическая теорема, мультипольный источник, коэффициент Перселля, рассеиватель в полупространстве.

DOI: 10.7868/S0320791916030060

ВВЕДЕНИЕ

Оптическая теорема (ОТ) представляет собой фундаментальный результат теории распространения волн, состоящий в том, что сумма сечения рассеяния плоской волны на локальном теле и сечения поглощения оказывается равной сечению экстинкции. Сечение экстинкции представляет собой функционал диаграммы рассеяния поля, рассчитанной в одной-единственной точке в направлении распространения плоской волны. В российской науке, относящейся к теории дифракции волн, термин ОТ появляется в монографии [1]. Существенную роль оптическая теорема играет при вычислении сечения поглощения для случая рассеивателей с поглощением посредством вычисления разности сечений экстинкции и рассеяния [2]. Подобный подход представляется естественным, так как ближние поля в теории дифракции, как правило, вычисляются с меньшей точностью, чем поля в дальней зоне [3].

ОТ используется в многочисленных приложениях не только теории дифракции световых волн, но и в акустике, сейсмике и даже квантовой механике [4–7]. В вычислительной дифракции она применяется для оценки правильности работы компьютерного модуля в случае рассеивателя без поглощения, посредством сравнения сечений рассеяния и экстинкции [8, 9]. Известны обобщения ОТ на случай дифракции поля плоской волны на локальном теле при наличии полупространства [10–12]. В работах [13, 14] проведено обобщение ОТ на случай акустической гранично-контактной задачи в присутствии бесконечной пластины конечной толщины. При этом в работе [14] рассмотрено возбуждение как плоской акустической волной, так и поверхностной волной, возникающей в самой пластине. В работах [15, 16] ОТ обобщена на случай возбуждения рассеивателя точечным источником, расположенным в свободном пространстве. В работе авторов [17] впервые выполнено обобщение ОТ на случай возбуждения локального тела точечным источником в присутствии однородного полупространства.

Вместе с тем, диаграмма направленности точечного источника недостаточна для проведения направленного сканирования области расположения рассеивателя. Все это с большим успехом может быть осуществлено при помощи мультиполей, которые позволяют сформировать более узкую и направленную диаграмму. В данной работе проведено обобщение ОТ на случай возбуждения локального тела мультипольным источником любого порядка. В частности, показано, что полученное соотношение позволяет вычислять коэффициент Перселля [16] без вычисления сечений поглощения и рассеяния, что существенно снижает вычислительные затраты. Проведено обобщение ОТ на случай возбуждения мультипольным источником тела, расположенного в однородном полупространстве.

ОПТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для начала рассмотрим математическую постановку задачи дифракции поля мультипольного источника, расположенного в свободном пространстве $\Re^3$ в точке M_0, на локальном проницаемом теле D_i с гладкой поверхностью $S \in C^{(2,\alpha)}$. Тогда математическая постановка задачи имеет вид

$$\Delta U_0 + k_0^2 U_0 = -J(M, M_0), \quad M_0 \in D_0 := R^3/\overline{D_i};$$
$$\Delta U_i + k_i^2 U_i = 0, \quad M \in D_i;$$
$$[U(P)] = [\partial U(P)/\partial n] = 0, \quad P \in S; \tag{1}$$
$$\frac{\partial U_0}{\partial r} + jk_0 U_0 = o(1/r), \quad r := |M| \to \infty.$$

Здесь $J(M, M_0)$ описывает вид и порядок мультиполя, [.] означает скачок полей при переходе через S, n – нормаль к поверхности S, $\operatorname{Im} k_i^2 < 0$, что соответствует временнóй зависимости $\exp\{j\omega t\}$.

Выберем произвольно начало декартовой системы координат и направим ось Oz так, чтобы она проходила через точку расположения источника $M_0 = (0, 0, z_0)$. Рассмотрим для простоты изложения осесимметричные мультиполи. Для них справедливо следующее фундаментальное представление [18]:

$$h_n^{(2)}(k_0 r) P_n(\cos\theta) = \left\{-(j)^{n-1} P_n\left(\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}\frac{\exp\{-jk_0 r\}}{k_0 r}, \tag{2}$$

где $h_n^{(2)}(x)$ – сферическая функция Ханкеля, $r = (x, y, z - z_0)$ в декартовой системе координат, $P_n(\bullet)$ – полином Лежандра. Учитывая, что фундаментальное решение уравнения Гельмгольца имеет вид

$$\Psi(M, M_0) = \frac{\exp\{-jk_0 R_{MM_0}\}}{4\pi R_{MM_0}},$$

и вводя обозначение w_n для мультиполей (2), получим

$$w_n(M, M_0) = h_n^{(2)}(k_0 r) P_n(\cos\theta) = \frac{4\pi}{k_0}\left\{-(j)^{n-1} P_n\left(\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}\Psi(M, M_0). \tag{3}$$

В силу того, что $\Delta\Psi + k_0^2\Psi = -\delta(M - M_0)$, имеем для мультипольных источников

$$\Delta w_n + k_0^2 w_n = -\frac{4\pi}{k_0}\left\{-(j)^{n-1} P_n\left(\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}\delta(M - M_0). \tag{4}$$

Таким образом, исходное возбуждение имеет следующий вид:

$$J(M, M_0) = \frac{4\pi}{k_0}\left\{-(j)^{n-1} P_n\left(\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\} \times \delta(M - M_0).$$

Отметим, что краевая задача в подобной постановке имеет единственное решение [19].

Окружим рассеиватель сферой Σ_R радиуса R, содержащей M_0 и D_i внутри себя. Будем обозначать D_R область пространства, ограниченную сферой Σ_R. Применяя в D_R/D_i вторую формулу Грина к U_0 и U_0^*, имеем

$$\int\limits_{D_R/D_i} (\Delta U_0 U_0^* - \Delta U_0^* U_0) d\tau = \int\limits_{\Sigma_R \cup S} \left\{\frac{\partial U_0}{\partial n} U_0^* - \frac{\partial U_0^*}{\partial n} U_0\right\} d\sigma. \tag{5}$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial n}$ – нормальная производная к соответствующей поверхности, направленная вовне области D_R/D_i. Тогда левая часть (5) преобразуется следующим образом:

$$\int\limits_{D_R/D_i} (\Delta U_0 U_0^* - \Delta U_0^* U_0) d\tau = 2j\frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Im}\int\limits_{D_R/D_i} U_0(P) \times \left\{-(j)^{n-1} P_n\left(\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}\delta(P - M_0) d\tau_P = 2j\frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Im}\int\limits_{D_R/D_i}\left\{-(j)^{n-1} P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\} \times U_0(P)\delta(P - M_0) d\tau_P. \tag{6}$$

Правая часть (5) может быть представлена в виде

$$2j\operatorname{Im}\int\limits_{\Sigma_R \cup S} \frac{\partial U_0}{\partial n} U_0^* d\sigma = 2j\operatorname{Im}\int\limits_{\Sigma_R} \frac{\partial U_0}{\partial n} U_0^* d\sigma - 2j\operatorname{Im}\int\limits_{S} \frac{\partial U_0}{\partial n^+} U_0^* d\sigma, \tag{7}$$

где $\frac{\partial}{\partial n^+}$ – нормальная производная по внешней нормали к D_i. Тогда (6), (7) можно переписать как

$$\frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Im}\int\limits_{D_R/D_i}\left\{-(j)^{n-1} P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\} U_0(P) \times \delta(P - M_0) d\tau_P = \operatorname{Im}\int\limits_{\Sigma_R} \frac{\partial U_0}{\partial r} U_0^* d\sigma - \operatorname{Im}\int\limits_{S} \frac{\partial U_0}{\partial n^+} U_0^* d\sigma. \tag{8}$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части (8). В силу условий излучения получим

$$\operatorname{Im}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Sigma_R} \frac{\partial U_0}{\partial r} U_0^* d\sigma = -k_0 \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Sigma_R} |U_0|^2 d\sigma_r.$$

Учитывая, что (5) справедливо для любого $R \to \infty$, используя определение диаграммы направленности поля U_0 [19], удовлетворяющего условиям излучения

$$U_0(M) = \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r} F(\theta, \varphi) + o(1/r), \quad r \to \infty,$$

где $F(\theta, \varphi)$ – диаграмма направленности, заданная на единичной сфере $\Omega = \{0 \le \theta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, получаем

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Sigma_R} |U_0|^2 d\sigma_r = \frac{1}{k_0^2} \int_{\Omega} |F(\theta, \varphi)|^2 d\omega.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Im} \lim_{R\to\infty} \int_{\Sigma_R} \frac{\partial U_0}{\partial r} U_0^* d\sigma = -\frac{1}{k_0} \int_{\Omega} |F|^2 d\omega. \tag{9}$$

Применим теперь вторую формулу Грина к U_i и U_i^* внутри D_i:

$$\int_{D_i} (\Delta U_i U_i^* - \Delta U_i^* U_i) d\tau = \int_S \left\{ \frac{\partial U_i}{\partial n^+} U_i^* - \frac{\partial U_i^*}{\partial n^+} U_i \right\} d\sigma.$$

Преобразуя последнее соотношение и используя условия сопряжения для полей на S, имеем

$$\operatorname{Im} \int_S \frac{\partial U_0}{\partial n} U_0^* d\sigma = \operatorname{Im} k_i^2 \int_{D_i} |U_i|^2 d\tau. \tag{10}$$

Учитывая полученные соотношения (8)–(10), получаем

$$-\frac{4\pi}{k_0} \operatorname{Im} \int_{D_R/D_i} \left\{ (j)^{n-1} P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right) \right\} U_0(P) \times$$
$$\times \delta(P - M_0) d\tau_P = -\frac{1}{k_0} \int_{\Omega} |F|^2 d\omega - \left|\operatorname{Im} k_i^2\right| \int_{D_i} |U_i|^2 d\tau. \tag{11}$$

Распишем подробно левую часть, учитывая, что $U_0(M) = U_0^s(M) + w_n(M, M_0)$. Здесь U_0^s – рассеянное поле. Тогда (11) приобретает вид

$$\frac{4\pi}{k_0} \operatorname{Im} \int_{D_R/D_i} \left\{ (j)^{n-1} P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z_P}\right) \right\} w_n(P, M_0) \times$$
$$\times \delta(P - M_0) d\tau_P +$$
$$+ \frac{4\pi}{k_0} \operatorname{Im} \left\{ (j)^{n-1} P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right) \right\} U_0^s(M) \Big|_{M=M_0} =$$
$$= \frac{1}{k_0} \int_{\Omega} |F|^2 d\omega + \left|\operatorname{Im} k_i^2\right| \int_{D_i} |U_i|^2 d\tau.$$

Рассмотрим подробнее последнее выражение. Вместо того чтобы вычислять оставшийся интеграл по объему, заметим, что он равен полному сечению излучения мультиполя (4). В этом легко убедиться, "убрав" рассеиватель. Тогда в правой части останется лишь слагаемое $1/k_0 \int_{\Omega} |F_{w_n}|^2 d\omega$, где F_w – диаграмма направленности излучения мультиполя. Учитывая определение мультиполей (2), получаем [20]

$$F_{w_n} = (j)^{n+1} \exp\{jk_0 z_0 \cos\theta\} P_n(\cos\theta).$$

Тогда

$$\int_{\Omega} |F_{w_n}|^2 d\omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P_n^2(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

Таким образом, получаем, что

$$\operatorname{Im} \int_{D_R/D_i} \left\{ (j)^{n-1} P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z_P}\right) \right\} w_n(P, M_0) \times$$
$$\times \delta(P - M_0) d\tau_P = \frac{4\pi}{k_0(2n+1)}. \tag{12}$$

Окончательно ОТ для мультипольного внешнего возбуждения принимает следующий вид:

$$\frac{16\pi^2}{k_0^2(2n+1)} + \frac{4\pi}{k_0} \operatorname{Im} \left\{ (j)^{n-1} P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right) \right\} U_0^s(M) \Big|_{M=M_0} =$$
$$= \frac{1}{k_0} \int_{\Omega} |F|^2 d\omega + \left|\operatorname{Im} k_i^2\right| \int_{D_i} |U_i|^2 d\tau. \tag{13}$$

Заметим, что производные от рассеянного поля $U_0^s(M)$ любого порядка существуют, так как рассеянное поле представляет собой вещественную аналитическую функцию всюду вне рассеивателя [19]. В правой части (13) стоят соответственно сечение рассеяния σ_{sc}, включающее в себя энергию излучения мультиполя, и сечение поглощения σ_{abs}. В силу определения, их сумма и есть сечение экстинкции σ_{ext}.

Рассмотрим подробнее левую часть соотношения (13). Первое слагаемое, как легко видеть, представляет собой полное сечение излучения мультиполя в отсутствие рассеивателя. Рассмотрим второе слагаемое, которое описывает взаимодействие рассеянного поля с источником. Для случая точечного источника ($n = 0$) оно принимает вид $-\frac{4\pi}{k_0} \operatorname{Im} U_0^s(M_0)$. Это же слагаемое можно обнаружить в работах [15, 16] в части, посвященной дифракции акустических волн. К сожалению, полученный результат не переходит в результат для плоской волны при удалении точечного источника в бесконечность. Этому есть несколько причин. Во-первых, поток энергии для плоской волны через любую замкнутую поверхность, заключающую рассеиватель внутри себя, равен нулю, в то время как для локального источника, располагающегося на конечном расстоянии от рассеивателя, он равен полному сечению излучения. Во-вторых, особенность для плоской волны (как вещественной аналитической функции во всем пространстве) расположена на бесконечности,

где ее "диаграмма рассеяния" представляется дельта-функцией в направлении распространения волны, особенность же поля точечного источника (мультиполя) – всегда в точке его расположения. Именно поэтому при применении формулы Грина к решению во всем пространстве и получаются такие разные результаты. Тем не менее, как для плоской волны, так и для мультиполя основное слагаемое описывает взаимодействие источника излучения с рассеянным полем.

В целом ряде приложений интерес представляет оценка влияния присутствия рассеивателя на поле излучения источника. Подобную оценку дает коэффициент Перселля [16], который в данном случае может быть представлен в виде

$$F_p = \frac{\sigma_{\text{ext}}}{\sigma_{\text{sc}}^0},$$

где σ_{sc}^0 – сечение излучения источника в отсутствие неоднородности D_i. Тогда в силу полученных результатов имеем

$$F_p = 1 + \frac{4\pi}{k_0} \times$$
$$\times \operatorname{Im}\left\{(j)^{n-1} P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\} U_0^s(M)\Big|_{M=M_0} \Big/ \frac{16\pi^2}{k_0^2(2n+1)}. \tag{14}$$

Следовательно, отпадает необходимость вычисления сечений рассеяния σ_{sc} и поглощения σ_{abs}, а коэффициент Перселля может быть вычислен с использованием значения производной рассеянного поля лишь в одной-единственной точке – точке расположения локального источника излучения. Заметим, что подобное обстоятельство особенно актуально, так как обычно проводится осреднение коэффициента Перселля по многочисленным положениям излучателя [16].

ОПТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ПРИСУТСТВИИ ПРОЗРАЧНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Теперь перейдем к рассмотрению математической постановки задачи дифракции поля мультипольного источника, расположенного в точке M_0, на локальном проницаемом теле D_i с гладкой поверхностью $S \in C^{(2,\alpha)}$. Пусть все пространство $\Re^3$ разделено плоскостью $\Xi(z=0)$ на два полупространства D_l с волновыми числами k_l, $l = 0,1$, при этом $D_0 : (z > 0)$, а $D_1 : (z < 0)$. Будем полагать, что источник располагается в верхнем полупространстве D_0 на оси Oz в точке $M_0 = (0,0,z_0)$, а рассеиватель располагается в нижнем полупространстве $D_i \subset D_1$. Тогда математическая постановка задачи может быть записана как

$$\Delta U_0 + k_0^2 U_0 =$$
$$= -\frac{4\pi}{k_0}\left\{-(j)^{n-1} P_n\left(\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}\delta(M - M_0), \quad M_0 \in D_0;$$
$$\Delta U_l + k_l^2 U_l = 0, \quad M \in D_l, \quad l = 1, i;$$
$$[U(P)] = [\partial U(P)/\partial n] = 0, \quad P \in S; \tag{15}$$
$$[U(Q)] = [\partial U(Q)/\partial z] = 0, \quad Q \in \Xi;$$
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Sigma_R} \left|\frac{\partial U_l}{\partial r} + jk_l U_l\right|^2 d\sigma_r = 0, \quad l = 0,1.$$

Отметим, что последние соотношения представляют собой так называемые условия излучения Зоммерфельда в слабой форме. Эта форма дает возможность избавиться от проблем, связанных с появлением поверхностной волны вблизи интерфейса [21]. Будем полагать, что $\operatorname{Im} k_i^2 < 0$, а $\operatorname{Im} k_l^2 = 0$, $l = 0,1$. Тогда задача (15) имеет единственное решение [22].

Будем проводить все построения по аналогии с предыдущим разделом, обращая внимание лишь на отличительные моменты. Выберем сферу Σ_R с центром в начале координат на плоскости Ξ так, чтобы она заключала точку M_0 и рассеиватель D_i внутри себя. Обозначим круг, который сфера вырезает на плоскости Ξ, как C_R. Будем обозначать через D_R область пространства внутри сферы Σ_R. Она состоит из двух полушаров, $D_R = D_R^+ \cup D_R^-$, каждый из которых ограничен поверхностями $\Sigma_R^+ \cup C_R$ и $\Sigma_R^- \cup C_R$. Применим в D_R^+ вторую формулу Грина к U_0 и U_0^*, тогда получим в силу (6)

$$2j\frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Im}\int_{D_R^+/D_i}\left\{-(j)^{n-1} P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\} U_0(P) \times$$
$$\times \delta(P - M_0)d\tau_P = 2j\operatorname{Im}\left\{\int_{\Sigma_R^+}\frac{\partial U_0}{\partial n}U_0^* d\sigma - \int_{C_R}\frac{\partial U_0}{\partial z}U_0^* d\sigma\right\}. \tag{16}$$

Применяя вторую формулу Грина к U_1 и U_1^* в D_R^-, имеем

$$\operatorname{Im}\int_{\Sigma_R^-}\frac{\partial U_1}{\partial r}U_1^* d\sigma +$$
$$+ \operatorname{Im}\int_S \frac{\partial U_1}{\partial n}U_1^* d\sigma + \operatorname{Im}\int_{C_R}\frac{\partial U_1}{\partial z}U_1^* d\sigma = 0. \tag{17}$$

Введем в рассмотрение диаграммы направленности полей, включающих излучение диполя,

$$U_l(M) = \frac{e^{-jk_l r}}{k_l r} F_l(\theta,\varphi) + o(1/r), \quad l = 0,1, \quad r \to \infty, \quad z \neq 0,$$

где $F_l(\theta,\varphi)$ – диаграммы направленности, заданные на единичных полусферах, $\Omega^+ = \{0 \le \theta < \pi/2;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, $\Omega^- = \{\pi/2 < \theta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$. Аналогично предыдущему, используя условия излучения в слабой форме (15), получим для интегралов по удаленным полусферам $\Sigma_R^{\pm}$ следующие соотношения:

$$\operatorname{Im}\lim_{R\to\infty}\int_{\Sigma_R^{\pm}}\frac{\partial U_l}{\partial n}U_l^* d\sigma = -\frac{1}{k_l}\int_{\Omega^{\pm}}|F_l|^2 d\omega,\quad l = 0,1. \tag{18}$$

Учитывая (16)–(18) и (10), а также условия сопряжения для полей на C_R, получим

$$\frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Im}\int_{D_R^+/D_i}\left\{(j)^{n-1}P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}U_0(P)\delta(P-M_0)d\tau_P = \\ = \frac{1}{k_0}\int_{\Omega^+}|F_0|^2 d\omega + \left|\operatorname{Im}k_i^2\right|\int_{D_i}|U_i|^2 d\tau + \frac{1}{k_1}\int_{\Omega^-}|F_1|^2 d\omega. \tag{19}$$

Здесь, казалось бы, можно поступить аналогично предыдущему, однако в случае наличия полупространства или слоистой среды решение задачи дифракции строится иначе [23]. А именно, полное поле разбивается на поле источника, удовлетворяющего условиям сопряжения на плоскости Ξ, и рассеянное поле, которое также должно удовлетворять этим условиям. Следовательно, в данном случае поле в верхней полуплоскости записываем в виде $U_0(M) = U_0^s(M) + U_0^0(M)$, где U_0^0 – то самое поле источника, удовлетворяющего условиям сопряжения на плоскости Ξ. В случае наличия полупространства фундаментальное решение заменяется функцией Грина полупространства, которая может быть представлена в виде интеграла Зоммерфельда [22]:

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty J_0(\lambda r)\nu(\lambda,z,z_0)\lambda d\lambda, \tag{20}$$

где $J_0(.)$ – цилиндрическая функция Бесселя, $r^2 = \rho^2 + (z-z_0)^2$, а ν – спектральная функция, обеспечивающая выполнение условий сопряжения при $z = 0$ [23]. Она принимает следующий вид:

$$\nu(\lambda,z,z_0) = \begin{cases}\dfrac{\exp(-\eta_0|z-z_0|}{\eta_0} + \dfrac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\dfrac{\exp\{-\eta_0(z+z_0)\}}{\eta_0}, & z \ge 0\\[2ex] \dfrac{2\eta_0}{\eta_0+\eta_1}\dfrac{\exp\{\eta_1 z - \eta_0 z_0\}}{\eta_0}, & z \le 0\end{cases}\qquad z_0 > 0, \tag{21}$$

здесь $\eta_l^2 = \lambda^2 - k_l^2, l = 0,1$. Заметим, что первое слагаемое в (21) соответствует фундаментальному решению уравнения Гельмгольца в свободном пространстве $\Psi(M,M_0)$. Тогда соответствующие мультиполи принимают вид

$$W_n(M) = \frac{4\pi}{k_0}\left\{-(j)^{n-1}P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}G(M,M_0)$$

или

$$W_n(M,M_0) = w_n(M,M_0) + \frac{4\pi}{k_0}\int_0^\infty J_0(\lambda r)\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\times \\ \times\left\{-(j)^{n-1}P_n\left(\frac{j}{k_0}\eta_0\right)\right\}\frac{\exp\{-\eta_0(z+z_0)\}}{\eta_0}\lambda d\lambda. \tag{22}$$

Преобразуем интеграл в левой части (19) следующим образом:

$$\int_{D_R^+/D_i}\left\{(j)^{n-1}P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}\left(U_0^s(P) + W_n(P,M_0)\right)\times \\ \times\delta(P-M_0)d\tau_P = \left\{(j)^{n-1}P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}U_0^s(M)\Big|_{M=M_0} + \\ + \int_{D_R^+/D_i}\left\{(j)^{n-1}P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}W_n(P,M_0)\delta(P-M_0)d\tau_P. \tag{23}$$

Учитывая представление для мультиполей (22), получаем, как и раньше в (12),

$$\operatorname{Im}\int_{D_R/D_i}\left\{(j)^{n-1}P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z_P}\right)\right\}w_n(P,M_0)\times \\ \times\delta(P-M_0)d\tau_P = \frac{4\pi}{k_0(2n+1)}.$$

Продолжая раскрывать последний интеграл в правой части (23), преобразуем первый член в правой части (22):

$$\int_{D_R^+/D_i}\left\{(j)^{n-1}P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z_P}\right)\right\}\int_0^\infty J_0(\lambda r_P)\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\times \\ \times\left\{(j)^{n-1}P_n\left(\frac{j}{k_0}\eta_0\right)\right\}\frac{\exp\{-\eta_0(z_P+z_0)\}}{\eta_0}\times \\ \times\lambda d\lambda\delta(P-M_0)d\tau_P = -\int_0^\infty J_0(\lambda r_P)\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\times \\ \times P_n^2\left(\frac{j}{k_0}\eta_0\right)\frac{\exp\{-\eta_0(z_P+z_0)\}}{\eta_0}\lambda d\lambda\Big|_{P=M_0} = \\ = -\int_0^\infty\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}P_n^2\left(\frac{j}{k_0}\eta_0\right)\frac{\exp\{-2z_0\eta_0\}}{\eta_0}\lambda d\lambda.$$

Интеграл, стоящий в правой части последнего соотношения, является сходящимся, так как $z_0 > 0$. Таким образом, окончательно получаем

$$\frac{16\pi^2}{k_0^2(2n+1)} + \frac{4\pi}{k_0}\left\{(j)^{n-1} P_n\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\} U_0^s(M)\Big|_{M=M_0} -$$

$$-\frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Im}\int_0^\infty \frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1} P_n^2\left(\frac{j}{k_0}\eta_0\right)\frac{\exp\{-2z_0\eta_0\}}{\eta_0}\lambda d\lambda = \quad (24)$$

$$= \frac{1}{k_0}\int_{\Omega^+}|F_0|^2 d\omega + \left|\operatorname{Im} k_i^2\right| \int_{D_i}|U_i|^2 d\tau + \frac{1}{k_1}\int_{\Omega^-}|F_1|^2 d\omega.$$

Таким образом, оптическая теорема для мультипольного источника в присутствии полупространства принимает вид (24). Интеграл в левой части (24) легко может быть посчитан численно.

Легко видеть, что в случае отсутствия границы раздела полупространств $k_1 = k_0$ выражение (24) автоматически переходит в (13). Как и ранее, коэффициент Перселля может быть рассчитан, используя обобщение ОТ (24).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получено обобщение оптической теоремы на случай возбуждения локальных структур мультипольным источником, в том числе и в случае, когда все пространство разделено на два полупространства с различными характеристиками, и даже тогда, когда нижнее полупространство содержит дополнительные слои. Показано, что в случае однородного пространства полученное обобщение позволяет рассчитывать сумму сечения рассеяния и поглощения в замкнутой аналитической форме, вычисляя лишь производные от рассеянного поля в одной-единственной точке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
2. *Mishchenko M.I.* The electromagnetic optical theorem revisited // J. Quantitat. Spectr. Radiat. Trans. 2006. V. 101. P. 404–410.
3. *Фарафонов В.Г., Ильин В.Б., Винокуров А.А.* Рассеяние света несферическими частицами в ближней и дальней зонах: применимость методов со сферическим базисом // Оптика и спектроскопия. 2010. Т. 109. С. 476–487.
4. *Newton R.G.* Scattering Theory of Waves and Particles. New York: Springer, 1982. 748 p.
5. *Ström S.* The scattered field. Field representation and introduction to scattering. Ed. by: Varadan V.V., Lakhtakia A., Varadan V.K. Elsevier Science Publisher, 1991. P. 143–149.
6. *Berg M.J., Sorensen C.M., Chakrabarti A.* Extinction and the optical theorem. Part I. Single particles // J. Opt. Soc. Am. A. 2008. V. 25. № 7. P. 1504–1513.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). Изд. 4-е. М.: Наука, 1989. 768 с.
8. *Фарафонов В.Г., Ильин В.Б.* Рассеяние света неоднородными несферическими частицами. СПбГУ: ВВМ, 2009. 183 с.
9. *Mackowski D.W.* Calculation of total cross sections of multiple-sphere clusters // J. Opt. Soc. Am. A. 1994. V. 11. P. 2851–2861.
10. *Carney P.S., Schotland J.C., Wolf E.* Generalized optical theorem for reflection, transmission, and extinction of power for scalar fields // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. № 3. 036611.
11. *Еремин Ю.А.* Обобщение оптической теоремы на основе интегро-функциональных соотношений // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 9. С. 1168–1172.
12. *Small A., Fung J., Manoharan V.N.* Generalization of the optical theorem for light scattering from a particle at a planar interface // J. Opt. Soc. Am. A. 2013. V. 30. № 12. P. 2519–2525.
13. *Белинский Б.П., Коузов Д.П.* Оптическая теорема для системы пластина–жидкость // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 1. С. 13–19.
14. *Андронов И.В.* Оптическая теорема для системы пластина–стратифицированная жидкость // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 1. С. 13–18.
15. *Athanasiadis C., Martin P.A., Spyropoulos A., Stratis I.G.* Scattering relations for point sources. Acoustic and electromagnetic waves // J. Math. Phys. 2002. V. 43. № 11. P. 5683–5697.
16. *Venkatapathi M.* Emitter near an arbitrary body: Purcell effect, optical theorem and the Wheeler–Feynman absorber // J. Quantitat. Spectr. Radiat. Transfer. 2012. V. 113. P. 1705–1711.
17. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Оптическая теорема для локальных источников в теории дифракции // Вестн. Моск. ун-та, сер. 5. Физика, астрономия. 2015. № 4. С. 43–46.
18. *Devaney A.J., Wolf E.* Multipole expansions and plane wave representations of the electromagnetic field // J. Math. Phys. 1974. V. 15. P. 234–244.
19. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. Мир, 1987. 311 с.
20. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 832 с.
21. *Jerez-Hanckes C., Nedelec J.-C.* Asymptotics for Helmholtz and Maxwell solutions in 3-D open waveguides. Research report No. 2010-07. February 2010. ETH, Swiss Federal Institute of Technology Zurich. 25 p.
22. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М.: МАКС Пресс, 2008. 316 с.
23. *Барышев А.В., Еремин Ю.А.* Новая математическая модель анализа малозаметных дефектов подложки // Матем. моделирование. 2010. Т. 22. № 5. С. 122–130.