

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

О ВЫСОКОЧАСТОТНОМ РАССЕЙАНИИ НА ПОЛОСЕ
ПРИ ПОЧТИ СКОЛЬЗЯЩЕМ ПАДЕНИИ

© 2016 г. И. В. Андронов

Санкт-Петербургский государственный университет, НИИФ

198504 Петродворец, Ульяновская ул. 1/1

E-mail: iva—@list.ru

Поступила в редакцию 14.09.2015 г.

Рассмотрена задача дифракции на идеально мягком отрезке в высокочастотном приближении. Получено асимптотическое разложение поля, которое позволяет проследить переход от классической асимптотики, справедливой для касательного падения, к геометро-оптической асимптотике, описывающей рассеяние при падении под конечным (не малым) углом.

Ключевые слова: дифракция, идеально мягкая полоса, высокочастотная асимптотика, почти скользящее падение.

DOI: 10.7868/S032079191604002X

ВВЕДЕНИЕ

Задача дифракции на полосе является классической. Ей посвящено огромное число публикаций. Результаты, полученные до 1960-х годов, приведены в [1, 2] и др. монографиях. Среди применяемых подходов можно выделить три группы. Это методы, основанные на разделении переменных в эллиптических координатах, которое приводит к уравнению Матве, методы, в которых задача сводится к интегральному уравнению свертки на отрезке, и асимптотические подходы теории дифракции. Все подходы и получаемые с их помощью представления для решения задачи имеют ограничения по области их применимости или на значения параметров задачи, при которых вычисления эффективны. Исследования продолжают — см., например, работы [3–6].

В рамках высокочастотной теории дифракции, т.е. для полосы, полуширина которой p и волновое число k образуют параметр $kp \gg 1$, естественным образом выделяются два случая. В первом случае падающая волна бежит под некоторым конечным (не нулевым) углом ϑ_0 к плоскости полосы. При этом эффективное сечение рассеяния Σ имеет асимптотику [7]

$$\frac{\Sigma}{4p} = \sin \vartheta_0 + (kp)^{-5/2} \sigma + O((kp)^{-7/2}), \quad (1)$$

где

$$\sigma = \frac{\sin^2 \vartheta_0}{16\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\cos[2kp(1 + \cos \vartheta_0) + \pi/4]}{(1 + \cos \vartheta_0)^3} + \frac{\cos[2kp(1 - \cos \vartheta_0) + \pi/4]}{(1 - \cos \vartheta_0)^3} \right\}. \quad (2)$$

Во втором случае падение строго касательное, т.е. видимое сечение препятствия — нулевое, а для Σ имеет место асимптотика [8]

$$\frac{\Sigma}{4p} = \sqrt{\frac{2}{\pi kp}} \left\{ 1 - \frac{1}{16kp} + \dots \right\}. \quad (3)$$

Мы ограничились в (1) и (3) лишь двумя старшими членами. Поправки вплоть до $O((kp)^{-4})$ для некасательного падения и вплоть до $O((kp)^{-5})$ для касательного можно найти в монографии [2] (формулы (4.113) и (4.119) соответственно).

В данной статье мы применяем асимптотическую процедуру, разработанную в публикациях [9, 10], и получаем приближенную формулу для эффективного сечения рассеяния Σ , которая позволяет проследить переход от случая конечных углов, описываемого асимптотикой (1), к случаю скользящего падения, когда справедлива асимптотика (3).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ
И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Рассмотрим стационарную задачу дифракции на акустически мягкой полосе ширины $2p$. Зависимость от времени примем в виде $e^{-i\omega t}$. Пусть $kp \gg 1$, где $k = \omega/c$ — волновое число падающей плоской волны

$$u^{(i)} = \exp(ikx \cos \vartheta_0 +iky \sin \vartheta_0). \quad (4)$$

Угол ϑ_0 , измеряемый от плоскости полосы, будем считать настолько малым, что величина $\alpha = \sqrt{kp} \vartheta_0$ остается ограниченной при $kp \rightarrow +\infty$.

Нашей задачей будет нахождение тока на поверхности полосы и амплитуды дальнего поля в направлении рассеяния вперед, что позволит также вычислить полное сечение рассеяния.

Представим полное поле $u(x, y)$ в виде суммы четной и нечетной частей по координате y :

$$u(x, y) = u_e(x, |y|) + i \operatorname{sign}(y) u_0(x, |y|). \quad (5)$$

Тогда задача сводится к задаче в полуплоскости $y \geq 0$. При этом нечетная часть падающей волны равна нулю при $y = 0$ и не возбуждает дифрагированного поля. Таким образом,

$$u = u_e + i \operatorname{sign}(y) \exp(ikx \cos \vartheta_0) \sin(ky \sin \vartheta_0). \quad (6)$$

Четная часть поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца и краевому условию

$$u_e(x, 0) = 0, \quad -p < x < p. \quad (7)$$

На краях полосы должны быть выполнены условия Мейкснера, а на бесконечности — условие излучения для дифрагированной части поля $u_e^{(s)}$.

Введем эллиптические координаты (η, ξ) , так что

$$x = p\xi\eta, \quad y = p\sqrt{\xi^2 - 1}\sqrt{1 - \eta^2}. \quad (8)$$

Уравнение Гельмгольца в координатах (η, ξ) имеет вид

$$\begin{aligned} & \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{\xi^2 - 1} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \\ & + \sqrt{1 - \eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{1 - \eta^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + (kp)^2 (\xi^2 - \eta^2) u = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Эллиптические координаты удобны тем, что поверхность полосы задается условием $\xi = 1$, то есть полоса рассматривается как предельный случай эллиптического цилиндра.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПРОЦЕДУРА

Сначала будем рассматривать небольшую область вблизи поверхности (пограничный слой), в которой введем растянутую координату τ по формуле

$$\xi = 1 + \frac{\tau}{2kp} \quad (10)$$

и, так же как и в методе параболического уравнения, выделим быстрый множитель

$$u_e^{(s)} = e^{ikp\eta} U(\eta, \tau). \quad (11)$$

Подставим представление (11) в уравнение Гельмгольца (10) и произведем группировку членов по степеням асимптотически большого параметра kp . При этом будем считать, что операции дифференцирования U по η и по τ не меняют асимптотического порядка (после того как решение будет построено, мы проверим эти предположения). В результате уравнение можно представить в следующем виде:

$$kpL_0U + L_1U = 0, \quad (12)$$

где

$$L_0 = 4\tau \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial}{\partial \tau} + 2i(1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} + \tau - i\eta, \quad (13)$$

$$L_1 = \tau^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + (1 - \eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\tau^2}{4}. \quad (14)$$

Решение U уравнения (12) ищем в виде асимптотического ряда

$$U = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{U_j(\eta, \tau)}{(kp)^\ell}. \quad (15)$$

Можно показать, что возникающие для U_j задачи разрешимы для произвольного j , однако мы ограничимся лишь построением старшего приближения U_0 , для которого имеет место параболическое уравнение

$$L_0U_0 = 0. \quad (16)$$

Оно допускает разделение переменных. Будем искать решение в виде интеграла

$$U_0 = \int C_0(t) Q(\eta; t) F(\tau; t) dt. \quad (17)$$

Здесь t — параметр разделения переменных, а путь интегрирования должен быть выбран таким, чтобы можно было применить дифференциальный оператор L_0 под знаком интеграла. Для функций Q и F получаем обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$2i(1 - \eta^2)Q' - i\eta Q = 4tQ \quad (18)$$

и

$$4\tau F'' + 2F' + \tau F = -4tF. \quad (19)$$

Уравнение (18) разрешимо в элементарных функциях:

$$Q = \frac{1}{\sqrt[4]{1 - \eta^2}} \left(\frac{1 - \eta}{1 + \eta} \right)^{it}. \quad (20)$$

Уравнение (19) сводится к уравнению Уиттекера после выделения множителя $\tau^{-1/4}$. Выбирая решение, удовлетворяющее условию излучения при $\tau \rightarrow +\infty$, получим

$$F = \frac{1}{\sqrt[4]{\tau}} W_{it, 1/4}(-it\tau), \quad (21)$$

где W — функция Уиттекера [11].

Таким образом,

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{\tau} \sqrt[4]{1 - \eta^2}} \int C_0(t) \left(\frac{1 - \eta}{1 + \eta} \right)^{it} W_{it, 1/4}(-it\tau) dt. \quad (22)$$

Амплитуду C_0 следует определить так, чтобы U_0 удовлетворяло краевому условию. Падающее поле при $y = 0$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_e^{(i)} \Big|_{y=0} &= \exp(ikp\eta \cos \vartheta_0) = \\ &= e^{ikp\eta} e^{-i\eta\alpha^2/2} \left\{ 1 + \frac{i\alpha^4 \eta}{24kp} + O((kp)^{-2}) \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь мы разложили косинус малого угла ϑ_0 в ряд и использовали введенный выше параметр $\alpha = \sqrt{kp}\vartheta_0$. В старшем порядке получаем краевое условие

$$U_0(\eta, 0) = -e^{-i\eta\alpha^2/2}. \quad (24)$$

Чтобы получить представление для дифрагированного поля на поверхности, т.е. при $\tau = 0$, воспользуемся разложением функции W при малом аргументе [11]:

$$W_{it,-1/4}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-it\right)} z^{1/4} - \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-it\right)} z^{3/4} + O(z^{5/4}). \quad (25)$$

Тогда для определения C_0 получим интегральное уравнение

$$\int \left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{it} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-it\right)} C_0(t) dt = -\frac{e^{i\pi/8}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1-\eta^2} e^{-i\eta\alpha^2/2}, \quad \eta \in [-1, 1]. \quad (26)$$

Для решения этого уравнения воспользуемся результатом из [12], где приведены интегральные преобразования

$$Tc \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{it} c(t) dt = \sigma(\eta), \quad (27)$$

$$T^{-1}\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^{it} \frac{\sigma(\eta)}{1-\eta^2} d\eta. \quad (28)$$

Выбирая контур интегрирования в (22) вдоль вещественной оси, получим

$$C_0 = -\Gamma\left(\frac{3}{4}-it\right) \frac{e^{i\pi/8}}{\pi^{3/2}} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^{it} \frac{e^{-i\alpha^2\eta/2}}{(1-\eta^2)^{3/4}} d\eta. \quad (29)$$

Этот интеграл выражается через функцию Уиттекера M :

$$C_0 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi^2}\sqrt{\alpha}} \times \quad (30)$$

$$\times \Gamma\left(\frac{1}{4}+it\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}-it\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}-it\right) M_{it,-1/4}(i\alpha^2).$$

Можно проверить, что подынтегральное выражение в (22) экспоненциально убывает при $t \rightarrow \pm\infty$, что оправдывает применение оператора L_0 под знаком интеграла. Из разложения (25) также очевидно, что решение остается конечным при любых τ . Поведение при $\eta \rightarrow \pm 1$ определяется ближайшими к оси полюсами подынтегрального выражения, которые совпадают с полюсами гамма-функций $\Gamma\left(\frac{1}{4} \pm it\right)$ и располагаются в точках

$t = \pm i/4$. Поэтому решение конечно при всех $\eta \in [-1, 1]$. Однако полюс гамма-функции $\Gamma\left(\frac{3}{4}-it\right)$ приводит к расходимости производной по η как $O(1/\sqrt{1-\eta})$. Таким образом, предположение о том, что L_1U является поправкой в уравнении (12), справедливо при любых $\tau \ll kp$ и $\eta \in [-1, 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon \gg (kp)^{-2}$. По-видимому, эти же условия определяют и область применимости асимптотики.

Для дальнейшего исследования дальнего поля нам достаточно вычислить нормальную производную поля на поверхности. Используя разложение (25), получим

$$\frac{\partial U_0}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\sqrt{k/p}}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{\partial U_0}{\partial \sqrt{\tau}} \Big|_{\tau=0} = \frac{2\sqrt{2k/p}}{\sqrt{\pi\alpha}} \frac{e^{-5i\pi/8}}{(1-\eta^2)^{3/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M_{it,-1/4}(i\alpha^2)}{e^{\pi t} - ie^{-\pi t}} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{it} dt. \quad (31)$$

ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ

Для вычисления дальнего поля воспользуемся формулой Грина, которую применим к рассеянному полю $u^{(s)}$ и функции Грина

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) + \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^*|). \quad (32)$$

Здесь $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ — координаты источника, а $\mathbf{r}_0^* = (x_0, -y_0)$. Функция Грина (32) удовлетворяет условию Неймана при $y = 0$, поэтому формула Грина упрощается:

$$u^{(s)}(x_0, y_0) = -\int_{-p}^p \frac{\partial u^{(s)}(x, 0)}{\partial y} G(x, 0; x_0, y_0) dx. \quad (33)$$

Введем диаграмму рассеянного поля Ψ по формуле

$$u^{(s)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr-i\pi/4} \Psi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty. \quad (34)$$

Используя асимптотику функции Ханкеля $H_0^{(1)}$, несложно найти диаграмму для функции Грина:

$$\Psi_G = \frac{i}{2} \exp(ikx_0 \cos \vartheta) \cos(ky_0 \sin \vartheta). \quad (35)$$

Тогда, переходя к пределу под знаком интеграла в (33), получим формулу для диаграммы рассеянного полем:

$$\Psi(\vartheta) = -\frac{i}{2} \int_{-p}^p \frac{\partial u^{(s)}(x, 0)}{\partial y} e^{-ikx \cos \vartheta} dx. \quad (36)$$

В этой формуле мы будем рассматривать только малые углы ϑ_0 , что позволяет представить экспоненту, используя координату η в виде

$$e^{-ikx \cos \vartheta} = e^{-ik\rho\eta + i\beta^2\eta/2} \left(1 - \frac{i\beta^4\eta}{24k\rho} + \dots \right), \quad (37)$$

где $\beta = \sqrt{k\rho}\vartheta$.

В старшем порядке по $k\rho$ получим

$$\Psi = -\frac{i\rho}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial U_0(\eta, 0)}{\partial y} e^{i\beta^2\eta/2} d\eta. \quad (38)$$

Подставим сюда выражение (31) и поменяем порядок интегрирования. Сравнивая интеграл по η с интегральным представлением функции Уиттекера M , получим

$$\Psi_0 = -\frac{e^{i\pi/4} \sqrt{k\rho}}{\pi\sqrt{\alpha\beta}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - it\right)^2}{e^{\pi t} - ie^{-\pi t}} M_{it, -1/4}(i\alpha^2) M_{it, -1/4}(i\beta^2) dt. \quad (39)$$

Эту формулу удобно переписать в терминах волновых функций Кулона F [11], которые связаны с функциями Уиттекера M формулой [11]

$$M_{it, \nu}(i\beta^2) = \frac{2\Gamma(2\nu + 1) \exp\left(i\frac{\pi}{4}(2\nu + 1) + \frac{\pi}{2}t\right)}{\sqrt{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} + it\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} - it\right)}} F_{\nu - \frac{1}{2}}\left(t, \frac{\beta^2}{2}\right). \quad (40)$$

После несложных преобразований находим

$$\Psi_0 = -4 \frac{\sqrt{k\rho}}{\sqrt{\alpha\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{-3/4}\left(t, \frac{\alpha^2}{2}\right) F_{-3/4}\left(t, \frac{\beta^2}{2}\right)}{1 - ie^{-2\pi t}} dt, \quad (41)$$

что согласуется с результатом из [9].

Найдем полное сечение рассеяния Σ , которое, согласно оптической теореме, выражается через диаграмму в направлении падения, т.е.

$$\Sigma = -\frac{4}{k} \operatorname{Re} \Psi(\vartheta_0, \vartheta_0). \quad (42)$$

Подставляя в эту формулу приближение Ψ_0 , вычислим вещественную часть. При этом следует учесть, что F – вещественнозначная функция. В результате получим

$$\Sigma_0 = \frac{16\rho}{\sqrt{k\rho\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{-3/4}^2\left(t, \frac{\alpha^2}{2}\right)}{1 + e^{-4\pi t}} dt. \quad (43)$$

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ

При малых α можно воспользоваться разложением [11]

$$F_{-\frac{3}{4}}(t, z) \sim \frac{(2z)^{1/4}}{2\sqrt{\pi}e^{\pi t/2}} \times \left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + it\right) \right| \left\{ 1 + 4tz + \frac{8t^2 - 1}{6} z^2 + \dots \right\}, \quad (44)$$

после подстановки которого в (43) несложно получить следующее разложение:

$$\Sigma_0 = \frac{4\rho}{\pi\sqrt{k\rho}} \times \left\{ I_0 + 4I_1\alpha^2 + \left(\frac{16}{3}I_2 - \frac{1}{6}I_0\right)\alpha^4 + \dots \right\}, \quad (45)$$

где

$$I_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma\left(\frac{1}{4} + it\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - it\right) \frac{t^j dt}{e^{\pi t} + e^{-3\pi t}}. \quad (46)$$

Вычисляя интегралы (см. приложение), получим

$$\Sigma_0 \approx \frac{8\rho}{\sqrt{k\rho}\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\alpha^4}{30} + \dots \right). \quad (47)$$

Заметим, что старший член в (47) совпадает со старшим членом асимптотики (3), полученной Sheshadri и Wu [8].

Для исследования асимптотических формул удобно рассматривать величину $S = \frac{\sqrt{k\rho}}{2\rho} \Sigma_0$. На

рис. 1 приведены значения S , соответствующие точному выражению (43) и приближенной формуле (47). При больших α формула (43) дает зависимость, близкую к линейной, что соответствует геометрико-оптическому приближению для рассеянного поля, которое выражается старшим членом асимптотики (1), где при малых углах падения мы заменяем синус ϑ_0 на ϑ_0 .

Проведем более точное численное исследование формулы (43). Рассмотрим сначала поправочный член σ в классической асимптотике (1). В [2] указано, что эта асимптотика применима при $k\rho \sin \vartheta_0 \gg 1$. Однако при $\vartheta_0 \ll \sqrt{k\rho}$ разложение (1) теряет асимптотический характер. Рассмотрим такие малые углы ϑ , при которых $\alpha = \sqrt{k\rho}\vartheta_0$ велико. В формуле (2) будем следить лишь за старшим вкладом. Проистекает он из второго слагаемого и равен

$$\sigma \approx \frac{\cos[k\rho\vartheta_0^2 + \pi/4]}{2\sqrt{\pi}\vartheta_0^4} = (k\rho)^2 \frac{\cos[\alpha^2 + \pi/4]}{2\sqrt{\pi}\alpha^5}. \quad (48)$$

Таким образом, в рассматриваемом диапазоне углов асимптотика (1) дает

$$\sqrt{k\rho} \frac{\Sigma}{4\rho} \approx \alpha + \frac{s}{\alpha^4}, \quad s = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cos\left(\alpha^2 + \frac{\pi}{4}\right). \quad (49)$$

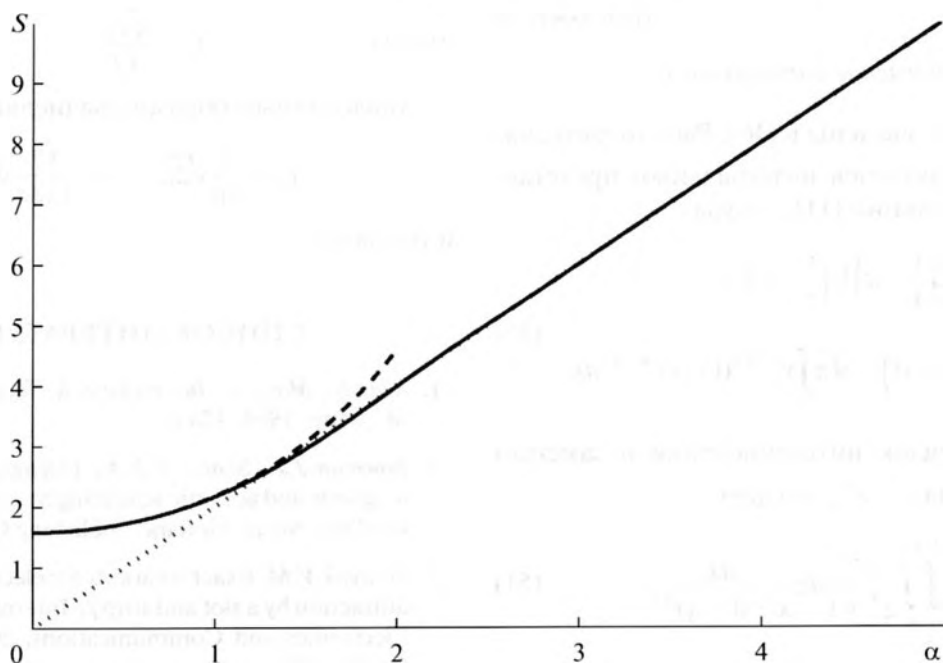


Рис. 1. Высокочастотные приближения S . Сплошная линия отвечает асимптотической формуле (43), штриховая – формуле (47), пунктир – приближению геометрической оптики.

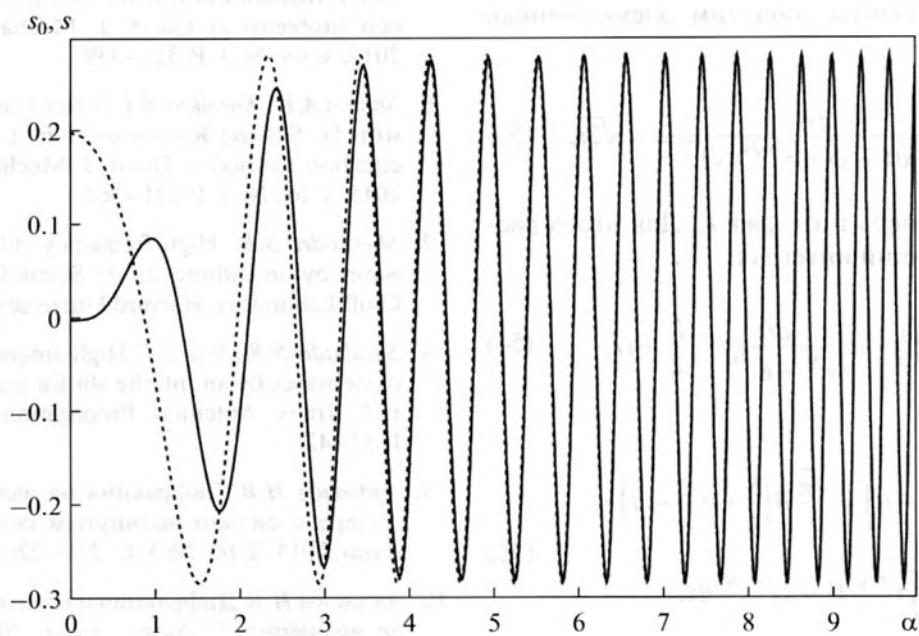


Рис. 2. Поправочные члены s_0 (сплошная) и s (штриховая) и их согласование при больших значениях параметра α .

Приведенные на рис. 2 графики величин s_0 и s , где

$$s_0 = \alpha^4 \left(\sqrt{kp} \frac{\Sigma_0}{4p} - \alpha \right),$$

показывают, что вычисляемое по формуле (43) приближение Σ_0 сшивается при больших α с асимптотикой (1) не только в старшем порядке, но и в главной части поправки σ .

Приложение

Вычисление интегралов I_j

Интегралы I_j введены в (46). Рассмотрим сначала I_0 . Воспользуемся интегральным представлением бета-функции [11], откуда

$$\begin{aligned} & \Gamma\left(\frac{1}{4} + it\right)\Gamma\left(\frac{1}{4} - it\right) = \\ & = \sqrt{\pi} B\left(\frac{1}{4} + it, \frac{1}{4} - it\right) = \sqrt{\pi} \int_0^1 x^{it-3/4} (1-x)^{-it-3/4} dx. \end{aligned} \quad (50)$$

Поменяем порядок интегрирования и заменим переменную t на $z = e^{\pi t}$, что дает

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1+\infty} \int_0^{\infty} \frac{z^{2+i\xi}}{z^4 + 1} dz \frac{dx}{x^{3/4} (1-x)^{3/4}}, \quad (51)$$

где

$$\xi = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right). \quad (52)$$

Интеграл по z может быть вычислен, он равен $\pi/4/\cos(\pi/4 + i\pi\xi/4)$. Выражая косинус через комплексные экспоненты, получим элементарный интеграл:

$$I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{dx}{e^{i\pi/4} \sqrt{x(1-x)} + e^{-i\pi/4} x\sqrt{1-x}} = \sqrt{2\pi}. \quad (53)$$

Вычислим теперь интеграл I_1 . Для этого рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma\left(\frac{5}{4} + it\right)\Gamma\left(\frac{1}{4} - it\right) \frac{dt}{e^{\pi t} + e^{-3\pi t}} = \frac{I_0}{4} + iI_1. \quad (54)$$

Представим

$$\begin{aligned} & \Gamma\left(\frac{5}{4} + it\right)\Gamma\left(\frac{1}{4} - it\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} B\left(\frac{5}{4} + it, \frac{1}{4} - it\right) = \\ & = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 x^{it+1/4} (1-x)^{-it-3/4} dx. \end{aligned} \quad (55)$$

Преобразования, аналогичные приведенным выше, дают

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} I_0 + iI_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \times \\ & \times \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{i\pi/4} (1-x) + e^{-i\pi/4} \sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \sqrt{2} + \frac{i}{3}\sqrt{2}, \end{aligned} \quad (56)$$

откуда
$$I_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{12}. \quad (57)$$

Аналогичным образом вычисляются

$$I_2 = \frac{3}{80}\sqrt{2\pi}, \quad I_3 = \frac{17}{1344}\sqrt{2\pi}$$

и так далее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хёлл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
2. Bowman J.J., Senior T.B.A., Uslenghi P.L.E. Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes. Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1969.
3. Serdyuk V.M. Exact solutions for electromagnetic wave diffraction by a slot and strip // International Journal of Electronics and Communications. 2011. V. 65. № 3. P. 182–189.
4. Sautbekov S.S. Diffraction of plane wave by strip with arbitrary orientation of wave vector // Progress in Electromagnetics Research M. 2011. V. 21. P. 117–131.
5. Shanin A.V., Korolkov A.I. Diffraction by an impedance strip I. Reducing diffraction problem to Riemann–Hilbert problems // Quart. J. Mechanics Appl. Math. 2015. V. 68. № 3. P. 321–339.
6. Shanin A.V., Korolkov A.I. Diffraction by an impedance strip II. Solving Riemann–Hilbert problems by Oe-equation method // Quart. J. Mechanics Appl. Math. 2015. V. 68. № 3. P. 341–362.
7. Sheshadri S.R. High-frequency diffraction of plane waves by an infinite slit // Scientific report No. 20, Cruft Laboratory, Harvard University, 1958.
8. Sheshadri S.R., Wu T.T. High-frequency diffraction of plane waves by an infinite slit for grazing incidence // IRE Trans. Antennas Propagation. 1960. V. AP-8. P. 37–42.
9. Андронов И.В. Дифракция на эллиптическом цилиндре с сильно вытянутым сечением // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 3. С. 219–226.
10. Андронов И.В. Дифракция на сильно вытянутом теле вращения // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 2. С. 147–152.
11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 832 с.
12. Петров В.Э. Обобщенное сингулярное уравнение Трикоми как уравнение свертки // ДАН. 2006. Т. 411. № 2. С. 1–5.