

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 51-73

ДИФРАКЦИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ
НА ИДЕАЛЬНОЙ ПОЛОСЕ ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕМ ПАДЕНИИ.
РАССМОТРЕНИЕ НА ОСНОВЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2016 г. А. И. Корольков, А. В. Шанин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет

119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы

E-mail: korolkov@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 15.09.2015 г.

Рассматривается задача дифракции высокочастотной плоской волны на полосе с идеальными граничными условиями при скольльзящем падении. Рассмотрение проводится в рамках параболического приближения, с помощью которого строится выражение для диаграммы направленности в односторонних квадратурах. С использованием формулы расщепления выводится аналогичный результат. Показывается, что полученная формула приближает классический результат Michaeli. Доказывается оптическая теорема для параболической задачи.

Ключевые слова: дифракция на полосе, метод отражений, параболическое уравнение теории дифракции, формула расщепления.

DOI: 10.7868/S0320791916040092

ВВЕДЕНИЕ

Задача дифракции на полосе с идеальными граничными условиями является одной из простейших канонических задач теории дифракции. Данная задача была решена с помощью метода разделения переменных [1, 2]. Полученное таким образом решение представляется в виде ряда по функциям Маттье. К сожалению, в высокочастотном случае этот ряд сходится медленно и необходимо проделывать трудоемкие вычисления для получения приемлемой точности.

Множество авторов пыталось получить решение, аналогичное решению Зоммерфельда для полуплоскости [3, 4], однако эти попытки окончились неудачей.

В высокочастотном приближении удобным с практической точки зрения является подход на основе дифракционного ряда [5–7]. Если полоса является большой по сравнению с длиной падающей волны, то достаточно учесть только первые несколько членов ряда Шварцшильда. Также в высокочастотном случае к задаче дифракции на полосе могут быть применены методы геометрической теории дифракции [8]. Однако в случае скольльзящего падения одна вершина полосы находится в полутеневае зоне другой, и напрямую геометрическая теория дифракции не работает. Данные трудности были преодолены в работе [9] с помощью громоздких вычислений.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции высокочастотной плоской волны при скольльзящем падении на полосе с идеальными граничными условиями (Неймана или Дирихле). Непосредственной мотивацией написания данной статьи послужил доклад проф. И.В. Андропова на семинаре “Дифракция и распространение волн” в ПОМИ РАН под руководством проф. В.М. Бабица. В данном докладе решение задачи о полосе строится как предельный случай решения задачи о дифракции на тонком эллиптическом цилиндре [10, 11]. При этом используется разделение переменных и достаточно тонкие свойства специальных функций. Авторы заметили, что построенная ими ранее техника (свойства параболического уравнения теории дифракции на разветвленных поверхностях и метод формулы расщепления) позволяет выписать решение задачи без существенных усилий и используя лишь функцию ошибок. При этом имеется численное согласие с результатами проф. И.В. Андропова.

Наиболее близкой к результату настоящей работы является формула, полученная в статье [12]. В ней строится поле на полосе с помощью физической теории дифракции. В результате для диаграммы направленности получается формула, не обладающая симметрией по перестановке угла падения и рассеяния (т.е. взаимная). Затем формула делается взаимной с помощью весьма искусственного приема. Фактически, в настоя-

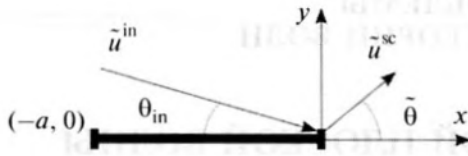


Рис. 1. Геометрия задачи.

шей работе авторы выводят заново результат [12], используя более простую и более общую технику параболического уравнения.

Структура статьи следующая. Сначала формулируется стационарная задача для уравнения Гельмгольца. Осуществляется переход к параболическому приближению. С помощью прямого решения параболического уравнения строится выражение для диаграммы направленности рассеянного поля в одиночных квадратурах. Доказывается оптическая теорема для параболического уравнения, а также вычисляется полное сечение рассеяния. В приложении к статье показывается, что выражение, полученное для диаграммы направленности, является частным случаем т.н. “формулы расщепления”.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на плоскости (x, y) полное поле $\tilde{u}(x, y)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta \tilde{u} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad (1)$$

везде, кроме отрезка $y = 0, -a < x < 0$ (см. рис. 1), на сторонах которого выполняются граничные условия Неймана

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = 0 \quad (2)$$

или Дирихле

$$\tilde{u} = 0. \quad (3)$$

Зависимость от времени выбрана так, что волна, распространяющаяся в положительном направлении, имеет вид $\exp(ikx)$. Предполагается, что волновое число k имеет малую положительную мнимую часть в соответствии с принципом предельного поглощения.

Полное поле представляется в виде суммы падающего поля \tilde{u}^{in} и рассеянного поля \tilde{u}^{sc} :

$$\tilde{u} = \tilde{u}^{\text{in}} + \tilde{u}^{\text{sc}}, \quad (4)$$

где

$$\tilde{u}^{\text{in}} = \exp\{ikx \cos \theta_{\text{in}} -iky \sin \theta_{\text{in}}\}. \quad (5)$$

Здесь θ_{in} — угол падения. Кроме того, требуется выполнение условий Мейкснера в вершинах и условий излучения Зоммерфельда на бесконеч-

ности. Введем диаграмму направленности рассеянного поля $f(\tilde{\theta})$:

$$\tilde{u}^{\text{sc}}(x, y) = f(\tilde{\theta}, \theta_{\text{in}}) \sqrt{\frac{k}{2\pi i \sqrt{x^2 + y^2}}} e^{ik\sqrt{x^2 + y^2}} + o\left(\left(k\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{-1/2}\right), \quad \text{tg } \tilde{\theta} = \frac{y}{x}. \quad (6)$$

ПЕРЕХОД К ПАРАБОЛИЧЕСКОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Перейдем к рассмотрению дифракции высокочастотной волны при скользющем падении, т.е. будем считать, что выполняются следующие условия:

$$ka \gg 1, \quad \theta_{\text{in}} \ll 1. \quad (7)$$

Рассматривается волновой процесс, при котором волна распространяется почти параллельно оси x , а ее угловой спектр достаточно узок. При этом справедливо параболическое приближение [13]. Переход к параболическому приближению осуществляется следующим образом. Из полного поля выделяется осциллирующий множитель

$$\tilde{u} = \exp(ikx)u,$$

а уравнение Гельмгольца заменяется параболическим уравнением:

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = 0. \quad (8)$$

Параболическое приближение является стандартным инструментом теории дифракции [14, 15]. Более подробно вопросы применимости параболического приближения к задачам дифракции на экранах обсуждаются авторами в работе [16].

Падающая волна в параболическом приближении имеет вид

$$u^{\text{in}} = \exp\left\{-ikx \frac{\theta_{\text{in}}^2}{2} -iky \theta_{\text{in}}\right\}. \quad (9)$$

Будем решать задачу в следующей постановке. Необходимо найти решение уравнения (8) на плоскости с исключенным рассеивателем (отрезком $y = 0, -a < x < 0$), непрерывное везде, кроме рассеивателя, односторонне непрерывное и дифференцируемое на рассеивателе, кроме его концов, и ограниченное вблизи концов. Решение должно совпадать с падающей волной (9) в области $x < -a$ и удовлетворять граничным условиям Неймана или Дирихле (выглядящим как (2) и (3)) на сторонах рассеивателя.

Основную задачу представляет отыскание диаграммы направленности. Построим параболический аналог выражения (6). При фиксированных

a и k на большом расстоянии от полосы рассеянное поле представимо в виде

$$u^{\text{sc}}(x, y) = \hat{S}^{N,D}(\theta, \theta_{\text{in}})g(x, y) + \alpha(kx)^{-1/2}, \quad \theta = y/x. \quad (10)$$

Здесь

$$g(x, y) = \sqrt{\frac{k}{2\pi ix}} \exp\left\{\frac{iky^2}{2x}\right\} \quad (11)$$

является функцией Грина параболического уравнения бесконечной плоскости. По аналогии с определением для диаграммы направленности в случае уравнения Гельмгольца будем называть $\hat{S}^{N,D}$ диаграммой направленности. Диаграммы направленности для граничных условий Дирихле и Неймана будем обозначать как \hat{S}^D и \hat{S}^N соответственно. Сравнивая (10) с (6), получим связь между диаграммами направленности $f(\tilde{\theta})$ и $\hat{S}^{N,D}(\theta, \theta_{\text{in}})$:

$$\hat{S}^{N,D}(\theta, \theta_{\text{in}}) \approx f(\tilde{\theta}, \theta_{\text{in}}). \quad (12)$$

Приближенный характер формулы связан с тем, что параболическое приближение справедливо только для узкой области углового спектра. Более того, формула $\theta \approx \tilde{\theta}$ выполняется лишь для малых углов.

РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Главное преимущество параболического уравнения заключается в упрощении описания распространения волн вдоль координаты x . Действительно, в любой полосе $x' < x < x''$ без препятствий поле $u(x, y)$ описывается следующей интегральной формулой:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x', y')g(x - x', y - y')dy', \quad (13)$$

где $g(x, y)$ дается формулой (11). Важным свойством формулы (13) является то, что она обеспечивает непрерывность поля по x , а именно,

$$\lim_{x \rightarrow x'+0} u(x, y) = u(x', y). \quad (14)$$

Формула (13) позволяет сразу выписать решение поставленной задачи в квадратурах. Обозначим символом u_1 поле в области $y \geq 0$, $-a \leq x \leq 0$, символом u_2 поле в области $y \leq 0$, $-a \leq x \leq 0$, символом u_3 поле в области $x \geq 0$. Тогда

$$u_1(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(y')g(x + a, y - y')dy', \quad (15)$$

$$\psi_1(y) = \begin{cases} u^{\text{in}}(-a, y), & y > 0, \\ \pm u^{\text{in}}(-a, -y), & y < 0, \end{cases}$$

$$u_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(y')g(x + a, y - y')dy', \quad (16)$$

$$\psi_2(y) = \begin{cases} \pm u^{\text{in}}(-a, -y), & y > 0, \\ u^{\text{in}}(-a, y), & y < 0, \end{cases}$$

$$u_3(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_3(y')g(x, y - y')dy', \quad (17)$$

$$\psi_3(y) = \begin{cases} u_1(0, y), & y > 0, \\ u_2(0, y), & y < 0. \end{cases}$$

Знаки “+” выбираются для граничных условий Неймана, а знаки “-” для граничных условий Дирихле. То, что формулы (15)–(17) дают решение задачи, проверяется непосредственно. Функции ψ_1 и ψ_2 сконструированы с помощью метода отражений.

Диаграмма направленности может быть вычислена с помощью формулы

$$\hat{S}^{N,D}(\theta, \theta_{\text{in}}) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{sc}}(0, y) \exp\{-iky\theta\} dy. \quad (18)$$

Под интегралом стоит рассеянное поле $u^{\text{sc}} \equiv u - u^{\text{in}}$ на прямой $x = 0$. Последнее выражение следует из (13). Покажем это. Поле при $x > 0$ записывается как

$$u^{\text{sc}}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{sc}}(0, y')g(x, y - y')dy' = \sqrt{\frac{k}{2\pi ix}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{sc}}(0, y') \exp\left\{\frac{ik(y - y')^2}{2x}\right\} dy' = \sqrt{\frac{k}{2\pi ix}} \times \quad (19)$$

$$\times \exp\left\{\frac{iky^2}{2x}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{sc}}(0, y') \exp\left\{-\frac{iky'y'}{x} + \frac{ik(y')^2}{2x}\right\} dy'.$$

В последнем выражении перейдем к пределу при больших x, y при постоянном $\theta = y/x$. Получим (10) с диаграммой (18).

Преобразуем выражения (15), (16) при $-a < x \leq 0$. Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{in}}(-a, y')g(x + a, y - y')dy' = u^{\text{in}}(0, y). \quad (20)$$

Поэтому

$$u_1^{\text{sc}}(x, y) = \int_{-\infty}^0 (\pm u^{\text{in}}(-a, -y') - u^{\text{in}}(-a, y')) \times \quad (21)$$

$$\times g(x + a, y - y')dy',$$

$$u_2^{sc}(x, y) = \int_0^{\infty} (\pm u^{in}(-a, -y') - u^{in}(-a, y')) \times g(x + a, y - y') dy', \quad (22)$$

где введены рассеянные поля $u_{1,2}^{sc} \equiv u_{1,2} - u^{in}$. Комбинируя (21), (22) с (18), получаем

$$\hat{S}^{N,D}(\theta, \theta_{in}) = S(\theta, \theta_{in}) \mp S(-\theta, \theta_{in}), \quad (23)$$

$$S(\theta, \theta_{in}) = -\exp\left\{ika \frac{\theta_{in}^2}{2}\right\} \times (Y(-\theta, \theta_{in}) + Y(\theta, -\theta_{in})), \quad (24)$$

$$Y(\theta_1, \theta_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\{ik(\theta_1 y_1 + \theta_2 y_2)\} \times g(a, y_1 + y_2) dy_1 dy_2 = \frac{1}{2} \exp\left\{-ika \frac{\theta_2^2}{2}\right\} \times \quad (25)$$

$$\times \int_0^{\infty} \exp\{ik(\theta_1 - \theta_2)y_1\} \operatorname{erfc}\left(\left(\theta_2 + \frac{y_1}{a}\right) \sqrt{\frac{ka}{2i}}\right) dy_1,$$

где

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau.$$

Верхний знак в (23) соответствует граничному условию Неймана, нижний – Дирихле.

Вычислим интеграл (25) с помощью интегрирования по частям. Получим

$$Y(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2ik(\theta_1 - \theta_2)} \left(\exp\left\{-ika \frac{\theta_1^2}{2}\right\} \times \operatorname{erfc}\left(\theta_1 \sqrt{\frac{ka}{2i}}\right) - \exp\left\{-ika \frac{\theta_2^2}{2}\right\} \operatorname{erfc}\left(\theta_2 \sqrt{\frac{ka}{2i}}\right) \right). \quad (26)$$

Соответственно

$$S(\theta, \theta_{in}) = \frac{1}{2ik(\theta + \theta_{in})} \times \left[\operatorname{erfc}\left(-\sqrt{\frac{ak}{2i}}\theta_{in}\right) - \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{ak}{2i}}\theta_{in}\right) + e^{\frac{iak}{2}(\theta_{in}^2 - \theta^2)} \left\{ \operatorname{erfc}\left(-\sqrt{\frac{ak}{2i}}\theta\right) - \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{ak}{2i}}\theta\right) \right\} \right]. \quad (27)$$

В формуле (27) разделена зависимость от угла падения и угла рассеяния. Такая формула является частным случаем т.н. “формул расщепления” [17]. Эти формулы имеют очень общий характер. Стандартный способ вывода формулы расщепления заключается в применении к полному полю дифференциального оператора с заданными свойствами [18]. В приложении дается вывод формулы (27), построенный как вывод формулы расщепления. Кроме того, в приложении функции S придается физический смысл, а именно, она вводится как диаграмма направленности на разветвленной поверхности.

Формулы (27), (23) представляют собой решение задачи дифракции на полосе в параболическом приближении. Необходимо отметить, что построенное решение совпадает с решением, полученным в [12], с точностью до замены $\sin \theta \rightarrow \theta$, $\cos \theta \rightarrow 1$, справедливой для малых углов падения и рассеяния. Это достаточно удивительный факт, поскольку автор [12] пользовался совершенно другой техникой (комбинацией геометрической и физической теорий дифракции), а также прибегал к весьма искусственному приему для получения формулы, удовлетворяющей теореме взаимности. Метод, использованный в [12], существенно “тоньше” метода, использованного в настоящей работе, поскольку ГТД и ФТД позволяют правильно находить диаграммы направленности краевых волн, рассеянных под любыми углами. В то же время, явным достоинством метода параболического уравнения является простота описания полутеневых зон. Кроме того, формула (17) позволяет при необходимости без труда выписать равномерную асимптотику поля. Методы ГТД и ФТД позволяют строить приближенные решения точно поставленной задачи дифракции, в то время как метод параболического уравнения позволяет получить точное решение приближенно поставленной задачи.

ОПТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Важным инструментом проверки решения дифракционной задачи служит оптическая теорема, связывающая полное сечение рассеяния и амплитуду рассеяния вперед. Появление отрицательных величин в полном сечении рассеяния должно свидетельствовать о неправильности решения. Кроме того, полное сечение рассеяния является важной характеристикой дифракционного процесса. Ниже будет введено понятие полного сечения рассеяния и выведена оптическая теорема для параболического уравнения. Выкладки будут проведены для полосы с граничными условиями Дирихле. Полоса с граничными условиями Неймана может быть рассмотрена аналогично.

Будем называть полным сечением рассеяния величину

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} |u^{sc}(x, y)|^2 dy, \quad (28)$$

вычисленную для некоторого x справа от рассеивателя. Пользуясь формулой (13), легко показать, что результат вычисления данного интеграла не зависит от x . С помощью (18), принимая во внимание равенство Парсевала, сечение рассеяния может быть выражено через диаграмму направленности:

$$\Sigma = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{S}^D(\theta, \theta_{in})|^2 d\theta. \quad (29)$$

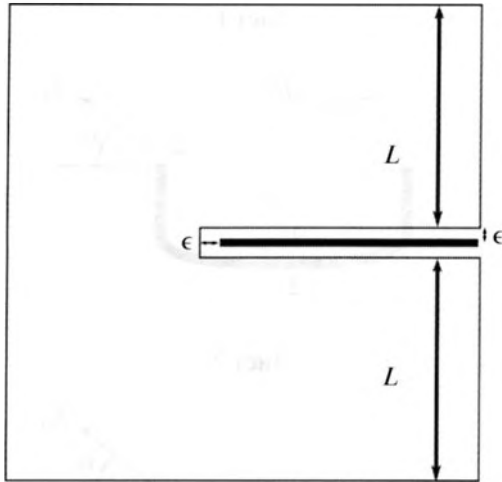


Рис. 2. Область Ω для вывода соотношения (33).

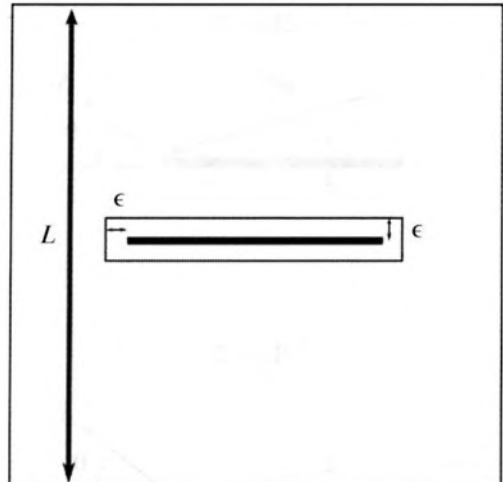


Рис. 3. Область Ω для доказательства оптической теоремы.

Приступим к выводу оптической теоремы. Для этого нам понадобится теорема Грина для параболического уравнения.

Теорема. Пусть функции $v(x, y)$ и $w(x, y)$ удовлетворяют в некоторой области Ω неоднородным уравнениям

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v = f(x, y), \\ \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w = h(x, y). \end{cases} \quad (30)$$

Тогда выполняется равенство

$$\int_{\partial\Omega} [(v \cdot \mathbf{n})w - (w \cdot \mathbf{n})v] dl = 2ik \int_{\Omega} [fw - hv] ds, \quad (31)$$

где \mathbf{n} – внешняя единичная нормаль к границе $\partial\Omega$, а векторные потоки \mathbf{v}, \mathbf{w} задаются как

$$\mathbf{v} = (ikv, \partial_y v), \quad \mathbf{w} = (-ikw, \partial_y w). \quad (32)$$

Справедливость данной теоремы следует непосредственно из теоремы Гаусса–Остроградского.

Перед тем как приступить к доказательству оптической теоремы, получим с помощью теоремы Грина вспомогательное выражение для диаграммы направленности. Применим теорему Грина с функциями $v = u^{sc}, w = \bar{u}^{in}$ по области Ω , изображенной на рис. 2. Здесь \bar{u}^{in} – комплексно сопряженная плоская волна:

$$\bar{u}^{in} = \exp\left\{+ikx \frac{\theta_{in}^2}{2} +iky\theta_{in}\right\}. \quad (33)$$

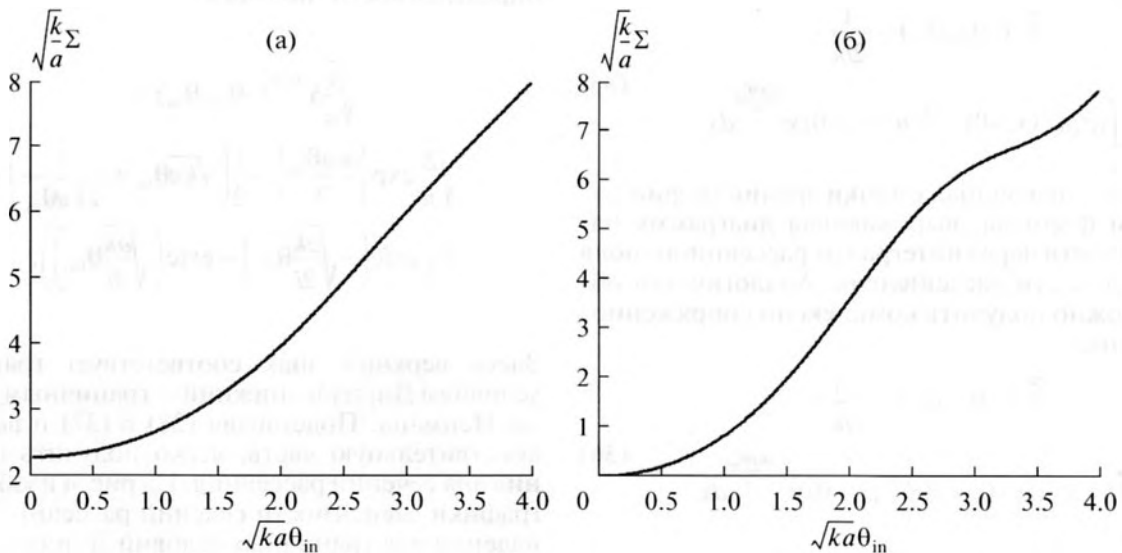


Рис. 4. Сечение рассеяния для полосы с граничными условиями Дирихле (а); сечение рассеяния для полосы с граничными условиями Неймана (б).

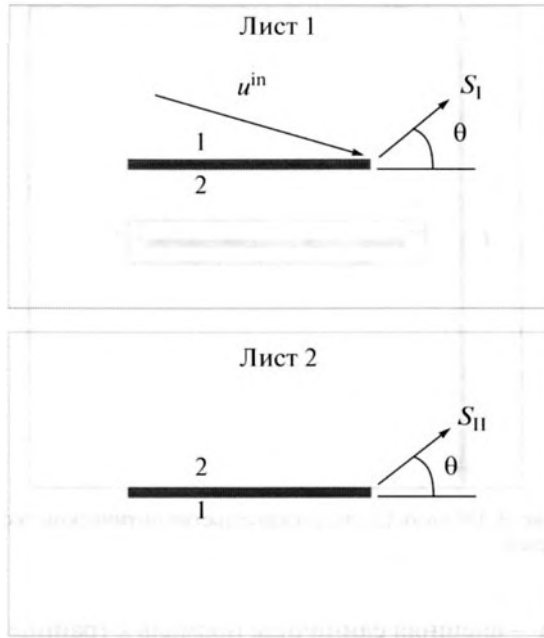


Рис. 5. Двухлистная поверхность.

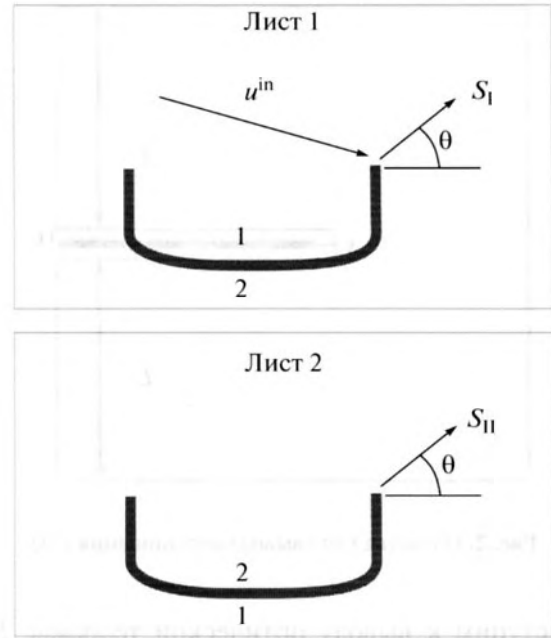


Рис. 6. Схема деформации разрезов двухлистной поверхности.

Получим:

$$2ik \int_{-\infty}^{\infty} u^{sc}(0, y) \bar{u}^{in}(0, y) dy - \int_{-a}^0 \frac{\partial u^{sc}}{\partial y}(x, +0) \bar{u}^{in}(x, 0) dx + \int_{-a}^0 \frac{\partial u^{sc}}{\partial y}(x, -0) \bar{u}^{in}(x, 0) dx = 0. \quad (34)$$

Здесь мы учли условия излучения и перешли к пределам $\epsilon \rightarrow 0$ и $L \rightarrow \infty$. Также учитывалась формула (8). Принимая во внимание (16) и (33), получим

$$\hat{S}^D(-\theta_{in}, \theta_{in}) = \frac{1}{2ik} \times \int_{-a}^0 (\partial_y u^{sc}(x, +0) - \partial_y u^{sc}(x, -0)) e^{\frac{ikx\theta_{in}^2}{2}} dx. \quad (35)$$

Результат – очевидная с точки зрения теории дифракции формула, выражающая диаграмму направленности через интеграл от рассеянного поля по поверхности рассеивателя. Аналогичным образом можно получить комплексно сопряженное выражение:

$$\bar{\hat{S}}^D(-\theta_{in}, \theta_{in}) = \frac{-1}{2ik} \times \int_{-a}^0 (\partial_y \bar{u}^{sc}(x, +0) - \partial_y \bar{u}^{sc}(x, -0)) e^{\frac{ikx\theta_{in}^2}{2}} dx. \quad (36)$$

Для доказательства оптической теоремы применим теорему Грина с функциями $v = u^{sc}$, $w = \bar{u}^{sc}$

по области Ω , изображенной на рис. 3. Устремляя $\epsilon \rightarrow 0$ и $L \rightarrow \infty$, принимая во внимание условия излучения и тот факт, что рассеянное поле слева от полосы равно нулю, а также учитывая формулы (35) и (36), получим

$$\Sigma = -2 \operatorname{Re}[\hat{S}^D(-\theta_{in}, \theta_{in})]. \quad (37)$$

Таким образом, мы доказали оптическую теорему для полосы с граничными условиями Дирихле. Для граничных условий Неймана выражение (37) может быть получено аналогичным образом.

Вычисляя (27) в точке $(-\theta_{in}, \theta_{in})$ и устраняя неопределенности, получим

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{k}{a}} \hat{S}^{D,N}(-\theta_{in}, \theta_{in}) = \\ & = -\frac{\sqrt{2i}}{\pi} \exp\left\{\frac{ika\theta_{in}^2}{2}\right\} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{ka}\theta_{in} \pm \frac{i}{\sqrt{ka}\theta_{in}} \right) \times \\ & \times \left(\operatorname{erfc}\left(-\sqrt{\frac{ak}{2i}}\theta_{in}\right) - \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{ak}{2i}}\theta_{in}\right) \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь верхний знак соответствует граничным условиям Дирихле, нижний – граничным условиям Неймана. Подставляя (38) в (37) и вычисля действительную часть, легко получить выражения для сечений рассеяния. На рис. 4 изображены графики зависимости сечений рассеяния от угла падения для граничных условий Дирихле и Неймана. Как и следовало ожидать, сечения рассеяния положительны, что косвенно доказывает

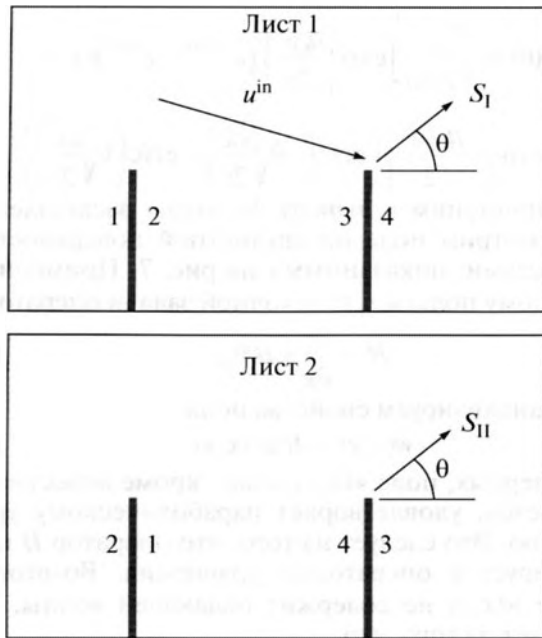


Рис. 7. Альтернативное представление двулистной поверхности.

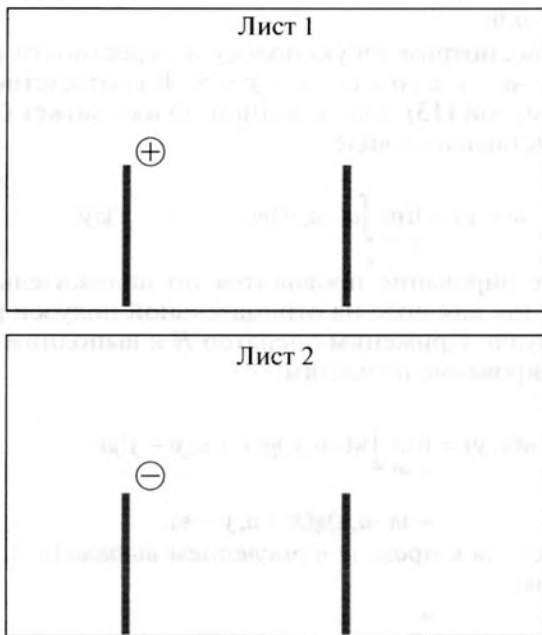


Рис. 8. К определению краевых функций Грина.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках параболического приближения были построены диаграммы направленности в одиночных квадратурах для задачи дифракции на полосе с граничными условиями Неймана и Дирихле. Данные выражения в пределе совпадают с построенными в [12] и численно согласуются с результатами И.В. Андропова.

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-22-00042.

Авторы выражают свою глубокую благодарность И.В. Андропову за активное обсуждение материала данной статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Формула расщепления

Формула (27) была выведена с помощью прямого решения параболического уравнения и упрощения результата интегрированием по частям. Между тем, (27) является частным случаем т.н. “формул расщепления”, справедливых для широкого класса задач с кусочно-прямолинейными границами [18]. Смысл формул расщепления состоит в том, что вместо падающей плоской волны рассматривается точечный источник, расположенный вблизи одной из угловых точек рассеивателя. Поля таких источников называются краевыми функциями Грина. Формула расщепления выражает решение задачи с падающей плоской волной через краевые функции Грина. Поскольку в данном случае краевые функции Грина вычисляются явно, формула расщепления дает решение исходной задачи.

Формула расщепления имеет самый простой вид и легче всего выводится, если рассмотрение проводится на разветвленной (двулистной) поверхности. Отметим, что переход к двулистной поверхности никак не связан с параболическим приближением и также может быть осуществлен в случае уравнения Гельмгольца. Следуя идеям Зоммерфельда, рассмотрим двулистную поверхность, изображенную на рис. 5. Поверхность разрезана вдоль полосы, а индексы 1 и 2 указывают правило склейки берегов разрезов (склеиваются одноименные берега). Падающая волна (9) падает только по первому листу. Введем диаграммы направленности для первого и второго листа $S_I(\theta, \theta_{in}) \equiv S(\theta, \theta_{in})$ и $S_{II}(\theta, \theta_{in})$. Из соображений симметрии следует, что

$$S_{II}(\theta, \theta_{in}) = -S(\theta, \theta_{in}). \quad (39)$$

Для доказательства (39) достаточно в дополнение к исходной задаче рассмотреть симметричную задачу с падающей волной на втором листе и учесть тот факт, что их сумма тривиальна.

справедливость формулы (27). При малых значениях $\sqrt{ka}\theta_{in}$ сечение рассеяния в случае условий Неймана стремится к нулю. В случае условий Дирихле при нулевом угле падения сечение рассеяния $\Sigma = 4\sqrt{a/\pi k}$. Данный результат совпадает с первым членом из разложения, полученного в [19].

Очевидно, что

$$\hat{S}^{N,D}(\theta, \theta_{in}) = S_1(\theta, \theta_{in}) \pm S_{II}(-\theta, \theta_{in}) = S(\theta, \theta_{in}) \mp S(-\theta, \theta_{in}). \quad (40)$$

Верхний знак соответствует полосе с граничными условиями Неймана, а нижний – Дирихле. Будем искать $S(\theta, \theta_{in})$. Как только $S(\theta, \theta_{in})$ будет определено, будут получены решения для задач с граничными условиями Дирихле и Неймана. Отметим, что формула симметризации (40) совпадает с (23), поэтому функция S , введенная как $S = S_1$, должна совпадать с функцией S , введенной в (24). В приложении везде используется определение $S = S_1$, и новый символ для той же функции не вводится.

Кроме представления для двулистной поверхности, изображенного на рис. 5, нам понадобится еще одно представление. Деформируем разрезы так, как показано на рис. 6. Продолжая такую деформацию, получим представление, изображенное на рис. 7. Введем краевую функцию Грина дипольного типа. Для этого на двулистной поверхности разместим источники силой $+1$ и -1 , как показано на рис. 8. Источники размещаются справа от точки $(-a, 0)$. Краевую функцию Грина (КФГ) на поверхности обозначим $v(x, y)$. Таким образом, КФГ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v(x, y) = \delta(x - (a + 0))\delta(y) \quad (41)$$

на листе 1 и уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v(x, y) = -\delta(x - (a + 0))\delta(y) \quad (42)$$

на листе 2. Специальные обозначения для поля на первом и втором листе не вводятся, так как всегда ищется поле и диаграммы направленности на листе 1. Как было отмечено выше, поле на листе 2 может быть получено с помощью симметрии.

В соответствии с формулой (10) КФГ может быть представлена в следующем виде:

$$v(x, y) = V(\theta)g(x, y) + \alpha(kx)^{-1/2}. \quad (43)$$

Здесь было введено обозначение $V(\theta)$ для диаграммы направленности КФГ. Отметим, что диаграмма направленности КФГ зависит только от одной переменной, в то время как диаграмма направленности исходной задачи $S(\theta, \theta_{in})$ зависит от двух переменных. Вычислим $V(\theta)$. Из формулы (13) следует, что

$$v(0, y) = g(a, y), \quad y > 0, \quad (44)$$

$$v(0, y) = -g(a, y), \quad y < 0. \quad (45)$$

Подставляя (43) и (44) в (16), получим

$$V(\theta) = \sqrt{\frac{k}{2\pi ia}} \int_0^\infty \exp\left\{\frac{iky^2}{2a}\right\} (e^{-iky\theta} - e^{iky\theta}) dy = \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{ika\theta^2}{2}\right\} \left(\operatorname{erfc}\left(-\theta\sqrt{\frac{ak}{2i}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\theta\sqrt{\frac{ak}{2i}}\right)\right). \quad (46)$$

Приступим к выводу формулы расщепления. Рассмотрим поле на двулистной поверхности с разрезами, показанными на рис. 7. Применим к полному полю $u(x, y)$ исходной задачи оператор

$$H = \frac{\partial}{\partial y} + ik\theta_{in}. \quad (47)$$

Проанализируем свойства поля

$$w(x, y) \equiv H[u](x, y). \quad (48)$$

Во-первых, поле $w(x, y)$ везде, кроме окрестности разрезов, удовлетворяет параболическому уравнению. Это следует из того, что оператор H коммутирует с оператором уравнения. Во-вторых, поле $w(x, y)$ не содержит падающей волны. Это следует из того, что

$$H[u^{in}](x, y) = 0. \quad (49)$$

Наконец, производная по y в (47) приводит к появлению монопольных источников в концевых точках разрезов. Покажем это на примере вершины $(-a, 0)$.

Рассмотрим узкую полосу в окрестности разреза $-a < x < -a + \epsilon$, $-\infty < y < \infty$. В соответствии с формулой (13) поле в данной полосе может быть представлено в виде

$$u(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} u(-a, y')g(x + a, y - y')dy'. \quad (50)$$

Интегрирование проводится по положительной оси, так как поле на отрицательной полуоси равно нулю. Применим оператор H и выполним интегрирование по частям:

$$w(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} w(-a, y')g(x + a, y - y')dy' + u(-a, \epsilon)g(x + a, y - \epsilon). \quad (51)$$

Переходя к пределу в последнем выражении, получим

$$w(x, y) = \int_0^\infty w(-a - 0, y')g(x + a, y - y')dy' + u(-a - 0, 0)g(x + a, y). \quad (52)$$

Первый член в правой части соответствует полю без источников, а второй – полю точечного монопольного источника с амплитудой $u(-a - 0, 0)$, расположенного в точке $(-a + 0, 0)$. Аналогичная процедура может быть проделана и со второй вершиной.

Для продолжения вывода необходимо доказать теорему единственности для параболическо-

го уравнения. В статье [16] это было сделано авторами для более сложной задачи. Была построена эквивалентная интегральная формулировка задачи и было показано, что применение теоремы единственности корректно. Аналогичным образом единственность может быть доказана и в данном случае.

Таким образом, вследствие единственности решения дифракционной задачи поле $w(x, y)$ есть линейная комбинация полей точечных источников:

$$w(x, y) = u(-a - 0, 0)v(x, y) + u(-0, 0)g(x, y). \quad (53)$$

Переходя к диаграммам направленности в последнем выражении, получим

$$S(\theta, \theta_{in}) = \frac{\exp\{ika\theta_{in}^2/2\}V(\theta) + u(-0, 0)}{ik(\theta + \theta_{in})}. \quad (54)$$

Здесь мы учли, что

$$u(-a - 0, 0) = u^{in}(a, 0). \quad (55)$$

Формула (54) есть формула расщепления в слабой формулировке. В ней фигурирует неизвестная величина $u(-0, 0)$. Для того чтобы выразить это поле через диаграмму направленности КФГ, воспользуемся теоремой взаимности. Рассмотрим задачу с точечным источником единичной силы, расположенным на 1 листе в точке $(-x', \theta_{in}x')$ (x' — большое положительное число). Поле, создаваемое таким источником, асимптотически близко к полю падающей волны, умноженному на $g(x', \theta_{in}x')$. Устремляя $x' \rightarrow \infty$ и применяя теорему взаимности, получаем, что

$$u(-0, 0) = V(\theta_{in})\exp\{ika\theta_{in}^2/2\}. \quad (56)$$

Экспоненциальный множитель в последнем соотношении появляется из-за того, что в формуле (43) вводится диаграмма направленности точечного источника, находящегося в вершине $(-a, 0)$, так, как будто он находится в вершине $(0, 0)$. Это сделано для упрощения дальнейших выкладок. Более строгий с математической точки зрения вывод соотношения (56) дан одним из авторов в работе [20] с помощью теоремы Грина для параболического уравнения.

Подставляя (56) в (54), получим формулу расщепления в сильной формулировке:

$$S(\theta, \theta_{in}) = \exp\{ika\theta_{in}^2/2\} \frac{V(\theta) + V(\theta_{in})}{ik(\theta + \theta_{in})}. \quad (57)$$

Заметим, что в силу очевидной симметрии

$$V(-\theta) = -V(\theta), \quad (58)$$

поэтому диаграмма (57) не имеет особенности при $\theta = -\theta_{in}$, однако вычисление предельного значения в этом случае требует применения правила Лопиталья. Формулы (57) и (46) дают ответ в однократных квадратурах. Легко видеть, что формула (57) совпадает с (27).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sieger B.* Die beugung einer ebenen elektrischen welle an einem schirm von elliptischem querschnitt // *Ann. Phys.* 1908. V. 27. P. 626–664.
2. *Morse P.M., Rubinstein P.J.* The diffraction of waves by ribbons and by slits // *Phys. Rev.* 1938. V. 54. P. 895–898.
3. *Зоммерфельд А.* Оптика. М.: ИЛ, 1950. 490 с.
4. *Luneburg E.* The Sommerfeld problem: methods, generalizations and frustrations / *Proceedings of the Sommerfeld'96 Workshop.* Freudenstadt, 30 Sep.–4 Oct., 1996. Peter Lang Frankfurt. 1997. P. 145–162.
5. *Schwarzschild K.* Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt // *Math. Ann.* 1902. V. 55 P. 177–247.
6. *Karp S.N., Russer A.* Diffraction by a wide slit // *J. Appl. Phys.* 1956. V. 27. P. 886–894.
7. *Хаскинд М.Д., Вайнштейн Л.А.* Дифракция плоской волны на щели и ленте // *Радиотехника и электроника.* 1964. Т. 9. С. 1800–1811.
8. *Karp S.N., Keller J.B.* Multiple diffraction by an aperture in a hard screen // *Optica Acta.* 1961. V. 8. P. 61–72.
9. *Tiberio R., Kouyoumjian R.G.* A uniform GTD solution for the diffraction by strips illuminated at grazing incidence // *Radio Science.* 1979. V. 14. P. 933–941.
10. *Андронов И.В.* Дифракция на эллиптическом цилиндре с сильно вытянутым сечением // *Акуст. журн.* 2014. Т. 60. № 3. С. 219–226.
11. *Андронов И.В., Лавров В.А.* О рассеянии на эллиптическом цилиндре с сильно вытянутым сечением // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61 № 4. С. 423–427.
12. *Michaeli A.* A closed form physical theory of diffraction solution for electromagnetic scattering by strips and 90 dihedrals // *Radio Science* 1984. V. 19. P. 609–616.
13. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
14. *Фок В.А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970. 518 с.
15. *Малюжинец Г.Д.* Развитие представлений о явлениях дифракции // *УФН.* 1959. № 10. С. 321–334.
16. *Корольков А.И., Шанин А.В.* Об использовании параболического уравнения и приближения дифракции Френеля для решения вайнштейновских задач // *Зап. науч. сем. ПОМИ.* 2014. Т. 426. С. 87–118.
17. *Williams M.H.* Diffraction by a finite strip // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 1982. V. 35. P. 103–124.
18. *Craster R.V., Shanin A.V., Doubravsky E.M.* Embedding formulae in diffraction theory // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* 2003. V. 459. P. 2475–2496.
19. *Sheshadri S.R., Wu T.T.* High-frequency diffraction of plane waves by an infinite slit for grazing incidence // *IRE Trans. Antennas Propagation.* 1960. V. AP-8. P. 37–42.
20. *Шанин А.В.* Дифракция высокочастотной волны на решетке со сложным периодом при скользящем падении // *Зап. науч. сем. ПОМИ.* 2012. Т. 409. С. 212–239.