

УДК 534.23

ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МОНОПОЛЯ В СТРУЙНОМ ТЕЧЕНИИ

© 2016 г. И. В. Беляев

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского
140180 Россия, Московская обл., г. Жуковский, ул. Жуковского 1
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
614990 Пермь, Комсомольский пр. 29

E-mail: aeroacoustics@tsagi.ru

Поступила в редакцию 08.04.2015 г.

Проведено теоретическое исследование звукового поля, создаваемого вращающимся точечным монополем в струйном течении, слой смешения которого моделируется разрывом скорости. Звуковое поле в дальней области сравнивается со звуковым полем, создаваемым вращающимся монополем в однородном потоке при отсутствии разрыва скорости, что позволяет оценить величину эффекта рефракции звука.

Ключевые слова: вращающийся монополь, струя, рефракция, слой смешения.

DOI: 10.7868/S0320791916040055

ВВЕДЕНИЕ

Звуковое поле вращающегося точечного источника представляет значительный интерес для акустики и недавно теоретически исследовалось для монополей [1, 2], диполей [3] и квадрупольей [4]. Эти решения были применены для улучшения алгоритма бимформинга, где в явном виде учитывался эффект вращения источника [5], а также для моделирования шума винта [6, 7].

Экспериментальные исследования шума вращающихся источников, таких как винт и открытый ротор, часто проводятся в заглушенных установках с открытой рабочей частью, что означает наличие сдвигового слоя между источником звука и расположенными вне потока микрофонами. Рефракция звука на сдвиговом слое также активно исследовалась, в основном для источников звука стационарных или движущихся прямолинейно [8–11]. Для вращающегося источника эффект сдвигового слоя учитывался с помощью введения среднего числа Маха между источником и микрофоном [12].

Данное теоретическое исследование является первой работой, где строгим образом изучается эффект рефракции звука от вращающегося источника на сдвиговом слое. Течение струи предполагается однородным, слой смешения модели-

руется бесконечно тонкой цилиндрической вихревой пеленой.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Точечный монополь, излучающий звук на частоте $\omega_0 = 2\pi f_0$, вращается на расстоянии r_0 вокруг оси x с частотой вращения $\Omega = 2\pi F$. Вращающийся точечный источник расположен в струйном течении (рис. 1), моделируемом цилиндром радиуса R_0 ($R_0 > r_0$), чья ось совпадает с осью x цилиндрической системы координат (r, φ, x) . Скорости потока внутри и вне струи однородны и равны U_1 вне струи (область 1, $r > R_0$) и U_2 внутри струи (область 2, $r < R_0$). Предполагается, что в струе и в окружающем потоке плотность ρ_0 и скорость звука c_0 одинаковы.

Данная модель струи является хорошим приближением для случая низких частот звука, когда длина звуковой волны много больше толщины слоя смешения струи. С другой стороны, данная модель не учитывает эффекты расширения струи и нарастания толщины слоя смешения вниз по потоку, потому углы наблюдения предполагаются не очень малыми (наблюдатель расположен вдали от оси струи), где этими эффектами можно пренебречь.

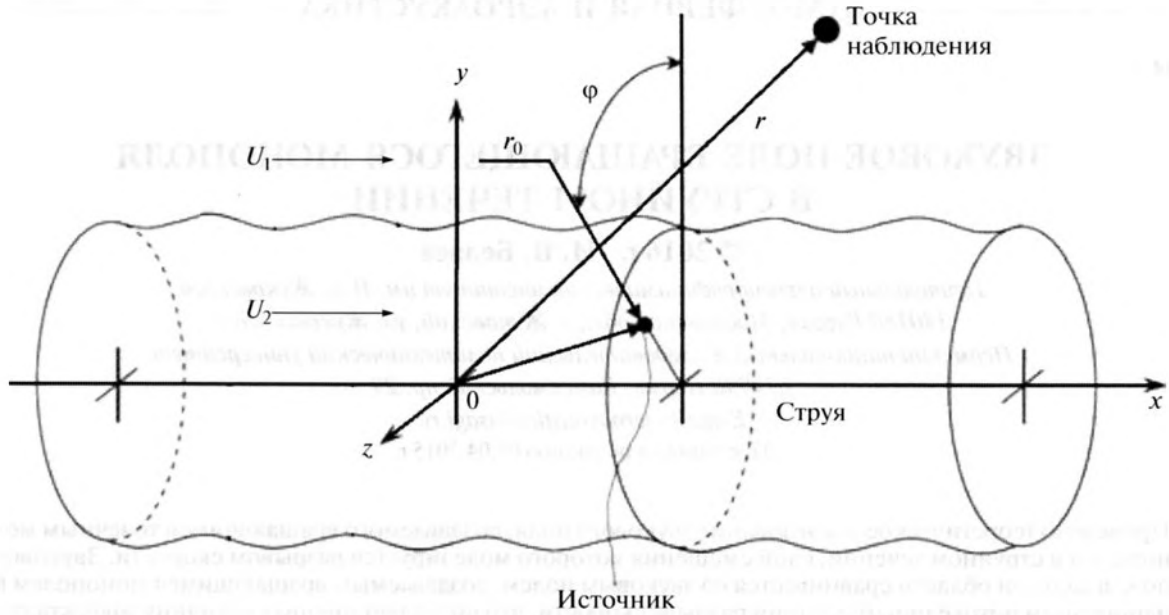


Рис. 1. Геометрия задачи.

ПОИСК РЕШЕНИЯ

На сдвиговом слое, отделяющем струю от окружающего потока, выполняются условия непрерывности давления p и смещения h :

$$\begin{aligned}
 p|_{r=R_0+0} &= p|_{r=R_0-0}, \\
 -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R_0+0} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 h, \\
 -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R_0-0} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 h.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Звуковое давление внутри и вне струи описывается уравнениями

$$\begin{cases}
 \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \\
 + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p = 0, \quad r \geq R_0, \\
 \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \\
 - \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p = -\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) q, \quad r \leq R_0,
 \end{cases}
 \tag{2}$$

где q – источник, соответствующий вращающемуся монополю, который расположен в точке $r = r_0$, $\varphi = \Omega t$, $x = x_0$:

$$\begin{aligned}
 q(r, \varphi, x, t) &= q_0 e^{-i\omega_0 t} \frac{\delta(r - r_0)}{r} \times \\
 &\times \delta(x - x_0) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\varphi - \Omega t - 2\pi n).
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Решение уравнения (2) должно быть конечным и удовлетворять условию уходящих волн на бесконечности.

Введя преобразование Фурье

$$\tilde{p}_m(r, \xi, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} p(r, \varphi, x, t) e^{i(\omega t - \xi x - m\varphi)} d\varphi dt dx, \tag{4}$$

где ξ , m и $\omega = kc_0$ обозначают соответственно аксиальное волновое число, азимутальный номер и угловую частоту, получаем для уравнений (2) следующее выражение:

$$\begin{cases}
 \frac{\partial^2 \tilde{p}_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}_m}{\partial r} + \\
 + \left[(k - \xi M_1)^2 - \xi^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] \tilde{p}_m = 0, \quad r \geq R_0, \\
 \frac{\partial^2 \tilde{p}_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}_m}{\partial r} + \\
 + \left[(k - \xi M_2)^2 - \xi^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] \tilde{p}_m = Q_m \frac{\delta(r - r_0)}{r}, \quad r \leq R_0,
 \end{cases}
 \tag{5}$$

где

$$Q_m = i\rho_0 c_0 q_0 (k - \xi M_2) e^{-i\xi x_0} \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin(\pi[n-m])}{n-m} \delta(\omega - \omega_0 - n\Omega). \quad (6)$$

Левая часть уравнения (5) представляет собой уравнение Бесселя с “радиальным” волновым числом:

$$\Gamma_j^2 = (k - \xi M_j)^2 - \xi^2, \quad j = 1, 2. \quad (7)$$

В качестве линейно независимых решений уравнений (7) удобно взять функции Бесселя $J_m(\Gamma_j r)$ и Ганкеля $H_m^{(1)}(\Gamma_j r)$. Тогда для $r \geq R_0$ решением (5) будет

$$\tilde{p}_m = A_m J_m(\Gamma_1 r) + B_m H_m^{(1)}(\Gamma_1 r), \quad r > R_0, \quad (8)$$

а для $r \leq R_0$ – выражение

$$\begin{aligned} \tilde{p}_m &= C_m J_m(\Gamma_2 r) + D_m H_m^{(1)}(\Gamma_2 r), \quad 0 \leq r \leq r_0, \\ \tilde{p}_m &= \left[C_m - \frac{i\pi}{2} Q_m H_m^{(1)}(\Gamma_2 r_0) \right] J_m(\Gamma_2 r) + \\ &+ \left[D_m + \frac{i\pi}{2} Q_m J_m(\Gamma_2 r_0) \right] H_m^{(1)}(\Gamma_2 r), \quad r_0 \leq r \leq R_0, \end{aligned} \quad (9)$$

где A_m, B_m, C_m, D_m – произвольные функции, зависящие только от ξ и ω .

Значения A_m, B_m, C_m, D_m определяются из граничных условий. Применяя условие конечности решения для $r \rightarrow 0$ и условие уходящих волн для $r \rightarrow \infty$, получаем $A_m \equiv 0$ и $D_m \equiv 0$. Далее, преобразование Фурье уравнения (1) дает

$$\begin{aligned} \tilde{p}_m|_{r=R_0+0} &= \tilde{p}_m|_{r=R_0-0}, \\ (k - \xi M_2)^2 \frac{\partial \tilde{p}_m}{\partial r} \Big|_{r=R_0+0} &= (k - \xi M_1)^2 \frac{\partial \tilde{p}_m}{\partial r} \Big|_{r=R_0-0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя сюда выражения (8) и (9), можно определить значения B_m и C_m . В частности, амплитуда m -й гармоники B_m имеет вид

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{Q_m}{R_0 \Delta} (k - \xi M_1)^2 J_m(\Gamma_2 r_0), \\ \Delta &= (k - \xi M_1)^2 \Gamma_2 J'_m(\Gamma_2 R_0) H_m^{(1)}(\Gamma_1 R_0) - \\ &- (k - \xi M_2)^2 \Gamma_1 J_m(\Gamma_2 R_0) H_m^{(1)}(\Gamma_1 R_0), \end{aligned} \quad (11)$$

где штрих означает производную функции от аргумента.

Таким образом, вне струи звуковое поле от вращающегося монополя определяется выражением

$$\begin{aligned} \tilde{p}_m &= \frac{i q_0}{R_0 \Delta} \rho_0 c_0 (k - \xi M_2) (k - \xi M_1)^2 e^{-i\xi x_0} \times \\ &\times \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin(\pi[n-m])}{n-m} \delta(\omega - \omega_0 - n\Omega) \right] \times \\ &\times J_m(\Gamma_2 r_0) H_m^{(1)}(\Gamma_1 r). \end{aligned} \quad (12)$$

Выполняя для него обратное преобразование Фурье по ω и принимая во внимание, что $\sin(\pi[n-m])/(n-m)$ равняется нулю для $n \neq m$, получим

$$\begin{aligned} p'_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}_m(r, \xi, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{i\rho_0 c_0 q_0}{R_0 \Delta_m} (k_m - \xi M_2) (k_m - \xi M_1)^2 \times \\ &\times e^{-i\xi x_0 - i(\omega_0 + m\Omega)t} J_m(\Gamma_{2m} r_0) H_m^{(1)}(\Gamma_{1m} r), \end{aligned} \quad (13)$$

где $k_m, \Gamma_{1m}, \Gamma_{2m}$, и Δ_m получены подстановкой $\omega_0 + m\Omega$ вместо ω в k, Γ_1, Γ_2 и Δ соответственно. Для того чтобы обеспечить только уходящие волны при $r \rightarrow \infty$ в уравнении (13), выберем следующие ветви функции Γ_{1m} :

$$\Gamma_{1m} = \begin{cases} \text{sign}(\omega_0 + m\Omega) \times \\ \times \sqrt{(k_m - \xi M_1)^2 - \xi^2}, & (k_m - \xi M_1)^2 \geq \xi^2, \\ i\sqrt{\xi^2 - (k_m - \xi M_1)^2}, & (k_m - \xi M_1)^2 \leq \xi^2. \end{cases} \quad (14)$$

Аналогичный выбор применяется и для Γ_{2m} .

Для получения итогового решения осталось выполнить обратное преобразование Фурье по ξ :

$$p_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p'_m(r, \xi, t) e^{i\xi x} d\xi \quad (15)$$

В дальнейшем поле этот интеграл можно оценить с помощью метода стационарной фазы [13]. Вводя новые переменные (R, θ) , для которых

$$r = R \sin \theta, \quad x - x_0 = R \cos \theta, \quad (16)$$

и используя дальнюю асимптотику функции Ганкеля

$$H_m^{(1)}(s) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \exp\left\{i\left[s - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]\right\}, \quad (17)$$

получаем для $k_m \neq 0$ следующее выражение для m -й гармоники p_m :

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{i\rho_0 c_0 q_0}{2\pi R_0} \times \\ &\times \exp\left(-i(\omega_0 + m\Omega)t - i\frac{\pi m}{2} - i\frac{\pi}{4}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} g_m(\xi) e^{iR\eta(\xi)} d\xi, \end{aligned} \quad (18)$$

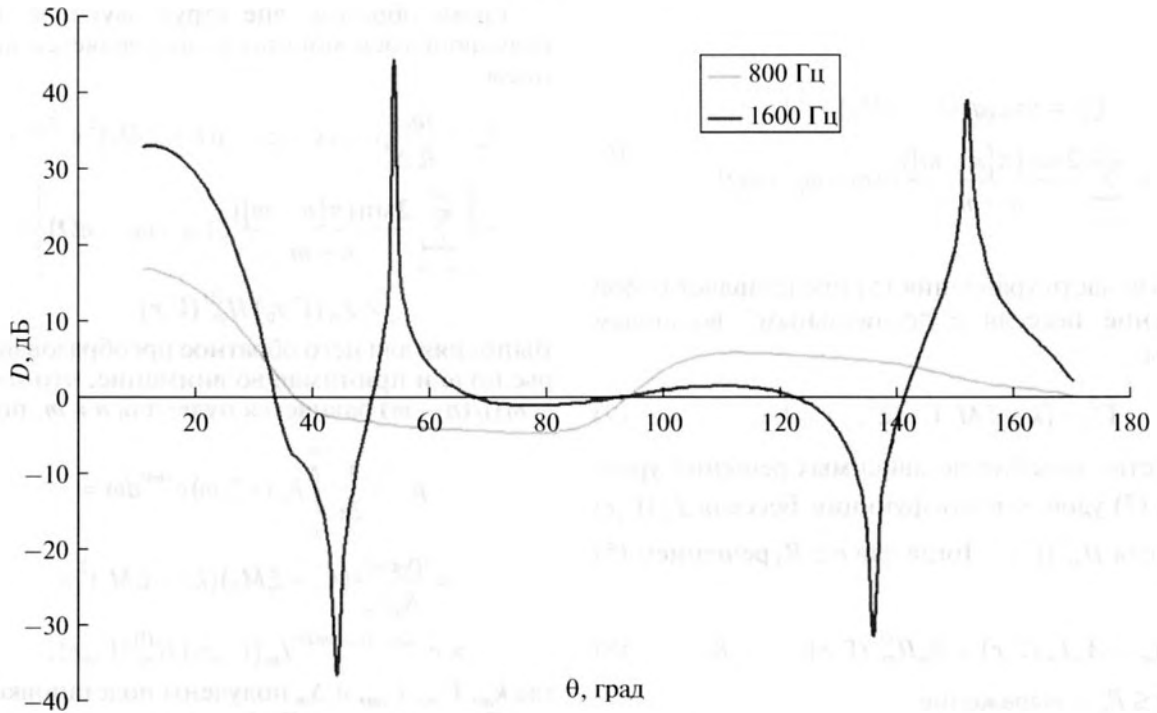


Рис. 2. Зависимость величины рефракции D от угла наблюдения θ : (а) 800 Гц ($m = \pm 1$); (б) 1600 Гц ($m = \pm 2$).

$$\eta(\xi) = \Gamma_{1m} \sin \theta + \xi \cos \theta,$$

$$g_m(\xi) = (k_m - \xi M_2) \frac{(k_m - \xi M_1)^2}{\Delta_m} J_m(\Gamma_{2m} r_0) \times \quad (19)$$

$$\times \sqrt{\frac{2}{\pi \Gamma_{1m} R \sin \theta}} = G_m(\xi) \sqrt{\frac{2}{\pi \Gamma_{1m} R \sin \theta}}.$$

Следует отметить, что в соответствии с определением (16) $\sin \theta > 0$.

При вычислении интеграла (15) мы пренебрежем вкладом полюсов, связанных с нулями функции Δ_m , которые имеют физический смысл излучения звука волнами неустойчивости, развивающимися на сдвиговом слое струи. Этот вклад в дальнем поле существенен только при малых углах наблюдения θ [10], для которых, как было сказано выше, применимость модели струи, используемой в данной работе, может быть поставлена под сомнение.

Стационарная точка ξ_s интеграла в уравнении (18) определяется выражением

$$\xi_s = -\frac{k_m}{1 - M_1^2} \left(M_1 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - M_1^2 \sin^2 \theta}} \right). \quad (20)$$

Значение интеграла (15), вычисленное в дальнем поле с помощью метода стационарной фазы [13], имеет вид

$$p_m = \frac{\rho_0 c_0 q_0 G_m(\xi_s) \text{sign}(k_m)}{\pi R_0 R \sqrt{1 - M_1^2 \sin^2 \theta}} \times$$

$$\times \exp \left(\frac{i R k_m}{1 - M_1^2} \left[\sqrt{1 - M_1^2 \sin^2 \theta} - M_1 \cos \theta \right] - \right. \quad (21)$$

$$\left. - i(\omega_0 + m\Omega)t - i \frac{\pi m}{2} \right).$$

Тогда итоговое решение для звука в дальнем поле, создаваемого вращающимся источником в струйном течении, записывается как

$$p = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p_m e^{im\varphi}, \quad (22)$$

где амплитуды гармоник p_m определяются уравнением (21).

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Для проверки справедливости решения (22) сравним его со звуковым полем стационарного монополя в однородном потоке. Для этого положим $M_1 = M_2$, $r_0 = 0$. Так как в данном случае $J_m(\Gamma_{2m} r_0) \neq 0$ только для $m = 0$, то ряд по m сводится к одному слагаемому $m = 0$. После алгебраических преобразований получаем

$$p = \frac{i\rho_0\omega_0q_0}{4\pi R\sqrt{1-M_1^2\sin^2\theta}} \exp\left(-i\omega t + \frac{iRk}{1-M_1^2} \times \left[\sqrt{1-M_1^2\sin^2\theta} - M_1\cos\theta\right]\right) \times \left[1 + \frac{M_1}{1-M_1^2} \left(M_1 - \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-M_1^2\sin^2\theta}}\right)\right]. \quad (23)$$

Точное выражение для звука, создаваемого стационарным монополем в однородном потоке, имеет вид

$$p = \frac{i\rho_0\omega_0q_0}{4\pi R\sqrt{1-M_1^2\sin^2\theta}} \exp\left(-i\omega t + \frac{iRk}{1-M_1^2} \times \left[\sqrt{1-M_1^2\sin^2\theta} - M_1\cos\theta\right]\right) \times \left[1 + \frac{M_1}{1-M_1^2} \left(M_1 - \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-M_1^2\sin^2\theta}}\right) + \frac{iM_1\cos\theta}{kR(1-M_1^2\sin^2\theta)}\right]. \quad (24)$$

Легко видеть, что полученное решение (23) отличается от точного решения для стационарного монополя (24) только членом $\sim O(R^{-2})$, который в дальнем поле является малым. Таким образом, в дальнем поле полученное решение (23) переходит в точное решение (24).

Обратимся теперь к количественной оценке величины рефракции для звука вращающегося монополя в струйном течении. Как можно видеть из уравнения (21), спектр звука, излучаемого таким источником, состоит из набора гармоник с частотами $\omega_0 + m\Omega$. Ограничимся для простоты рассмотрением рефракции звука только для отдельных частот, а не для всего спектра. Оценка величины рефракции получается при сравнении решения задачи (а) со скоростью внешнего потока 0 м/с с задачей (б), когда скорость внешнего потока равна скорости струи ($U_1 = U_2$). В последнем случае микрофоны расположены в потоке и звук от вращающегося источника при распространении до микрофонов не рефрагируется на сдвиговом слое струи. В децибелах величина рефракции D выражается как

$$D = 20 \lg_{10} \left(\frac{p(0, U_2)}{p(U_2, U_2)} \right), \quad (25)$$

где $p(U_1, U_2)$ – звуковое давление в дальнем поле при скорости потока вне струи U_1 и внутри струи U_2 .

Положим радиус струи $R_0 = 0.5$ м, скорость струи $U_2 = 50$ м/с, радиус вращения источника $r_0 = 0.25$ м, частота излучения источника $\omega_0 = 0$, частота вращения источника $F = 800$ об/с. Зависимость величины рефракции $D(\theta)$ от угла наблюдения θ приведена на рис. 2 для частот 800 Гц ($m = \pm 1$) и 1600 Гц ($m = \pm 2$). Как и ожидалось,

вблизи плоскости вращения монополя ($\theta \approx 90^\circ$) величина рефракции мала. Резкое увеличение величины рефракции для малых углов наблюдения ($\theta < 30^\circ$) на рис. 2а и возникновение пиков при углах наблюдения 54° и 137° на рис. 2б связаны, по всей видимости, с тем, что для этих углов решение (21) теряет применимость. В этом случае при оценке интеграла (15) необходимо учитывать вклад полюсов.

Диапазон допустимых углов θ зависит от геометрии задачи и от рассматриваемой частоты звука. Для рассматриваемых параметров задачи в диапазоне допустимых углов наблюдения величина рефракции $D(\theta)$ составляет 5.9 дБ для частоты 800 Гц и 1.6 дБ для частоты 1600 Гц. Таким образом, количественная оценка рефракции вращающегося монополя на слое смещения струи показывает, что эффект рефракции может быть весьма существенным.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ № 14.Z50.31.0032.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poletti M.A.* Series expansions of rotating two and three dimensional sound fields // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 128. № 6. P. 3363–3374.
2. *Poletti M.A., Teal P.D.* Comparison of methods for calculating the sound field due to a rotating monopole // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. V. 129. № 6. P. 3513–3520.
3. *Mao Y.J., Qi D.T., Gu Y.Y.* An exact frequency-domain solution of the sound radiated from the rotating dipole point source // *J. Acoust. Soc. Am.* 2012. V. 132. P. 1294–1302.
4. *Mao Y.J., Xu C., Qi D.T., Tang H.* Series expansion solution for sound radiation from rotating quadrupole point source // *AIAA J.* 2014. V. 52. № 5. P. 1086–1095.
5. *Pannert W., Maier C.* Rotating beamforming – motion-compensation in the frequency domain and application of high-resolution beamforming algorithms // *J. Sound Vibr.* 2014. V. 333. P. 1899–1912.
6. *Mao Y.J., Xu C., Qi D.T.* Frequency-domain model of tonal blade thickness and loading noise // *J. Acoust. Soc. Am.* 2014. V. 135. № 1. P. 93–103.
7. *Xu C., Mao Y.J., Qi D.T.* Frequency-domain acoustic pressure formulation for rotating source in uniform subsonic inflow with arbitrary direction // *J. Sound Vibr.* 2014. V. 333. P. 3081–3091.
8. *Mani R.* A moving source problem relevant to jet noise // *J. Sound Vibr.* 1972. V. 25. № 2. P. 337–347.
9. *Amiet R.* Refraction of sound by a shear layer // *J. Sound Vibr.* 1978. V. 58. № 4. P. 467–482.
10. *Gabard G.* Near- to far-field characteristics of acoustic radiation through plug flow jets // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008. V. 124. № 5. P. 2755–2766.
11. *Padois T., Prax C., Valeau V.* Numerical validation of shear flow corrections for beamforming acoustic source localisation in open wind-tunnels // *App. Acoust.* 2013. V. 74. P. 591–601.
12. *Sijtsma P., Oerlemans S.* Location of rotating sources by phased array measurements / *Proc. 7th AIAA/CAES Aeroacoustics Conf.* 2001. No. 2167 (AIAA Paper 2001–2167).
13. *Crighton D.G., Dowling A.P., Ffowcs Williams J.E., Heckl M., Leppington F.G.* Modern methods in analytical acoustics. London: Springer-Verlag, 1992. 738 p.