

УДК 534.121

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ВИХРЯ РЭНКИНА

© 2016 г. О. А. Доронина*, П. А. Бахвалов**, Т. К. Козубская**

*Московский физико-технический институт

141700 Долгопрудный, Институтский пер. 9

E-mail: doronina@phystech.edu

**Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

125047 Москва, Миусская пл. 4

E-mail: tatiana.kozubskaya@gmail.com

Поступила в редакцию 22.12.2015 г.

Продолжены исследования одной из фундаментальных задач, важных для понимания природы вихревых течений, — излучения звука возмущенным вихрем Рэнкина. Приведены результаты численного моделирования квадрупольного излучения и излучения в более высоких модах. Подробно разобрана структура и динамика генерируемого вихрем тонального акустического излучения. Показан процесс перехода вихря Рэнкина в возмущенное состояние при малом внешнем воздействии. Все расчеты проведены с использованием EBR-схемы, реализованной в программном комплексе NOISEtte.

Ключевые слова: вихрь Рэнкина, акустическое излучение, численное моделирование.

DOI: 10.7868/S0320791916040067

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа продолжает численные исследования вихря Рэнкина и излучаемого им звука. Эта проблема является фундаментальной для понимания природы вихревых течений и возникающего в них акустического излучения. Возмущения аксиального вихря в идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью в ядре были рассмотрены еще Кельвином [1]. Позднее вопрос излучения звука возмущенным вихрем Рэнкина и его акустической неустойчивости исследовался в работе [2]. Механизм неустойчивости возмущения аксиального вихря с учетом сжимаемости был объяснен в [3, 4].

Данная проблема сложна для численного моделирования из-за наличия резкой границы между вихревым и потенциальным течениями. Первое известное нам численное решение этой задачи представлено в работе [5], основанной на использовании метода Кабаре. В этой работе рассматривался механизм квадрупольного излучения.

В настоящей работе помимо квадрупольного излучения рассмотрены также излучение в более высоких модах и динамика генерируемого возмущенным вихрем тонального акустического излучения с постепенным переходом к более низким гармоникам. Отдельно рассматривается пере-

ход стационарного вихря Рэнкина в возмущенное состояние под действием внешнего возмущения малой амплитуды. Математическое описание проблемы основано на системе уравнений Эйлера. Численное моделирование проводится на неструктурированных сетках с помощью EBR (Edge-Based Reconstruction) схемы повышенной точности на основе реберно-ориентированной реконструкции переменных [6, 7].

Основной целью статьи является исследование процесса генерации акустического излучения возмущенным вихрем Рэнкина. Кроме того, в работе проверяется возможность корректного численного моделирования сложных фундаментальных задач вихревой динамики и, в частности, пригодности используемых численных алгоритмов повышенной точности на неструктурированных сетках для решения задач данного класса.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Вихрь Рэнкина

Вихрь Рэнкина является широко используемой моделью цилиндрического вихря с конечным ядром круглого сечения радиуса a , внутри которого завихренность Ω постоянна. Вне ядра тече-

ние полагается безвихревым ($\Omega = 0$). Поле тангенциальной скорости имеет следующий вид:

$$V_{\theta}(r) = \begin{cases} \frac{\Omega r}{2}, & r \leq a, \\ \frac{\Omega a^2}{2r}, & r \geq a, \end{cases} \quad V_r = 0, \quad (1)$$

где a – радиус вихря, r – расстояние от центра вихря. Максимальная скорость $(V_{\theta})_{\max}$ – скорость на кромке вихря (т.е. при $r = a$).

Задачи характеризуются безразмерным параметром – характерным числом Маха:

$$M = \frac{(V_{\theta})_{\max}}{c_{\infty}}, \quad (2)$$

где c_{∞} – скорость звука на бесконечности. Рассматриваемые в настоящей работе задачи формулируются в безразмерном виде. Скорость звука на бесконечности c_{∞} , плотность среды на бесконечности ρ_{∞} и радиус вихря a приняты за единицу. Далее все переменные полагаются безразмерными.

Уравнения для задания вихря Рэнкина в безразмерных переменных выглядят следующим образом:

$$V_{\theta} = \begin{cases} Mr, & r \leq 1, \\ \frac{M}{r}, & r \geq 1, \end{cases} \quad (3)$$

$$\rho = \begin{cases} \left(\frac{(k-1)r^2 + 2}{2k} \right)^{1/(\gamma-1)}, & r \leq 1, \\ \left(\frac{k(2r^2 - 1) + 1}{2kr^2} \right)^{1/(\gamma-1)}, & r \geq 1, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$k = \frac{1}{1 - (\gamma - 1)M^2},$$

γ – показатель адиабаты. Давление связано с плотностью соотношением

$$p = \frac{1}{\gamma} \rho^{\gamma}. \quad (5)$$

На рис. 1 приведены профили тангенциальной скорости V_{θ} и плотности ρ для вихря Рэнкина с характерным числом Маха $M = 0.3$.

2.2. Вихрь с возмущенной кромкой

Под возмущенным вихрем Рэнкина будем понимать вихрь с постоянной завихренностью в области, ограниченной замкнутой кривой. Эта замкнутая кривая задается как слабое возмущение круговой границы вихря Рэнкина и имеет вид

$$f(\theta) = 1 + \varepsilon \cos(n\theta), \quad (6)$$

где целое число n есть заданная мода возмущения. Вихрь, заданный таким образом, рассматривался ранее в работах [3, 5]. Здесь приведем эту постановку в безразмерных переменных:

$$r < f(\theta): \begin{cases} V_r = -\varepsilon M r^{n-1} \sin(n\theta), \\ V_{\theta} = M r - \varepsilon M r^{n-1} \cos(n\theta), \\ F(p) = \frac{1}{\gamma - 1} - M^2 \left(1 - \frac{r^2}{2} \right) - \\ - \varepsilon M^2 \frac{r^n}{n} \cos(n\theta), \end{cases} \quad (7)$$

$$r > f(\theta): \begin{cases} V_r = -\varepsilon M \frac{1}{r^{n+1}} \sin(n\theta), \\ V_{\theta} = M \frac{1}{r} + \varepsilon M \frac{1}{r^{n+1}} \cos(n\theta), \\ F(p) = \frac{1}{\gamma - 1} - M^2 \frac{1}{2r^2} - \\ - \varepsilon M^2 \frac{1}{nr^n} \cos(n\theta) \left(1 - n \left(\frac{r^2 - 1}{r^2} \right) \right), \end{cases}$$

где V_r, V_{θ} – компоненты скорости в полярных координатах. Функция $F(p)$ связана с давлением и плотностью следующими соотношениями:

$$\rho = ((\gamma - 1)F(p))^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad p = \frac{1}{\gamma} \rho^{\gamma}. \quad (8)$$

3. ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА

Численное решение двумерных уравнений Эйлера с выбранными начальными условиями (п. 2) проводится на основе исследовательского комплекса программ NOISEtte [8], разрабатываемого в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Вычислительный алгоритм в комплексе NOISEtte строится на основе методов повышенной точности с определением переменных в узлах для неструктурированных сеток. Для пространственной дискретизации используется EBR-схема [6, 7]. Повышенная точность схемы (до шестого порядка включительно, в зависимости от качества сетки) достигается за счет квазиодномерной реконструкции переменных вдоль направления ребер сетки. Для интегрирования по времени при численном решении рассматриваемых задач используется явная схема Рунге–Кутты 4-го порядка.

Данная методика верифицировалась на широком наборе тестовых задач и, в частности, на задаче моделирования рассеяния акустических волн на изолированных вихревых структурах в линей-

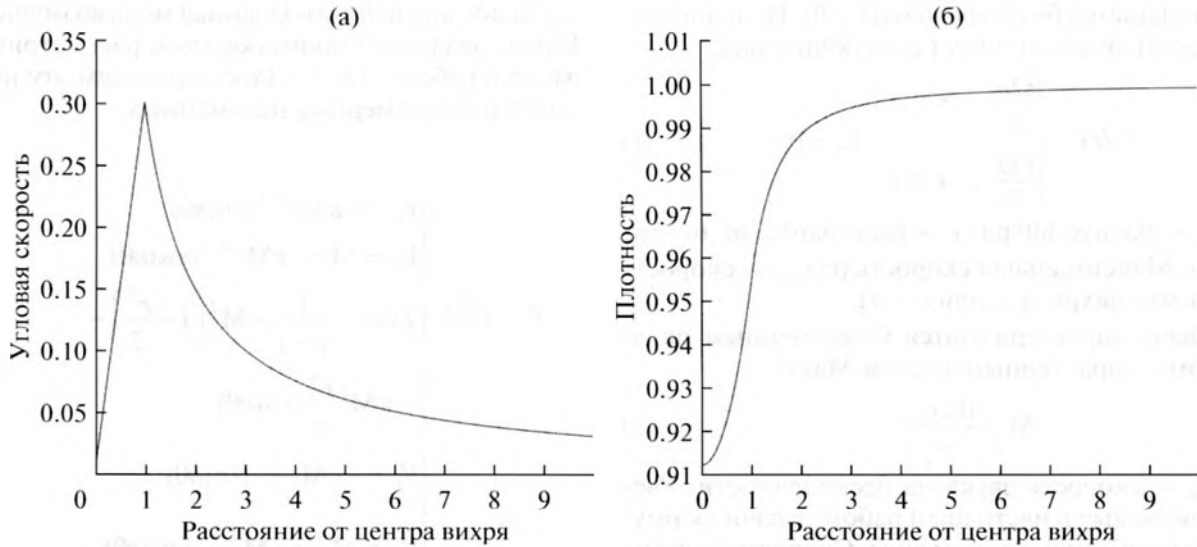


Рис. 1. Профили (а) скорости V_0 и (б) плотности ρ для вихря Рэнкина с $M = 0.3$.

ной постановке. В работе [9] полученные результаты сравнивались с эталонными решениями и проводилось сравнение результатов с другими численными подходами, а именно схемой Кабаре и разрывным методом Галеркина (DG-метод), реализованным в коммерческом пакете Actran.

Все расчеты, представленные в статье, проводятся на неструктурированных сетках, состоящих из треугольников, близких к равносторонним. В отдельных расчетах для повышения точности в области интереса использовалась трансляционно-симметрическая сетка (сетка, состоящая из правильных треугольников или являющаяся ее линейным отображением).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

4.1. Излучение звука возмущенным вихрем

Для начала рассмотрим результаты численного моделирования излучения звука возмущенным вихрем, заданным начальными данными (7) со следующими значениями параметров:

$$\varepsilon = 0.033, \quad n = 2, \quad M = 0.3. \quad (9)$$

Точно в такой постановке задача решалась в работе [5] с помощью метода Кабаре на структурированных прямоугольных сетках. Данная задача имеет аналитическое решение [3], поэтому она может быть использована также в качестве верификационной.

Для аналитического решения [3] собственная частота несжимаемого вихря для каждой гармоники n имеет вид $\omega_n = \Omega(n - 1)/2$. Для сжимаемого

вихря частота кельвиновского возмущения $n = 2$, отнесенная к частоте $\Omega/2$ несжимаемого приближения, имеет вид [2, 4]

$$\omega_2 = \frac{\Omega}{2} \left[1 - \frac{M^2}{12} - M^4 \left(\frac{67}{1152} + \frac{C_\gamma}{16} - \frac{i\pi}{32} + \frac{\gamma}{192} + \frac{1}{16} \ln \frac{M}{2} \right) \right], \quad (10)$$

где $C_\gamma = 0.5772\dots$ – постоянная Эйлера. Согласно (10), частота сжимаемого вихря отличается от частоты несжимаемого на члены $\sim M^2$. Кроме того, при учете членов M^4 в собственной частоте появляется мнимая добавка, соответствующая акустической неустойчивости.

Таким образом, особенности генерации звука проявляются в высших членах разложения точного решения по числу Маха и представляют собой серьезную проблему для численного моделирования, так как требуют учета большого числа колебаний вихря. Расчет данной задачи проводился до 2100 ед. по времени, что соответствует 100 периодам вихря ($T = 2\pi/M$). Для лучшего разрешения кромки вихря неструктурированная сетка сгущалась к круговой границе вихря до характерного размера ячейки 0.002 (500 точек на радиус вихря).

На рис. 2 приведена зависимость от времени радиальной скорости V_r , измеренной в контрольной точке на расстоянии $r = 1.2$ от центра вихря. Амплитуда колебаний постепенно возрастает, что связано с акустической неустойчивостью. На рис. 2 видно присутствие нескольких частот.

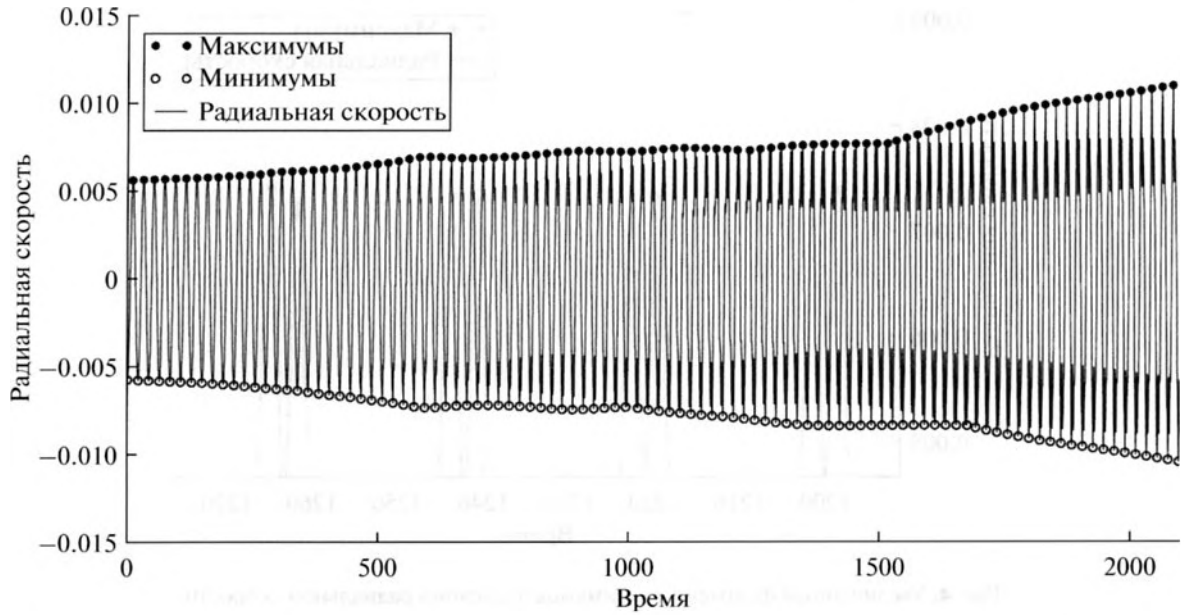


Рис. 2. Пульсации радиальной скорости V_r на расстоянии $r = 1.2$ от центра вихря при начальном задании моды $n = 2$.

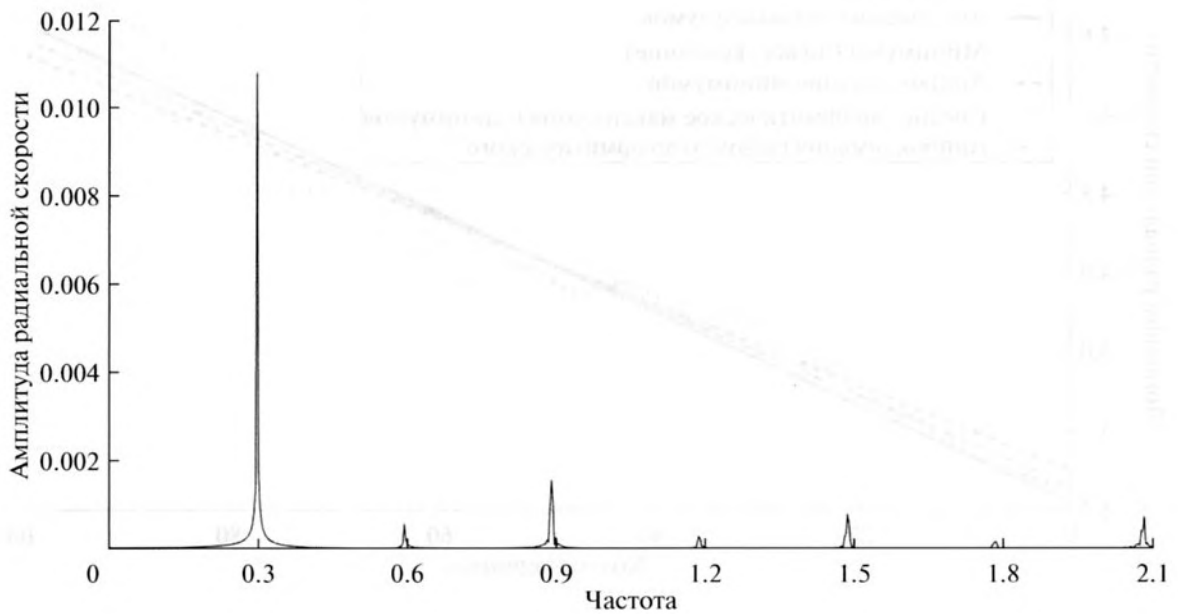


Рис. 3. Спектр пульсаций радиальной скорости (t от 0 до 2100) при начальном задании моды $n = 2$.

Для того чтобы выявить эти частоты, рассмотрим спектр сигнала (рис. 3). В спектре доминирует заданная гармоника $n = 2$, которая порождает более высокие гармоники с кратной частотой и меньшей амплитудой. Для рассматриваемых параметров теоретическое значение (10) собственной частоты $\omega_2 = 0.2977$. Численно полученное значение $\omega_2^{\text{num}} = 0.2962$. Таким образом, различие

между теоретическими и численными данными составляет 0.5%.

Исследуем поведение амплитуды гармоники $n = 2$ подробнее и определим инкремент неустойчивости возмущений. Для этого выделим максимумы и минимумы, соответствующие частоте ω_2 (отмечены на рис. 2). Несовпадение минимумов и максимумов может быть обусловлено наличием

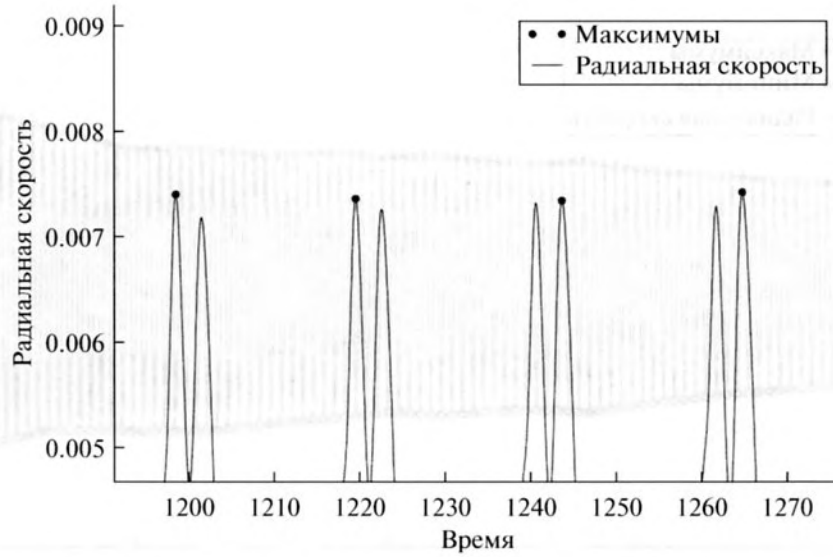


Рис. 4. Увеличенный фрагмент максимумов пульсаций радиальной скорости.

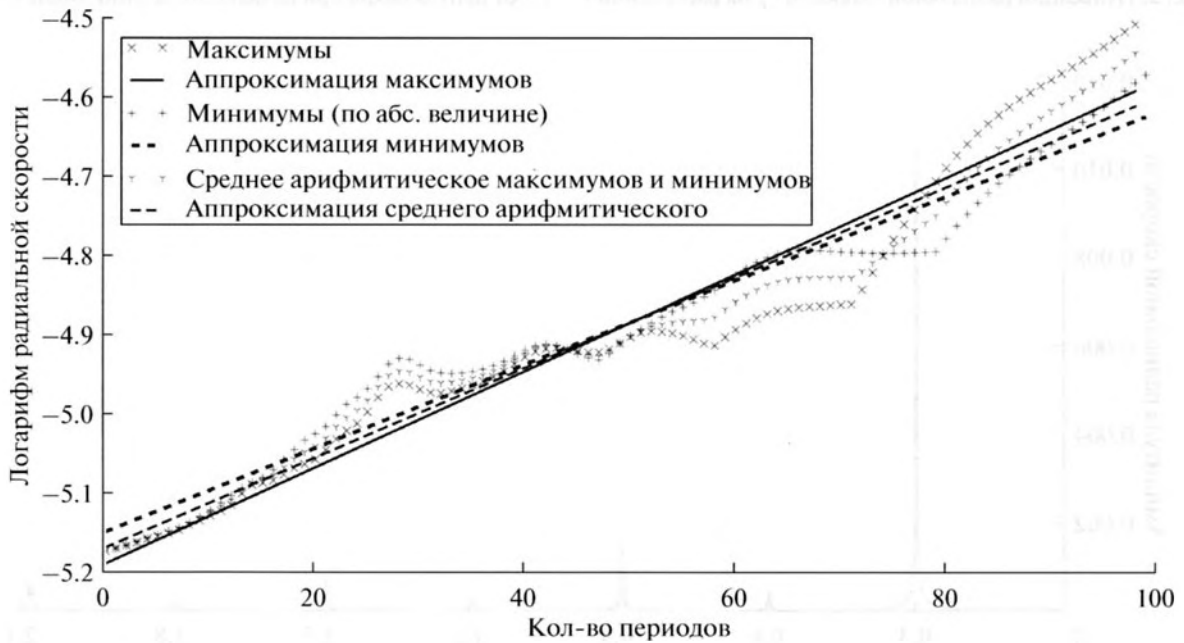


Рис. 5. Инкремент неустойчивости акустического излучения при начальном задании моды $n = 2$.

других частот, как видно на представленном на рис. 4 увеличенном фрагменте.

Аналитическое решение для инкремента неустойчивости было приведено в работе [3]: $\varepsilon(t) = \varepsilon e^{\delta t}$, где $\delta = \frac{\pi M^4 \Omega}{32 \cdot 2}$. Тогда $\delta t = \frac{\pi M^4 \Omega}{32 \cdot 2} t = \frac{\pi^2 M^4}{16} N$, где N — число оборотов. В нашем случае для аналитического решения получаем $\delta = 0.005$ для гар-

моники $n = 2$. Эффективность излучения (инкремент неустойчивости) падает с ростом номера гармоники.

Взяв натуральный логарифм от полученных минимумов, максимумов и их среднего арифметического и аппроксимировав их линейной функцией с помощью метода наименьших квадратов (рис. 5), получим приближенные значения для инкремента неустойчивости δ . Действуя та-

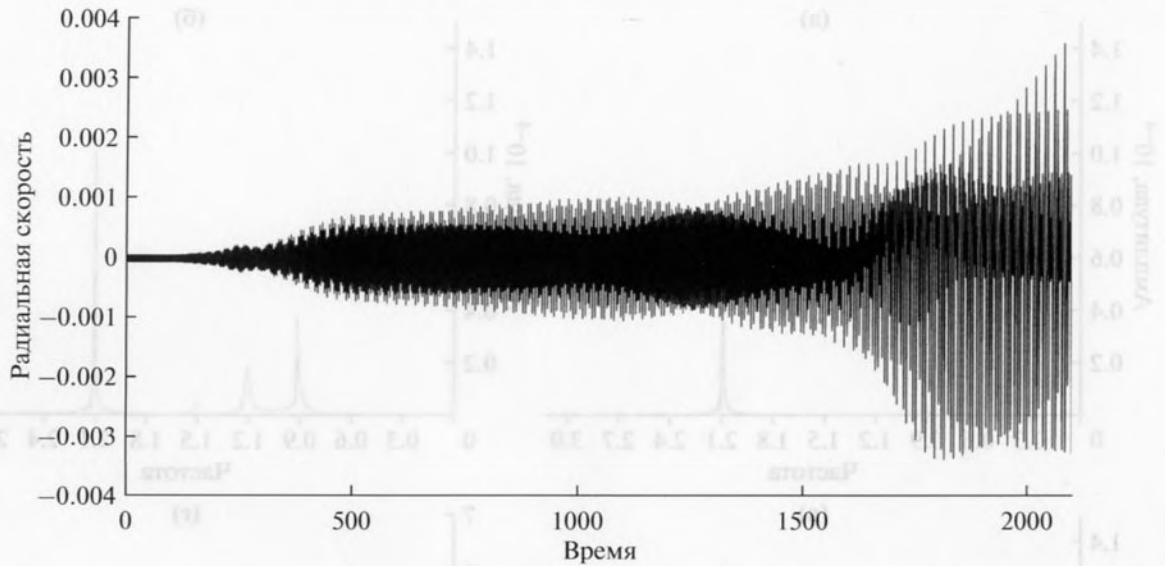


Рис. 6. Пульсации радиальной скорости V_r на расстоянии $r = 1.2$ от центра вихря при начальном задании моды $n = 8$.

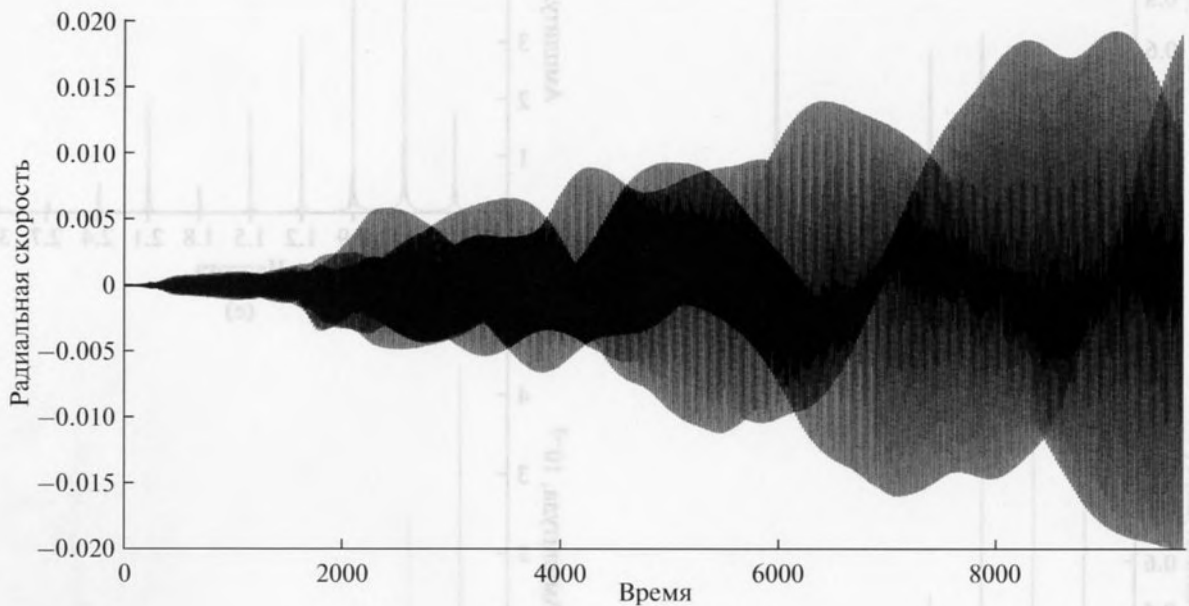


Рис. 7. Пульсации радиальной скорости V_r на расстоянии $r = 1.2$ от центра вихря при начальном задании моды $n = 8$.

ким образом, численно мы получили $\delta_{\max}^{\text{num}} = 0.006$, $\delta_{\min}^{\text{num}} = 0.0053$, $\delta_{\text{mean}}^{\text{num}} = 0.0056$. Отличие от аналитического значения составляет соответственно 20, 6 и 12%.

Результаты, полученные при моделировании данной задачи, в целом хорошо согласуются с аналитическим решением [3] и численными результатами, полученными при расчетах с помощью метода Кабаре в работе [5].

4.2. Излучение звука возмущенным вихрем с модой $n = 8$

Дальнейшие исследования посвящены изучению развития неустойчивости при задании возмущения границы вихря в более высокой моде. Для этого рассмотрим задачу со следующими значениями параметров в начальных данных (7):

$$\varepsilon = 0.0001, \quad n = 8, \quad M = 0.3. \quad (11)$$

На рис. 6 приведен график радиальной скорости в зависимости от времени в контрольной точ-

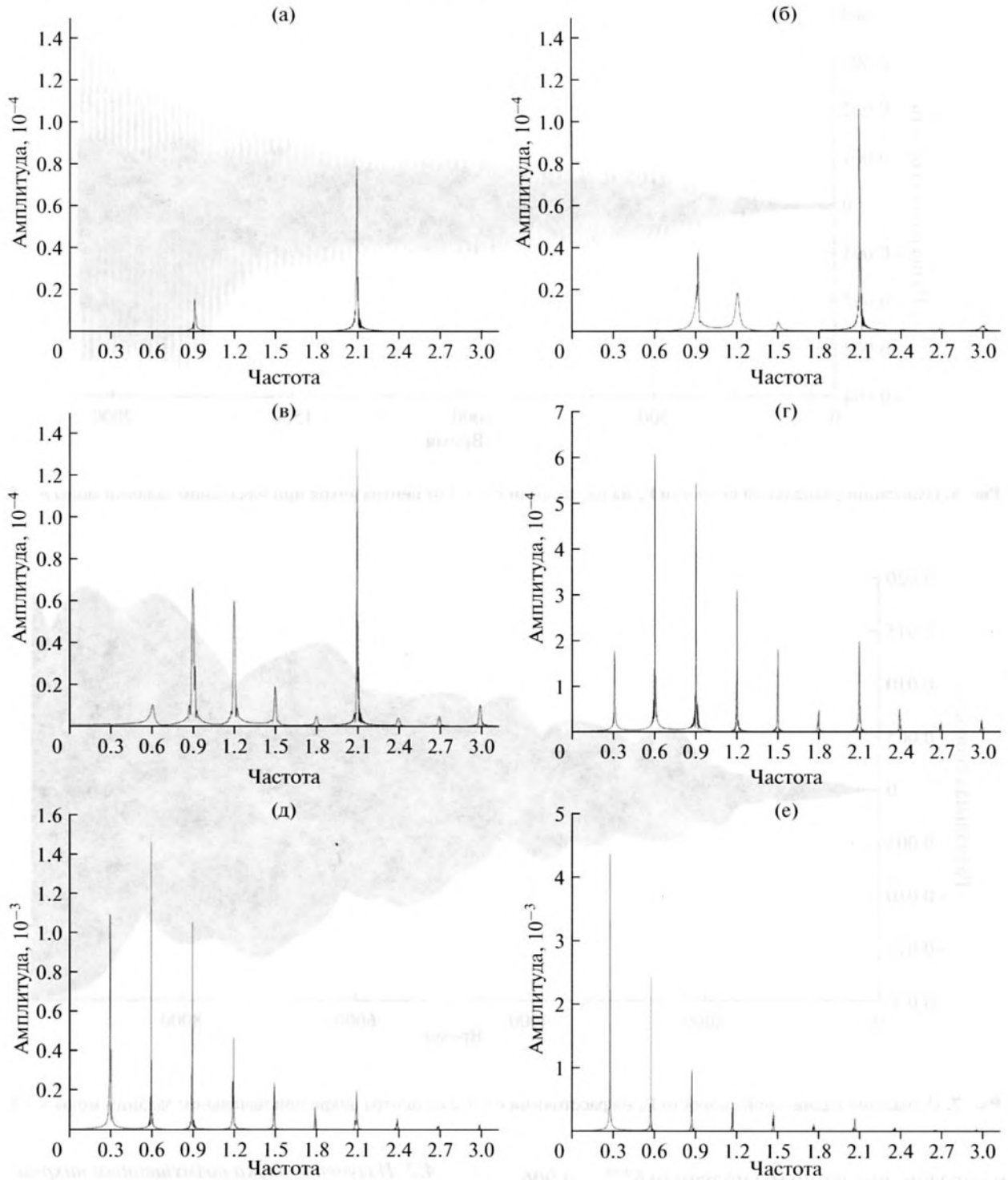


Рис. 8. Спектр пульсаций радиальной скорости в разные моменты времени при начальном задании моды $n = 8$: (а) t от 0 до 1500; (б) t от 0 до 1800; (в) t от 0 до 2100; (г) t от 0 до 4000; (д) t от 0 до 6000 ($\omega_3^{\text{num}} = 0.592$); (е) t от 0 до 10000 ($\omega_2^{\text{num}} = 0.294$).

ке на расстоянии $r = 1.2$ от центра вихря. С целью детального исследования излучения и его динамики расчет был продолжен до $t \approx 460$ периодов вихря (рис. 7).

Для того чтобы лучше понять процесс появления новых частот и нарастания их амплитуды, рассмотрим результаты построения спектра радиальной скорости в различные моменты времени

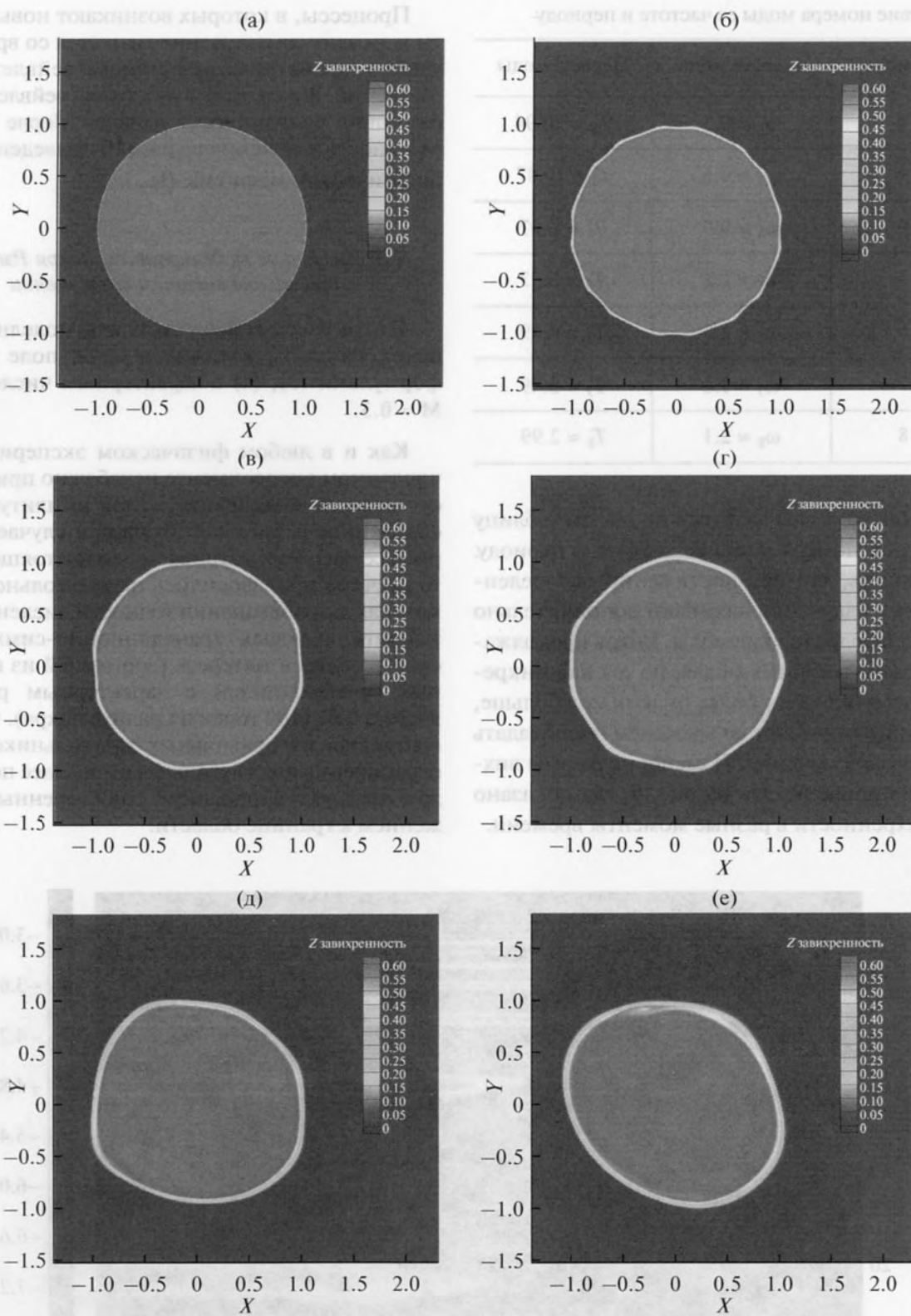


Рис. 9. Поле завихренности в разные моменты времени (N – кол-во оборотов вихря) при начальном задании моды $n = 8$: (а) $N = 0.13$; (б) $N = 13$; (в) $N = 47$; (г) $N = 113$; (д) $N = 250$; (е) $N = 435$.

Соответствие номера моды ее частоте и периоду

Номер моды	Частота моды	Период моды
$n = 2$	$\omega_2 \approx 0.3$	$T_2 \approx 20.94$
$n = 3$	$\omega_3 \approx 0.6$	$T_3 \approx 10.47$
$n = 4$	$\omega_4 \approx 0.9$	$T_4 \approx 6.97$
$n = 5$	$\omega_5 \approx 1.2$	$T_5 \approx 5.23$
$n = 6$	$\omega_6 \approx 1.5$	$T_6 \approx 4.19$
$n = 7$	$\omega_7 \approx 1.8$	$T_7 \approx 3.49$
$n = 8$	$\omega_8 \approx 2.1$	$T_8 \approx 2.99$

(рис. 8). Для удобства читателя приведем таблицу соответствия номера моды ее частоте и периоду. Можно видеть, что при достижении определенной энергии излучения начинают дополнительно развиваться более низкие моды. Вихрь продолжает излучать на всех этих модах, но так как инкремент неустойчивости у более низких мод больше, то последние начинают со временем преобладать по амплитуде излучения. Изменение формы вихря можно пронаблюдать на рис. 9, где показано поле завихренности в разные моменты времени.

Процессы, в которых возникают новые частоты и амплитуда излучения меняется со временем, удобно рассматривать с помощью вейвлет-преобразований. В настоящей работе для вейвлет-преобразования использовался вейвлет Морле (Morlet). Мощность излучения на рис. 10 приведена в логарифмическом масштабе (\lg_{10}).

4.3. Численное моделирование вихря Рэнкина при малом внешнем возмущении

Теперь рассмотрим результаты моделирования вихря Рэнкина, когда начальное поле задается формулами (3), (4) с характерным числом Маха $M = 0.3$.

Как и в любом физическом эксперименте, в численном эксперименте неизбежно присутствует внешнее возмущение малой амплитуды, обусловленное установкой (в нашем случае геометрией сетки). Рассматриваемые в настоящем пункте расчеты производились на треугольной сетке, которая для повышения точности численного результата являлась трансляционно-симметрической в области интереса (состоящей из правильных треугольников) с характерным размером ячейки 0.01 (100 точек на радиус вихря). Область, состоящая из правильных треугольников, была ограничена шестиугольником и далее переходила в неструктурированную с постепенным разрежением к границе области.

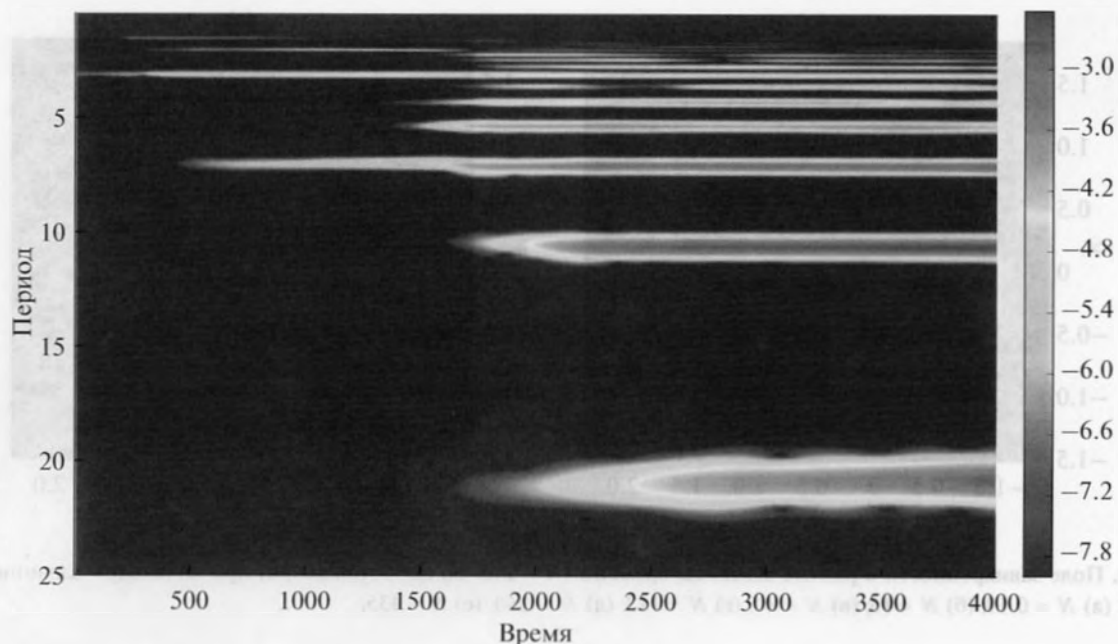


Рис. 10. Вейвлет-преобразование акустического излучения при начальном задании моды $n = 8$.

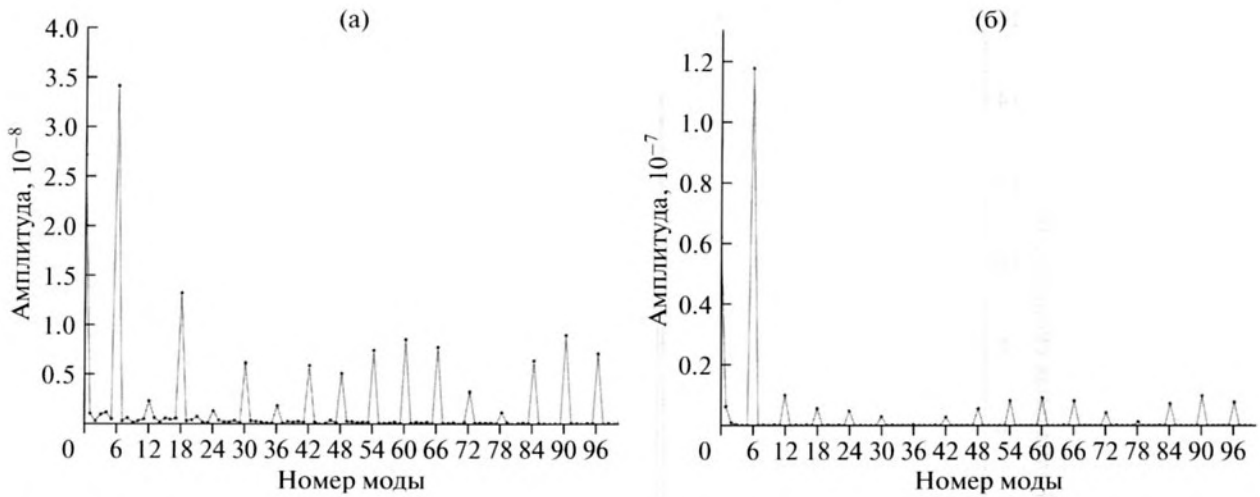


Рис. 11. Спектр возмущения круговой границы вихря в разные моменты времени при начальном задании моды $n = 8$: (а) $t = 2.24$; (б) $t = 22.4$.

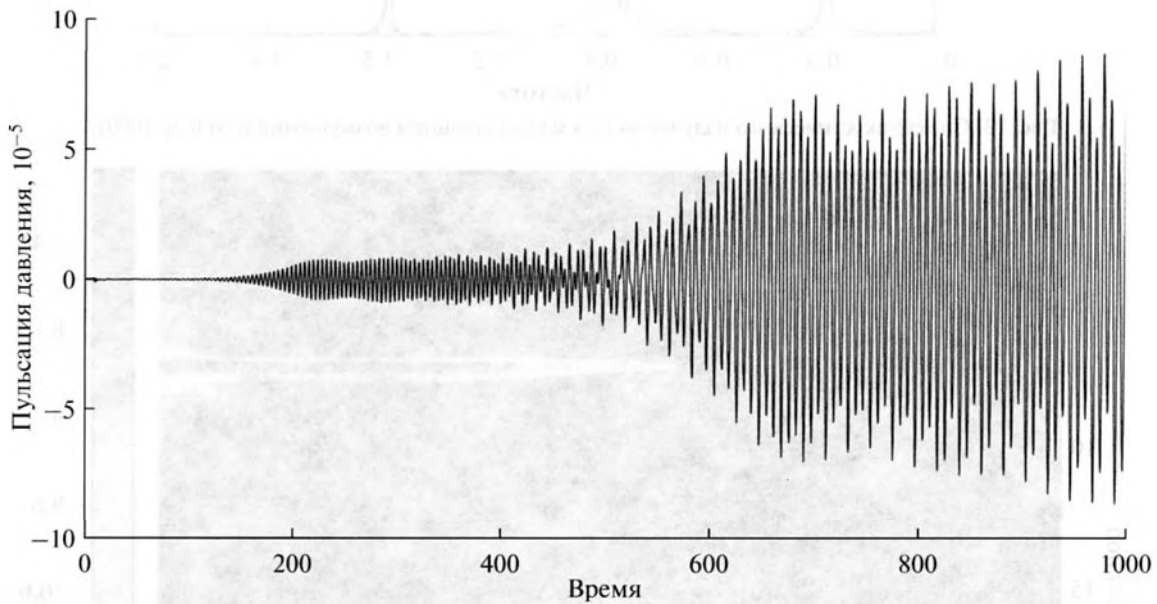


Рис. 12. Пульсации давления на расстоянии $r = 10$ от центра вихря при малом внешнем возмущении.

Спектр внесенного численным образом малого возмущения можно видеть на рис. 11. Данные спектры построены для возмущения, распределенного по окружности (вдоль границы вихря) в конкретные моменты времени. По оси абсцисс указана круговая частота, которая совпадает с номером моды n .

Длительность расчета равна примерно 50 периодам вихря (1000 единиц по времени). На рис. 12 представлен график пульсации давления в контрольной точке на расстоянии $r = 10$. Спектр излучения приведен на рис. 13.

Таким образом, можно показать, что даже малое внешнее возмущение переводит вихрь в возмущенное состояние, и он начинает излучать с собственной частотой ω_n , связанной в численном эксперименте с геометрией сетки. Далее процесс возникновения новых мод и развитие их неустойчивости происходит совершенно таким же образом, как это показано в пп. 4.1 и 4.2.

Наблюдать динамику излучения можно на рис. 14, где представлен результат вейвлет-преобразования, для которого использовался вейвлет

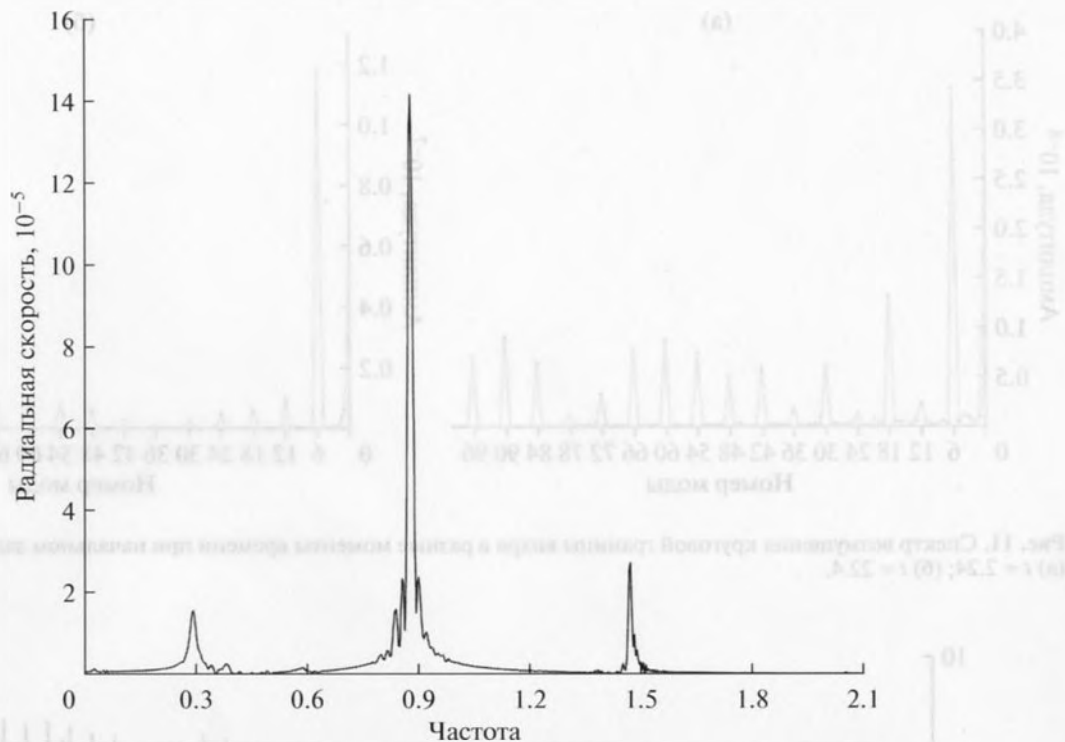


Рис. 13. Спектр акустического излучения при малом внешнем возмущении (t от 0 до 1000).

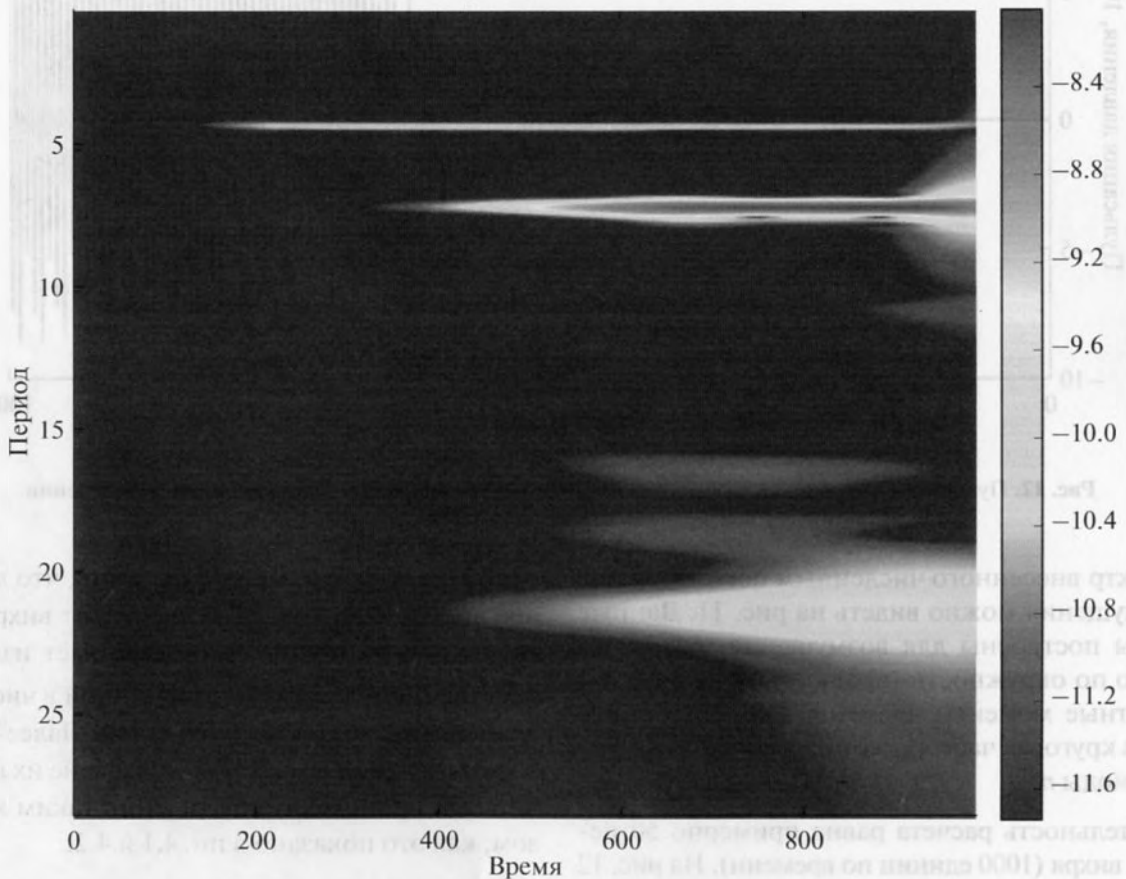


Рис. 14. Вейвлет-преобразование акустического излучения при малом внешнем возмущении.

Морле, и мощность излучения приведена в логарифмическом масштабе (\lg_{10}).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе численно исследован вихрь Рэнкина и динамика его акустического излучения. В отличие от [5], рассмотрены другие численные методы и неструктурированные сетки.

Результаты численного моделирования квадрупольного излучения хорошо согласуются с результатами других авторов и аналитическим решением. Это, в частности, подтверждает, что использованная численная методика может быть успешно применена для моделирования такого класса задач.

Подробно рассмотрена структура и динамика генерируемого возмущенным вихрем излучения. Показано, что при достижении определенной амплитуды возмущения на собственных модах происходит перекачка энергии в более низкие гармоники. Вихрь продолжает излучать на всех этих модах, но так как инкремент неустойчивости у более низких мод больше, то со временем в излучении начинают преобладать более низкие гармоники.

Внешнее возмущение даже малой амплитуды переводит вихрь Рэнкина в возмущенное состояние, и он начинает излучать. При этом динамика акустического излучения и развитие более низких гармоник такие же, как при задании вихря с сильно деформированной границей в начальный момент времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Broadbent E., Moore D. Acoustic destabilization of vortices // Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1979. V. 290. № 1372. P. 353–371.
3. Копьев В.Ф., Леонтьев Е.А. Об акустической неустойчивости аксиального вихря // Акуст. журн. 1983. Т. 29. С. 192–198.
4. Копьев В.Ф., Леонтьев Е.А. Излучение и рассеяние звука вихревым кольцом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. С. 83–95.
5. Яковлев П.Г. Излучение звука плоским локализованным вихрем // Акуст. журн. 2012. Т. 58. С. 563–568.
6. Абалакин И.В., Козубская Т.К. Схема повышенной точности на основе реберно-ориентированной квазиодномерной реконструкции переменных для решения задач аэродинамики и аэроакустики на тетраэдральных сетках // Матем. моделирование. 2013. Т. 25. С. 109–136.
7. Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T. Edge-based reconstruction schemes for prediction of near field flow region in complex aeroacoustics problems // International Journal of Aeroacoustics. 2014 V. 13. № 3. P. 207–234.
8. Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Горобец А.В., Дубень А.П., Козубская Т.К. Параллельный программный комплекс NOISETTE для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // Вычислит. методы и программирование. 2012. Т. 13. № 3. С. 110–125.
9. Доронина О.А., Жданова Н.С. Численное моделирование рассеяния акустических волн изолированными вихревыми структурами // Матем. моделирование. 2013. Т. 25. № 9. С. 85–94.