

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.1

ОСОБЕННОСТИ ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН ИСТОЧНИКОМ,
ДВИЖУЩИМСЯ ПО ОДНОМЕРНОЙ ГИБКОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ,
ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГО-ИНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ

© 2016 г. В. И. Ерофеев^{*,**}, Д. А. Колесов^{*}, Е. Е. Лисенкова^{***}

^{*}Институт проблем машиностроения РАН, 603950 ГСП-120, Н. Новгород, ул. Ульянова 46

^{**}Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950 Н. Новгород, пр. Гагарина, 23

^{***}Нижегородский институт управления, Н. Новгород, пр. Гагарина 46

E-mail: erf04@mts-nn.ru

Поступила в редакцию 07.10.2015 г.

Поставлена самосогласованная динамическая задача для системы, включающей в себя одномерную гибкую направляющую (струна), упруго-инерционное основание (массив осцилляторов) и движущуюся осциллирующую нагрузку. Проанализировано влияние параметров основания на дисперсионные характеристики (зависимости частоты, фазовой и групповой скоростей от волнового числа) поперечных волн, распространяющихся по струне. Показано, что учет инерционности основания приводит к наличию двух критических частот (частот отсечки). Исследованы закономерности генерации волн источником, движущимся по струне.

Ключевые слова: гибкая направляющая, упруго-инерционное основание, движущийся источник, генерация волн.

DOI: 10.7868/S0320791916060058

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Многие элементы машиностроительных конструкций, в частности, несущих движущиеся нагрузки (путевая структура, контактный провод) рассматриваются в виде одномерной системы (струна, балка), взаимодействующей с деформируемым основанием. Для расчета конструкций, лежащих на грунте, в основном, используются три модели основания: 1) винклерова модель; 2) модель упругого полупространства; 3) комбинированная модель упругого основания.

В [1] отмечается, что наиболее приемлемой для практических целей моделью является винклерово основание, поскольку результаты расчета конструкций с использованием этой модели близко соответствуют опытным данным.

При исследовании движения нагрузок вдоль одномерных упругих систем основание задается линейно-упругим (основание Винклера) или вязкоупругим, что позволяет учитывать возможность его сопротивления силовому воздействию. При этом основание как динамическая система, как правило, не рассматривается.

А.И. Весницкий [2] предложил математическую модель, обобщающую модель Винклера путем учета инерционности упругого основания, с которым взаимодействует струна, совершающая малые поперечные колебания.

Задача Весницкого рассматривается в следующей постановке: одномерная гибкая нерастяжимая струна (ее объемная плотность ρ_0 , площадь поперечного сечения S) находится на упруго-инерционном основании, жесткость которого γ , а погонная масса ρ_g . Через u_1 и u_2 обозначены поперечные отклонения струны и средней линии “постели” от невозмущенного положения (рис. 1). В начальный момент времени струна была натянута с силой N , и ее положение совпадает с осью x .

В общем случае при отклонении струны от положения равновесия ее бесконечно малый элемент dx растягивается и переходит в элемент $dl = \sqrt{1 + u_{1,x}^2} dx$. При рассмотрении малых колебаний струны и пренебрежении квадратом производной по сравнению с единицей $\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \ll 1\right)$ (т.к. амплитуда колебаний много меньше длины волны $\frac{u_1}{\Lambda} \ll 1$, где Λ – длина волны), удлинение участка струны $(x, x + \Delta x)$ в процессе колебания не происходит. Как следствие, величина натяжения остается неизменной и равной N .

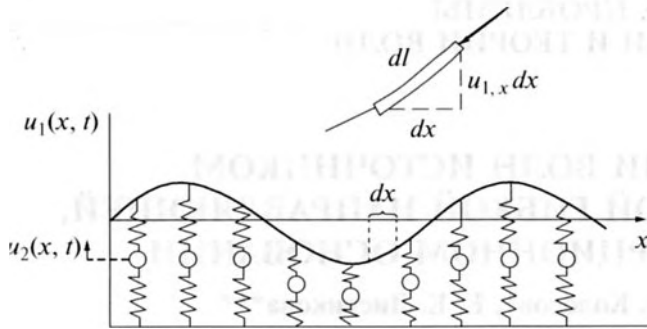


Рис. 1. Струна, лежащая на упруго-инерционном основании.

Плотности потенциальной и кинетической энергий системы “струна–упругое основание” будут соответственно равны

$$W_{II} = \frac{1}{2} N \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \gamma [u_2^2 + (u_1 - u_2)^2],$$

$$W_K = \frac{1}{2} \rho_0 S \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho_g \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2,$$

и лагранжиан (плотность функции Лагранжа) системы имеет вид

$$L = W_K - W_{II} = \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 S \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \rho_g \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 - N \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 - \gamma [u_2^2 + (u_1 - u_2)^2] \right\}. \quad (1)$$

Применяя вариационный принцип Гамильтона–Остроградского к лагранжиану (1), получим систему уравнений динамики [2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{\rho_0 S} (u_1 - u_2) = 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{2\gamma}{\rho_g} u_2 = \frac{\gamma}{\rho_g} u_1. \end{cases} \quad (2)$$

Первое из уравнений системы (2) описывает волны, распространяющиеся вдоль струны, а второе – вибрации массива осцилляторов, взаимодействующих с колебаниями струны; $c = \sqrt{N/(\rho_0 S)}$ – скорость, с которой распространялась бы поперечная волна, если бы струна не взаимодействовала с упруго-инерционным основанием.

Проведенные ранее исследования волновых процессов в одномерных системах, лежащих на упругом основании, выявили наличие зон непропускания [2, 3], где действительным частотам не соответствуют действительные волновые числа. Если частота колебаний нагрузки меньше так называемой “частоты отсечки”, то при малых скоростях движения нагрузки вдоль таких систем волны не излучаются. При движении нагрузки со

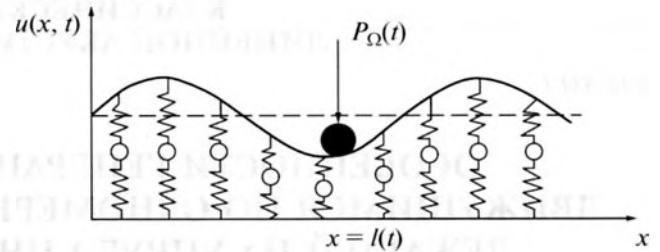


Рис. 2. Движение нагрузки вдоль струны.

скоростью, превышающей критическую, происходит процесс волнообразования. Ниже показано, что учет инерционности в основании струны приводит к возникновению двух частот отсечки, а движущаяся вдоль такой системы нагрузка вызывает в ней упругие колебания, представляющие собой бегущие волны при любых скоростях движения и частотах источника.

Рассмотрим движение нагрузки вдоль струны, лежащей на упруго-инерционном основании. Пусть движущаяся по неизвестному закону $x = \ell(t)$ нагрузка представляет собой массу m , на которую действует поперечная гармоническая сила частоты Ω (рис. 2). Тогда функция Лагранжа движущейся нагрузки будут иметь вид $L_0 = m(\dot{u}_0^2 + \dot{\ell}^2)/2$, где $u_0(t)$ – поперечное смещение массы m .

Будем полагать, что динамическое поведение одномерной упругой системы и движущейся по ней нагрузки взаимообусловлены, а именно: характер колебаний струны зависит от закона движения нагрузки, а движение последней происходит как под действием внешних сил, так и сил реакции со стороны одномерной системы, включая силы давления волн. Следуя методике постановок крайних задач, разработанной в [2, 3] на основе вариационного принципа Гамильтона–Остроградского, получим уравнения согласованного динамического поведения направляющей и движущейся нагрузки, дополняющие систему (2):

$$u_1(\ell - 0, t) = u_1(\ell + 0, t) = u_0(t), \quad (3)$$

$$u_2(\ell - 0, t) = u_2(\ell + 0, t),$$

$$m\ddot{u}_0 = \rho_0 S (c^2 - \dot{\ell}^2) [u_{1x}] + P_{\Omega}(t), \quad (4)$$

$$[u_{2r}] = 0, \quad (5)$$

$$m\ddot{\ell} = -[T - \dot{\ell}p] + R. \quad (6)$$

Здесь

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 S \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \rho_g \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + N \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 - \gamma [u_2^2 + (u_1 - u_2)^2] \right\},$$

$$p = -\rho_0 S \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \rho_g \frac{\partial u_2}{\partial t} \frac{\partial u_2}{\partial x},$$

p – плотность волнового импульса, T – плотность его потока, квадратные скобки означают разность предельных значений стоящих в них величин справа и слева от движущей нагрузки.

Выражения (3) являются условиями непрерывности, а (4)–(6) выражают баланс обобщенных сил при $x = \ell(t)$. Первое слагаемое в (6) определяет продольную составляющую силы реакции со стороны направляющей (силу давления волн [2, 3]), а второе – внешнюю силу. При движении нагрузки с постоянной скоростью ($\dot{\ell}(t) = V = \text{const}$) под R понимается сила, необходимая для поддержания заданного закона движения контакта.

РАСЧЕТ ДИСПЕРСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТРУНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГО-ИНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ

Проведем расчет дисперсионных характеристик одномерной упругой системы. Вначале рассмотрим струну, лежащую на упругом (безынерционном) основании. Уравнение, описывающее колебания такой струны, можно получить как частный случай из системы (2). Для этого необходимо устремить $\rho_g \rightarrow 0$. Тогда из второго уравнения системы следует, что $u_1 = 2u_2$, а из первого получаем

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{2\rho_0 S} u_1 = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) называется, как известно, уравнением Клейна–Гордона. Оно описывает, в частности, распространение гармонических волн:

$$u_1(x, t) = (Ae^{i(\omega t - kx)} + A^* e^{-i(\omega t - kx)})/2, \quad (8)$$

где $A = ae^{i\varphi}$ – комплексная амплитуда волны; a – действительная амплитуда; $\omega t - kx + \varphi$ – полная фаза волны; φ – фазовый сдвиг; $\omega = \frac{2\pi}{T_0}$ – частота

волны; T_0 – период волны; $k = \frac{2\pi}{\Lambda}$ – волновое число; Λ – длина волны.

Согласно (7), частота и волновое число поперечной волны, распространяющейся в струне, лежащей на линейно-упругом (безынерционном) основании, связаны соотношением

$$\omega^2 - c^2 k^2 - \omega_*^2 = 0, \quad \omega_* = \sqrt{\gamma/(2\rho_0 S)}. \quad (9)$$

Разрешая уравнение (9) относительно частоты ω , получим $\omega = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_*^2}$.

Наличие упругого основания приводит к существованию критической частоты ω_* (частота

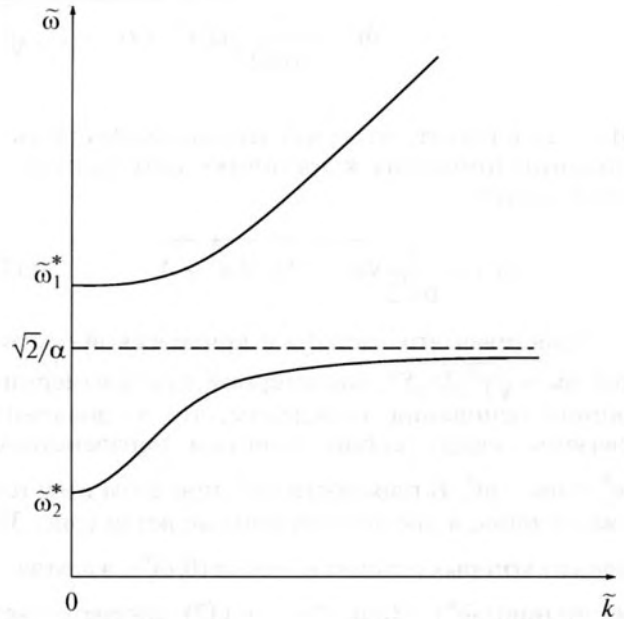


Рис. 3. Дисперсионные зависимости.

отсечки), при превышении которой колебания струны носят волновой характер.

При наличии инерционности в основании ее колебания описываются решением двух уравнений (2). Эта система может быть сведена к одному уравнению относительно поперечного перемещения частиц струны u_1 :

$$\left(1 + \frac{2\rho_0 S}{\rho_g}\right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{2c^2 \rho_0 S}{\rho_g} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\rho_0 S}{\gamma} \frac{\partial^4 u_1}{\partial t^4} - \frac{c^2 \rho_0 S}{\gamma} \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma}{\rho_g} u_1 = 0. \quad (10)$$

Отыскивая его решения в виде (8), получим дисперсионное уравнение, связывающее частоту и волновое число поперечной волны, распространяющейся в струне, лежащей на упруго-инерционном основании:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{\gamma}{\rho_0 S} + \frac{2\gamma}{\rho_g} + c^2 k^2 \right) + \frac{2\gamma c^2}{\rho_g} k^2 + \frac{\gamma^2}{\rho_g \rho_0 S} = 0. \quad (11)$$

Разрешая это уравнение относительно частоты в безразмерных переменных $\tilde{k} = ck\sqrt{\rho_0 S/\gamma}$, $\tilde{\omega} = \omega\sqrt{\rho_0 S/\gamma}$, $\alpha = \sqrt{\rho_g/\rho_0 S}$, получим

$$\tilde{\omega}_{1,2} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} \sqrt{\alpha^2 \tilde{k}^2 + \alpha^2 + 2 \pm \sqrt{(\alpha^2 \tilde{k}^2 + \alpha^2 + 2)^2 - 4\alpha^2(2\tilde{k}^2 + 1)}}. \quad (12)$$

Из (12) следует, что учет инерционности основания приводит к наличию двух критических частот:

$$\tilde{\omega}_{1,2}^* = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} \sqrt{\alpha^2 + 2 \pm \sqrt{\alpha^4 + 4}}. \quad (13)$$

Сравнивая эти частоты с критической частотой $\omega_* = \sqrt{\gamma/(2\rho_0 S)}$, характерной для безынерционного основания, определим, что их значения связаны между собой двойным неравенством $\omega_2^* < \omega_* < \omega_1^*$. В плоскости $\tilde{\omega}, \tilde{k}$ при этом имеется уже не одна, а две дисперсионные ветви (рис. 3), одна из которых исходит из точки $(0, \tilde{\omega}_1^*)$, а другая — из точки $(0, \tilde{\omega}_2^*)$. Знак “+” в (12) соответствует верхней, а “-” — нижней ветвям дисперсионной кривой. При больших волновых числах кривые (12) стремятся к асимптотам $\omega = ck$ и $\omega = \sqrt{2}\gamma/\rho_g$ соответственно. Точка перегиба нижней ветви дисперсионной кривой определяется из уравнения

$$6\alpha^8 \tilde{k}^8 + 2\alpha^6 \tilde{k}^6 (7\alpha^2 + 2) + 9\alpha^4 \tilde{k}^4 (\alpha^4 + 4) - (\alpha^4 + 4)^2 = 0. \quad (14)$$

$$\frac{v_{ph}}{c} = \frac{1}{\alpha\tilde{k}\sqrt{2}} \sqrt{\alpha^2 \tilde{k}^2 + \alpha^2 + 2 \pm \sqrt{(\alpha^2 \tilde{k}^2 + \alpha^2 + 2)^2 - 4\alpha^2(2\tilde{k}^2 + 1)}}, \quad (15)$$

$$\frac{v_{gr}}{c} = \frac{\alpha\tilde{k}}{\sqrt{2}\beta} \frac{\beta \pm (\alpha^2 \tilde{k}^2 + \alpha^2 - 2)}{\sqrt{\alpha^2 \tilde{k}^2 + \alpha^2 + 2 \pm \beta}}, \quad \beta = \sqrt{(\alpha^2 \tilde{k}^2 + \alpha^2 + 2)^2 - 4\alpha^2(2\tilde{k}^2 + 1)}. \quad (16)$$

Во всем диапазоне волновых чисел значения фазовых скоростей волн превосходят значения их групповых скоростей, следовательно, дисперсия является нормальной. При $k \rightarrow \infty$ для верхней дисперсионной ветви $v_{ph} \rightarrow c$ и $v_{gr} \rightarrow c$; для нижней — $v_{ph} \rightarrow 0$ и $v_{gr} \rightarrow 0$. Зависимость групповой скорости от волнового числа для нижней дисперсионной ветви не является монотонной. Значение длины волны, при котором групповая скорость максимальна, определяется на основе решения уравнения (14).

Заметим, что система (2) совпадает с системой уравнений, предложенной в [4] для описания

В зависимости от параметра α (т.е. отношения погонной массы основания к погонной плотности струны) рассмотрим три предельных случая: $\alpha \rightarrow 1$, $\alpha \ll 1$, $\alpha \gg 1$. При $\alpha \rightarrow 1$ критические частоты $\tilde{\omega}_1^*$ и $\tilde{\omega}_2^*$ будут соответственно равны $\tilde{\omega}_{1,2}^* = \sqrt{(3 \pm \sqrt{5})/2}$. С уменьшением α ($\alpha \ll 1$) верхняя частота $\tilde{\omega}_1$ увеличивается ($\tilde{\omega}_1 \rightarrow \infty$), а нижняя — $\tilde{\omega}_2 \rightarrow \sqrt{\tilde{k}^2 + 1/2}$, что соответствует безынерционности основания. В этом случае, как было указано выше, существует одна частота отсечки $\omega_2^* = \omega_*$. При увеличении α ($\alpha \gg 1$) верхняя ветвь дисперсионной кривой (12) $\tilde{\omega}_1 \rightarrow \sqrt{\tilde{k}^2 + 1}$, а нижняя $\tilde{\omega}_2 \rightarrow 0$. Остается одна критическая частота $\omega_1^* = \sqrt{\gamma/(\rho_0 S)}$ ($\tilde{\omega}_1^* = 1$), превышающая критическую частоту ω_* (в пренебрежении инерционностью основания) в $\sqrt{2}$ раз.

Фазовые ($v_{ph} = \omega/k = c\tilde{\omega}/\tilde{k}$) и групповые ($v_{gr} = d\omega/dk = c d\tilde{\omega}/d\tilde{k}$) скорости поперечных волн, распространяющихся в струне, лежащей на упруго-инерционном основании, определяются выражениями

длинноволновых динамических процессов в метаматериале, моделируемом как решетка “масса-в-массе”. Другие математические модели акустических метаматериалов можно найти в работах [5–11].

ИЗЛУЧЕНИЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКОЙ ВОЛН В СТРУНЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГО-ИНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ

В рамках линейной постановки задачи контактного взаимодействия для случая равномерно закона движения $x = Vt$ ($V = \text{const}$) нагрузки проведем анализ волновых явлений и качествен-

но различных случаев их проявления. Под этой задачей понимается определение частот, волновых чисел, скоростей и направлений распространения возбуждаемых волн.

Считая процесс возбуждения колебаний струны установившимся [2, 3], решение задачи (3)–(6), (10) слева и справа от нагрузки будем искать в виде (8). Тогда частоты и волновые числа искомого волн в безразмерных переменных $\tilde{k} = ck\sqrt{\rho_0 S/\gamma}$, $\tilde{\omega} = \omega\sqrt{\rho_0 S/\gamma}$, $\alpha = \sqrt{\rho_g/\rho_0 S}$, $\tilde{V} = V/c$, $\tilde{\Omega} = \Omega\sqrt{\rho_0 S/\gamma}$ определяются системой уравнений

$$\begin{cases} \alpha^2 \tilde{\omega}^4 - \tilde{\omega}^2 (\alpha^2 \tilde{k}^2 + \alpha^2 + 2) + 2\tilde{k}^2 + 1 = 0, \\ \tilde{\omega} - \tilde{k}\tilde{V} = \tilde{\Omega}. \end{cases} \quad (17)$$

Первое из уравнений системы (17) является дисперсионным уравнением, а второе, называемое кинематическим инвариантом, выражает собой равенство фаз излучаемых волн в движущейся системе отсчета фазе колебаний нагрузки и определяет величину смещения частоты согласно эффекту Доплера. Если движущаяся нагрузка представляет собой постоянную силу, то $\tilde{\Omega} = 0$, и кинематический инвариант запишется в виде $\tilde{\omega} - \tilde{k}\tilde{V} = 0$. На плоскости $(\tilde{k}, \tilde{\omega})$ кинематический инвариант представляет собой прямую, проходящую через точку $(0, \tilde{\Omega})$, с угловым коэффициентом, равным скорости движения нагрузки. Точки пересечения этой прямой и дисперсионной кривой соответствуют действительным частотам и волновым числам возбуждаемых волн.

Физически реализуемыми будут лишь те волны, которые удовлетворяют условию ограниченности прогибов струны на бесконечности и условию излучения Манделъштама [12] (волны должны отводить энергию от движущейся нагрузки). На языке кинематики волн эти требования запишутся в виде:

$$\text{Im } k = \begin{cases} > 0 & \text{при } x < Vt, \\ < 0 & \text{при } x > Vt \end{cases}$$

$$\text{и } v_{\text{gr}} = \begin{cases} < V & \text{при } x < Vt, \\ > V & \text{при } x > Vt. \end{cases}$$

Система (17) совместно с последними двумя условиями позволяет единым образом находить значения частот и волновых чисел возбуждаемых движущейся нагрузкой волн, анализировать их поведение в зависимости от скорости движения и тем самым определять возможные кинематические эффекты: Вавилова–Черенкова, тормозного излучения, Доплера и др., обусловленные движением границ [2, 3].

Критические скорости \tilde{V}_j^* ($j = 1-3$), при переходе через которые меняется число возбуждаемых

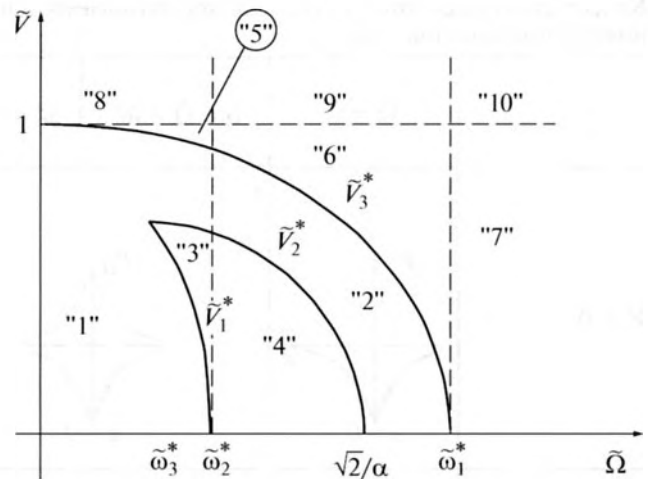


Рис. 4. Области (в плоскости параметров “критическая скорость—частота вынуждающего воздействия”) с различным числом возбуждаемых волн.

в струне волн, определяются из условия вырождения корней системы уравнений (17):

$$\begin{aligned} & (16 + 8\alpha^4 + \alpha^8)\tilde{V}^{10} + (6\alpha^8\Omega^2 - 80 + 32\Omega^2 - \alpha^8 - \\ & - 24\alpha^4 - 8\alpha^6\Omega^2 - 32\alpha^2\Omega^2 + 32\alpha^4\Omega^2)\tilde{V}^8 + \\ & + (-36\alpha^6\Omega^4 - 128\Omega^2 + 56\alpha^4\Omega^4 + 24\alpha^4 + 30\alpha^6\Omega^2 - \\ & - 20\alpha^4\Omega^2 - 5\alpha^8\Omega^2 + 14\alpha^8\Omega^4 + 56\alpha^2\Omega^2 - 64\alpha^2\Omega^4 + \\ & + 160)\tilde{V}^6 + (-160 - 9\alpha^8\Omega^4 + 64\alpha^2\Omega^4 - 22\alpha^6\Omega^2 + \\ & + 24\alpha^2\Omega^2 + 16\alpha^8\Omega^6 + 192\Omega^2 + 48\alpha^4\Omega^6 - 40\alpha^6\Omega^6 - \\ & - 8\alpha^4 + 80\alpha^6\Omega^4 + 60\alpha^4\Omega^4 - 56\alpha^4\Omega^2)\tilde{V}^4 + \\ & + (32\alpha^4\Omega^6 - 35\alpha^6\Omega^4 - 128\Omega^2 + 80 - 16\alpha^6\Omega^8 + \\ & + 44\alpha^4\Omega^2 - 80\alpha^4\Omega^4 + 34\alpha^6\Omega^6 + 9\alpha^8\Omega^8 - 7\alpha^8\Omega^6 - \\ & - 88\alpha^2\Omega^2 + 64\alpha^2\Omega^4)\tilde{V}^2 - 16 + 2\alpha^8\Omega^{10} + 32\Omega^2 + \\ & + 40\alpha^2\Omega^2 - 36\alpha^4\Omega^4 - 64\alpha^2\Omega^4 + 14\alpha^6\Omega^6 + \\ & + 48\alpha^4\Omega^6 - 16\alpha^6\Omega^8 - 2\alpha^8\Omega^8 = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение на плоскости параметров $(\tilde{\Omega}, \tilde{V})$ задает области с различным числом возбуждаемых волн (рис. 4).

Все возможные качественно различные случаи волнообразования при движении нагрузки вдоль струны, лежащей на упруго-инерционном основании, представлены в таблице (стрелками помечены направления распространения волн). Каждому из этих случаев соответствует своя область в пространстве параметров.

Если на струну, лежащую на упруго-инерционном основании, действует равномерно движущаяся нагрузка, величина которой постоянна, то, определяя из системы уравнений (17) при $\tilde{\Omega} = 0$

Качественно различные случаи волнообразования при движении нагрузки вдоль струны, лежащей на упруго-инерционном основании

	$\tilde{\Omega} = 0$	$0 < \tilde{\Omega} < \tilde{\omega}_3^*$	$\tilde{\omega}_3^* < \tilde{\Omega} < \tilde{\omega}_2^*$	$\tilde{\omega}_2^* < \tilde{\Omega} < \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$	$\frac{\sqrt{2}}{\alpha} < \tilde{\Omega} < \tilde{\omega}_1^*$	$\tilde{\Omega} > \tilde{\omega}_1^*$
$\tilde{V} = 0$	1 	4 	13 	18 	22 	
$0 < \tilde{V} < \tilde{V}_1^*$	2 	5 	8 	14 	19 	23
$\tilde{V}_1^* < \tilde{V} < \tilde{V}_2^*$			9 			
$\tilde{V}_2^* < \tilde{V} < \tilde{V}_3^*$			10 			
$\tilde{V}_3^* < \tilde{V} < 1$		6 	11 	15 	16 	20
$\tilde{V} > 1$	3 	7 	12 	17 	21 	24

частоты и волновые числа и отбирая только физические реализуемые решения, получим, что в зависимости от скорости движения нагрузки возможны два качественно различных режима волнообразования. Критическая скорость, разделяющая эти случаи, равна c ($\tilde{V} = 1$), т.е. совпадает со скоростью распространения волн в струне без учета упруго-инерционного основания.

У неподвижной нагрузки ($\tilde{V} = 0$) поле поперечных смещений локализовано около источника (случай 1 таблицы), т.е. спадает по мере удаления от него, а $\tilde{k}_{1,2}$ имеют вид $\tilde{k}_{1,2} = \pm i/\sqrt{2}$. При движении нагрузки со скоростью $0 < \tilde{V} < 1$ слева от нее ($x < Vt$):

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 &= i \left(\alpha^2 \tilde{V}^2 - 2(1 - \tilde{V}^2) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\alpha^4 \tilde{V}^4 + 4(1 - \tilde{V}^2)^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2 \tilde{V}^2 (1 - \tilde{V}^2))^{-1/2}, \\ \tilde{k}_{3,4} &= \pm \left(2(1 - \tilde{V}^2) - \alpha^2 \tilde{V}^2 + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\alpha^4 \tilde{V}^4 + 4(1 - \tilde{V}^2)^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2 \tilde{V}^2 (1 - \tilde{V}^2))^{-1/2}, \end{aligned} \quad (18)$$

а справа, при $x > Vt$,

$$\begin{aligned} \tilde{k}_2 &= -i \left(\alpha^2 \tilde{V}^2 - 2(1 - \tilde{V}^2) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\alpha^4 \tilde{V}^4 + 4(1 - \tilde{V}^2)^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2 \tilde{V}^2 (1 - \tilde{V}^2))^{-1/2}, \\ \tilde{\omega}_{1-4} &= \tilde{k}_{1-4} \tilde{V}. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда следует, что движение источника нулевой частоты приводит к возникновению, наряду с собственным полем, двух бегущих вслед волн (случай 2 таблицы).

Источник нулевой частоты, движущийся со скоростью $\tilde{V} > 1$, собственного поля не создает, но зато излучает четыре волны, бегущие ему вслед, волновые числа и частоты которых определяются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{1-4} &= \pm \left(\alpha^2 \tilde{V}^2 + 2(\tilde{V}^2 - 1) \pm \right. \\ &\pm \left. \sqrt{\alpha^4 \tilde{V}^4 + 4(\tilde{V}^2 - 1)^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2 \tilde{V}^2 (\tilde{V}^2 - 1))^{-1/2}, \\ \tilde{\omega}_{1-4} &= \tilde{k}_{1-4} \tilde{V}. \end{aligned} \quad (21)$$

Справа от нагрузки при $x > Vt$ направляющая остается невозмущенной (случай 3 таблицы).

Таким образом, наличие инерционности в основании струны приводит к тому, что даже при "докритических" скоростях движения нагрузки ($0 < \tilde{V} < 1$) возникают бегущие волны. Однако для очень малых ($\Lambda \rightarrow 0$) длин волн $v_{gr} \rightarrow 0$.

При рассмотрении задачи кинематики излучения волн гармоническим источником колебаний частоты $\tilde{\Omega}$, движущимся равномерно со скоростью V относительно направляющей, количество критических скоростей и качественно различных случаев увеличивается. Когда безразмерные частота источника $0 < \tilde{\Omega} < \tilde{\omega}_3^*$ и скорость его движения $0 < \tilde{V} < \tilde{V}_3^*$ (случай 5 таблицы), либо когда частота источника $\tilde{\omega}_3^* < \tilde{\Omega} < \tilde{\omega}_2^*$, а скорость его движения $0 < \tilde{V} < \tilde{V}_1^*$ (случай 8 таблицы) или $\tilde{V}_2^* < \tilde{V} < \tilde{V}_3^*$ (случай 10 таблицы), движущийся источник создает локальное собственное поле, представляющее собой суперпозицию спадающих по экспоненте осцилляций, и возбуждает две волны, бегущие ему вслед. На рис. 4 этой ситуации соответствует область "1". При частоте $\tilde{\Omega} \in (\tilde{\omega}_2^*, \tilde{\omega}_1^*)$ и скорости движения $\tilde{V} \in (\tilde{V}_2^*, \tilde{V}_3^*)$ (область "2" на рис. 4, которая соответствует случаям 15 и 19 таблицы) собственное поле у источника сохраняется, а две волны, возбуждаемые позади источника, бегут в противоположных направлениях. Когда скорость движения источника превышает первую критическую (\tilde{V}_1^*), но меньше второй критической скорости (\tilde{V}_2^*), а частота его колебаний $\tilde{\omega}_3^* < \tilde{\Omega} < \tilde{\omega}_2^*$ (область "3" на рис. 4), он излучает одну волну с большей частотой перед собой и три волны позади, которые бегут в сторону движения источника, отводя от него энергию (случай 9 таблицы). Аналогичная ситуация возникает, если скорость источника больше третьей критической, но меньше c ($\tilde{V}_3^* < \tilde{V} < 1$), а его частота не превосходит критическую частоту $\tilde{\omega}_2^*$ (область "5" на рис. 4; случаи 6 и 11 таблицы). Если частота источника $\tilde{\omega}_2^* < \tilde{\Omega} < \sqrt{2}/\alpha$ и его скорость $0 < \tilde{V} < \tilde{V}_2^*$ (область "4" на рис. 4), либо, если его частота $\tilde{\Omega} \in (\tilde{\omega}_2^*, \tilde{\omega}_1^*)$ и скорость $\tilde{V}_3^* < \tilde{V} < 1$ (область "6" на рис. 4), то от предыдущего эти случаи отличаются тем, что одна из трех волн, возбуждаемых позади источника, низкочастотная, бежит в направлении $-x$ (случаи 14, 16 и 20 таблицы). С увеличением частоты источника $\tilde{\Omega} > \tilde{\omega}_1^*$ при $0 < \tilde{V} < 1$ (область "7" на рис. 4) уже две из трех волн бегут в направлении $-x$ (случай 23 таблицы). При движении источника со скоростью, превышающей предельно допустимую скорость распространения волн c ($\tilde{V} > 1$), все четыре волны распространяются слева от источника в области $x < Vt$, а справа направляющая остается невозму-

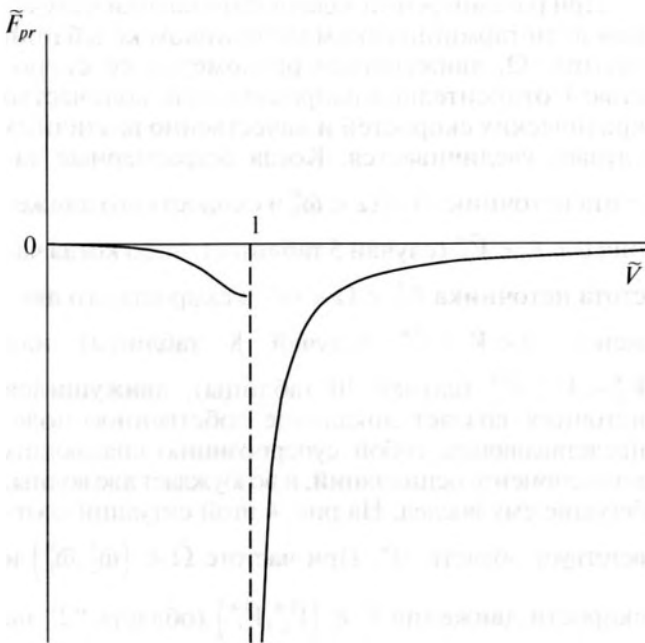


Рис. 5. Зависимость силы давления волн от скорости движения нагрузки.

щенной. Причем, если $0 \leq \tilde{\Omega} < \tilde{\omega}_2^*$ (область "8" на рис. 4), то все четыре волны бегут вслед за источником (случаи 3, 7 и 12 таблицы). Если $\tilde{\omega}_2^* < \tilde{\Omega} < \tilde{\omega}_1^*$ (область "9" на рис. 4), то одна из них бежит в противоположном направлении (случаи 17 и 19 таблицы), при $\tilde{\Omega} > \tilde{\omega}_1^*$ (область "10" на рис. 4) уже две бегут в отрицательном направлении оси x (случай 24 таблицы).

Как видно из последовательности построения решения всей задачи о вынужденных колебаниях, для кинематики волн не важен вид движущейся нагрузки. Важными характеристиками являются лишь частота и скорость ее движения. Это выгодно разделяет задачу кинематики — определение частот и волновых чисел — и задачу динамики — определение амплитуд колебаний и сил в движущемся контакте.

Следует отметить, что решение задачи кинематики определяет лишь необходимые условия излучения волн, но не достаточные. Так, может оказаться, что амплитуды прогнозируемых волн будут равны нулю.

Подставляя решения (8), (18)–(21) в соотношения, получаемые после приведения (3)–(5) относительно одной неизвестной функции u_i , будем иметь систему алгебраических уравнений, из которой находятся амплитуды излучаемых волн в докритическом

$$A_1 = \frac{P(1 + (1 - \tilde{V}^2)\tilde{k}_3^2)}{2ic\sqrt{\rho_0 S \gamma}(1 - \tilde{V}^2)^2 \tilde{k}_2(\tilde{k}_3^2 - \tilde{k}_2^2)}, \quad A_2 = A_1$$

и закритическом случаях

$$A_3 = \frac{P(1 + (1 - \tilde{V}^2)\tilde{k}_2^2)}{2ic\sqrt{\rho_0 S \gamma}(1 - \tilde{V}^2)^2 \tilde{k}_3(\tilde{k}_3^2 - \tilde{k}_2^2)}, \quad A_4 = -A_3.$$

Вычисляя силу давления волн по формуле

$$F_{pr} = -[T - \dot{\ell} p], \text{ получим}$$

$$F_{pr} = \begin{cases} \frac{-P^2 \alpha^2 \tilde{V}^2 / (\rho_0 S c^2 \sqrt{\alpha^4 \tilde{V}^4 + 4(1 - \tilde{V}^2)})}{2(\alpha^2 \tilde{V}^2 + 2(1 - \tilde{V}^2) + \sqrt{\alpha^4 \tilde{V}^4 + 4(1 - \tilde{V}^2)})} & \text{при } \tilde{V} < 1, \\ \frac{-P^2}{4\rho_0 S c^2 (\tilde{V}^2 - 1)} & \text{при } \tilde{V} > 1. \end{cases}$$

В пренебрежении инерционностью основания для $\tilde{V} < 1$ имеем $F_{pr} \equiv 0$. В этом случае $\tilde{V} = 1$ является "резонансным" значением скорости, сопровождающейся неограниченным ростом F_{pr} . Начиная с него, в системе происходит излучение волны, бегущей вслед за нагрузкой, подобно эффекту Вавилова–Черенкова [13]. Наличие инерционности приводит всегда к отличной от нуля силе давления волн (рис. 5, $\tilde{F}_{pr} = F_{pr} \rho S c^2 / P^2$), причем при закритических скоростях ее значение не зависит от инерционных свойств основания.

Обратим внимание, что задачи, близкие по постановке к (2)–(6), используются при определении устойчивости движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека [14–16].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-08-01637).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клепиков С.Н. Расчет конструкций на упругом основании. Киев.: Будивэльник, 1967. 185 с.
2. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
3. Весницкий А.И. Избранные труды по механике. Н. Новгород: ИД "Наш дом", 2010. 248 с.
4. Huang H.H., Sun C.T., Huang G.L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials // Int. J. Engineering Science. 2009. V. 47. P. 610–617.
5. Буров В.А., Волошинов В.Г., Дмитриев К.В., Поликарпова Н.В. Акустические волны в метаматериалах, кристаллах и структурах с аномальным преломлением // УФН. 2011. Т. 181. № 11. С. 1205–1211.
6. Special issue on acoustic metamaterials // J. Acoust. Soc. Am. 2012. V. 132. № 4. Pt. 2. P. 2783–2945.

7. Acoustic metamaterials and phononic crystals / Ed. Deymier P.A. Berlin: Springer-Verlag, 2013. 378 p.
8. Acoustic metamaterials: negative refraction, imaging, lensing and cloaking / Eds. Craster R.V., Guenneau S. Dordrecht: Springer, 2013. 323 p.
9. Бобровницкий Ю.И. Эффективные параметры и энергия акустических метаматериалов и сред // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 2. С. 137–144.
10. Бобровницкий Ю.И. Модели и общие волновые свойства двумерных акустических метаматериалов и сред // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 3. С. 283–294.
11. Федотовский В.С. Поперечные волны в дисперсном метаматериале со сферическими включениями // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 3. С. 311–316.
12. Манделъштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 440 с.
13. Болотовский Б.М., Гинзбург В.Л. Эффект Вавилова–Черенкова и эффект Доплера при движении источников со скоростью больше скорости света в вакууме // УФН. 1972. Т. 106. № 4. С. 577–592.
14. Бутова С.В., Герасимов С.И., Ерофеев В.И. К проблеме устойчивости движения по направляющей ракетного трека // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 2013. № 3. С. 43–49.
15. Бутова С.В., Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г. Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015. № 1. С. 3–8.
16. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г., Каныгин И.И. Оценка резонансоопасных гармоник при колебаниях упругой направляющей с движущимся по ней двухопорным объектом // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77. № 4. С. 412–424.