АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2017, том 63, № 4, с. 339–348

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВ НЕОДНОРОДНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА ПРИ НАЛИЧИИ ЗАТУХАНИЯ

© 2017 г. А. О. Ватульян[a, b, *], В. О. Юров[a, **]

[a] Южный федеральный университет
344006 Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая 105

[b] Южный математический институт
362027 Владикавказ, ул. Маркуса 22

*e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

**e-mail: vitja.jurov@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.10.2016 г.

Исследованы дисперсионные соотношения неоднородного по толщине пьезоэлектрического слоя с затуханием. В рамках концепции комплексных модулей задача сведена к изучению матричного дифференциального уравнения первого порядка с комплексными коэффициентами. Аналитически и численно изучены некоторые закономерности строения дисперсионных соотношений. Осуществлен асимптотический анализ в низкочастотной области.

Ключевые слова: дисперсионные соотношения, асимптотический анализ, затухание, неоднородность, волновод.

DOI: 10.7868/S0320791917040153

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в различных устройствах широко используются изделия из пьезокерамических композитных материалов, состоящих из пьезокерамической основы и полимерного наполнителя [1]. Отличительными свойствами таких композитных материалов являются значительное затухание, низкая теплопроводность и высокие коэффициенты электромеханической связи. Особенно интересными являются задачи для волноводов, причем для моделирования распространения волн и затухания в протяженных структурах в настоящей работе использована концепция комплексных модулей [2], базирующаяся на обобщении модели стандартного вязкоупругого тела на пьезоматериалы с затуханием [3]. В рамках такого подхода исследованы волны в неоднородном пьезоэлектрическом волноводе при наличии затухания, обусловленного комплексной структурой физических характеристик.

Среди работ, выполненных в последние годы по исследованию структуры волновых процессов для вязкоупругих волноводов, отметим [4], где анализ осуществлен на основе явного вида дисперсионного соотношения для полосы [5, 6], причем вязкоупругие свойства моделируются с помощью операторов Ю.Н. Работнова [7].

Отметим, что исследование дисперсионных свойств однородных пьезоэлектрических волноводов осуществлено в работе [8]. Для волноводов с постоянными физическими свойствами также эффективным является использование формализма Стро, в рамках которого может быть построено явное представление дисперсионного уравнения (см., например, [9]). Наличие переменных свойств значительно осложняет исследование дисперсионных свойств, поскольку невозможно получение явного вида дисперсионного уравнения. Особенности строения дисперсионного множества в случае неоднородного волновода изучены в гораздо меньшей степени и опираются как на теорию спектральных пучков, так и на численные и асимптотические методы [10, 11].

Отметим некоторые из работ, посвященных исследуемой проблеме для волноводов. В работе [12] рассмотрены дисперсионные волновые процессы в симметричной трехслойной пластине, где каждый слой является однородным и изотропным, получены коротковолновые асимптотики, представлен численный и асимптотический анализ дисперсионного соотношения.

В работе [13] исследовано распространение упругих волн в волноводе, состоящем из массива периодически повторяющихся пьезоэлектрических пластин с произвольным поперечным сечением. Использована полуаналитическая конечноэлементная постановка, позволяющая исследовать распространение волн в неоднородных волноводах с периодической структурой.

Работа [14] посвящена исследованию распространения волн в слоистом пьезоэлектрическом прямоугольном брусе. С помощью метода ортогональных многочленов задача о распространении волн в двумерной пьезоструктуре сведена к одномерной; представлены результаты для материалов BSN и PZT-4.

В [15] исследованы дисперсионные свойства волн Лэмба в поперечно-изотропных пьезоэлектрических пластинах. Исследование проведено для двух видов граничных условий: закороченные и свободные от электродов лицевые поверхности, в обоих случаях свободные от напряжений. Получены длинноволновые и коротковолновые асимптотики, представлены результаты расчетов фазовых скоростей и частот в зависимости от волнового числа.

В работе [16] изучено распространение волн в слоистой пластине, находящейся на упругой основе и состоящей из пьезоэлектрической пленки и электродов. Проанализировано влияние отношения массы электродов к массе пьезопленки на вещественные и мнимые компоненты дисперсионных соотношений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим волны в неоднородном по толщине бесконечном пьезоэлектрическом слое толщины h, где $x_3/h = x \in [0,1]$. Предположим, что $u_1(x_1,x_3)$, $u_3(x_1,x_3)$, $u_2 \equiv 0$, $\varphi = \varphi(x_1,x_3)$, $E_i = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, $i = 1,3$. Уравнения движения в акустическом приближении имеют вид [1]

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} = \rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} = 0, \tag{1}$$

а определяющие соотношения в среде без затухания представимы в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{33} - e_{31}E_3,\\ \sigma_{22} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{33} - e_{31}E_3,\\ \sigma_{33} = C_{13}\varepsilon_{11} + C_{33}\varepsilon_{33} - e_{33}E_3,\\ \sigma_{13} = 2C_{44}\varepsilon_{13} - e_{15}E_1, \quad D_1 = Э_{11}E_1 + 2e_{15}\varepsilon_{13},\\ D_3 = Э_{33}E_3 + e_{31}\varepsilon_{11} + e_{33}\varepsilon_{33}.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь использованы обозначения: φ – электрический потенциал, D_i – компоненты вектора электрической индукции, E_i – компоненты вектора напряженности электрического поля, C_{ij} – модули упругости, измеренные при постоянном электрическом поле, e_{ij} – пьезоэлектрические постоянные, $Э_{ii}$ – диэлектрические проницаемости при постоянных деформациях.

Будем считать, что границы слоя свободны от нагрузок, электродированы и закорочены:

$$\begin{gathered}\sigma_{13}(x_1,0) = \sigma_{13}(x_1,h) = \sigma_{33}(x_1,0) =\\ = \sigma_{33}(x_1,h) = \varphi(x_1,0) = \varphi(x_1,h) = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Отметим, что при наличии затухания определяющие соотношения (2) изменяются и моделируются операторными соотношениями типа операторов линейной вязкоупругости в дифференциальной или интегральной форме; при этом наиболее часто используется модель стандартного вязкоупругого тела [3].

Решение задачи разыскивается в виде бегущей волны, что означает изменение всех функций по закону $f = f_0\exp(i(kx_1 - \omega t))$.

Для записи уравнений в безразмерном виде введем следующие параметры и функции: $\kappa^2 = \rho\omega^2h^2/\mu_0$, $\gamma = kh$, $u_1 = -ihX_1$, $u_3 = hX_2$, $\sigma_{13} = -i\mu_0X_3$, $\sigma_{33} = \mu_0X_4$, $C_{ij} = \mu_0c_{ij}$, $e_{ij} = e_0\tilde{e}_{ij}$, $\varphi = \varphi_0X_5$, $Э_{ii} = Э_0э_{ii}$, $D_3 = D_0X_6$; размерные множители введены как характерные значения порядков соответствующих величин: $\varphi_0e_0 = h\mu_0$, $e_0 = D_0 = 1$ Кл/м^2, $\mu_0 = 10^{10}$ Н/м^2, $Э_0 = 10^{-10}$ Ф/м и позволяют характеризовать неоднородности функциями порядка единицы.

После проведения процедуры обезразмеривания символ "тильда" далее опущен, сформулированная краевая задача сведена к исследованию канонического векторного операторного уравнения первого порядка (4) с граничными условиями (5):

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = (X_1\ X_2\ X_3\ X_4\ X_5\ X_6)^T, \tag{4}$$

$$\begin{gathered}X_3(0) = X_3(1) = X_4(0) =\\ = X_4(1) = X_5(0) = X_5(1) = 0,\end{gathered} \tag{5}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{00} - \kappa^2\mathbf{A}_{01} + \gamma\mathbf{A}_1 + \gamma^2\mathbf{A}_2. \tag{6}$$

В случае отсутствия затухания матрица (6) порождает квадратичный пучок по спектральным параметрам κ, γ и имеет следующие ненулевые безразмерные компоненты:

$$\mathbf{A}_0\colon\ a_{13}^0 = \frac{1}{c_{44}}, \quad a_{24}^0 = \frac{э_{33}}{e_{33}^2 + э_{33}c_{33}},$$

$$a_{26}^0 = \frac{e_{33}}{e_{33}^2 + э_{33}c_{33}}, \quad a_{54}^0 = a_{26}^0,$$

$$a_{56}^0 = -\frac{c_{33}}{e_{33}^2 + э_{33}c_{33}};$$

$$\mathbf{A}_{01}:\ a_{31}^{01}=1,\ a_{42}^{01}=1;$$

$$\mathbf{A}_{1}:\ a_{12}^{1}=1,\ a_{15}^{1}=\frac{e_{15}}{c_{44}},$$

$$a_{21}^{1}=-\frac{э_{33}c_{13}+e_{33}e_{31}}{e_{33}^{2}+э_{33}c_{33}},\ a_{34}^{1}=-a_{21}^{1},$$

$$a_{36}^{1}=\frac{e_{33}c_{13}-e_{31}c_{33}}{e_{33}^{2}+э_{33}c_{33}},$$

$$a_{43}^{1}=-1,\ a_{51}^{1}=-a_{36}^{1},\ a_{63}^{1}=-a_{15}^{1};$$

$$\mathbf{A}_{2}:\ a_{31}^{2}=c_{11}-\frac{э_{33}c_{13}^{2}+2c_{13}e_{33}e_{31}-c_{33}e_{31}^{2}}{e_{33}^{2}+э_{33}c_{33}},\qquad(7)$$

$$a_{65}^{2}=-\left(э_{11}+\frac{e_{15}^{2}}{c_{44}}\right).$$

Для учета затухания принимается концепция комплексных модулей [2], согласно которой необходимо заменить $c_{kj}(x)\to c_{kj}(x,i\kappa)$, $e_{kj}(x)\to e_{kj}(x,i\kappa)$, $э_{kk}(x)\to э_{kk}(x,i\kappa)$, где введены функции от параметра κ дробно-рациональной структуры:

$$c_{kj}(x,i\kappa)=\frac{N_{kj}(x)-in_{kj}(x)M_{kj}(x)\kappa}{1-in_{kj}(x)\kappa},\qquad(8)$$

что соответствует модели стандартного вязкоупругого тела с неоднородными свойствами, причем $N_{kj}(x)$ – аналог длительного модуля, $M_{kj}(x)$ – аналог мгновенного модуля и $n_{kj}(x)$ – безразмерное время релаксации – могут быть функциями поперечной координаты. В этом случае матрица $\mathbf{A}$ имеет вид $\mathbf{A}=\mathbf{A}_0(\kappa)-\kappa^2\mathbf{A}_{01}+\gamma\mathbf{A}_1(\kappa)+\gamma^2\mathbf{A}_2(\kappa)$ и характеризует спектральный пучок матриц: по γ – квадратичный, по κ – дробно-рациональный.

Изучим типичную функцию затухания $G(\kappa)=\dfrac{1-in\kappa M}{1-in\kappa}=\operatorname{Re}G(\kappa)+i\operatorname{Im}G(\kappa)$, которая отражает зависимость от частоты упругих и пьезоэлектрических характеристик, причем $\operatorname{Re}G(\kappa)=\left(1+n^2\kappa^2M\right)/\left(1+n^2\kappa^2\right)$, $\operatorname{Im}G(\kappa)=(n\kappa-n\kappa M)/\left(1+n^2\kappa^2\right)$, и имеет следующие свойства: $\lim\limits_{\kappa\to0}\operatorname{Im}G(\kappa)=0$, $\lim\limits_{\kappa\to\infty}\operatorname{Im}G(\kappa)=0$, $\lim\limits_{\kappa\to0}\operatorname{Re}G(\kappa)=1$, $\lim\limits_{\kappa\to\infty}\operatorname{Re}G(\kappa)=M$.

Поставим задачу исследования соотношений между γ и κ, при которых сформулированная краевая задача (4), (5) имеет нетривиальное решение. Эти соотношения образуют дисперсионное множество задачи. В случае отсутствия затухания структура этого множества достаточно подробно изучена в упругом случае [5, 10] и для пьезоэлектрического волновода [8].

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО МНОЖЕСТВА

Для численного отыскания дисперсионного множества при любой частотной зависимости и любом (даже кусочно-разрывном) виде неоднородности представлен способ исследования краевой задачи (4), (5). Он заключается в разделении вещественной и мнимой частей в системе дифференциальных уравнений (4), после чего система удвоенной размерности решается методом пристрелки путем сведения решения исходной краевой задачи к решению набора задач Коши. Известно, что система имеет нетривиальные решения при однородных граничных условиях в случае, когда определитель пристрелочной системы обращается в нуль, а нули определителя, определяющие точки дисперсионного множества, найдены с использованием метода продолжения по параметру κ.

Для исследования структуры дисперсионных множеств введем несколько следующих функций, характеризующих неоднородность для упругих характеристик:

$$f_1(x)=1,$$
$$f_2(x)=3\left(1+x^2\right)/4,$$
$$f_3(x)=\begin{cases}0.8, & 0\le x<0.2,\\ 1.3, & 0.2\le x<0.4,\\ 0.8, & 0.4\le x<0.6,\\ 1.3, & 0.6\le x<0.8,\\ 0.8, & 0.8\le x\le1,\end{cases}\qquad(9)$$
$$f_4(x)=\begin{cases}1.2, & 0\le x<0.2,\\ 0.7, & 0.2\le x<0.4,\\ 1.2, & 0.4\le x<0.6,\\ 0.7, & 0.6\le x<0.8,\\ 1.2, & 0.8\le x\le1,\end{cases}$$

и функции, моделирующие различные виды неоднородности для пьезоэлектрических характеристик:

$$g_1(x)=1,\ g_2(x)=3\left(1+x^2\right)/4,$$
$$g_3(x)=3\left(2-x^2\right)/5.\qquad(10)$$

Для сокращения записи далее введем оператор интегрирования по отрезку: $T(h(x))=\int_0^1 h(x)\,dx$. Отметим, что все введенные функции в (9), (10) обладают следующим свойством: $T(f_j(x))=T(g_k(x))=1$, $j=1,2,3,4$, $k=1,2,3$.

Будем считать, что свойства пьезослоя моделируются следующим образом: $c_{ij}(x,\kappa)=c_{ij}f_k(x)G(\kappa)$, $e_{ij}(x,\kappa)=e_{ij}g_m(x)G(\kappa)$, $э_{jj}(x,\kappa)=э_{jj}g_m(x)G(\kappa)$, где $n=0.1$, $M=1.5$. За-

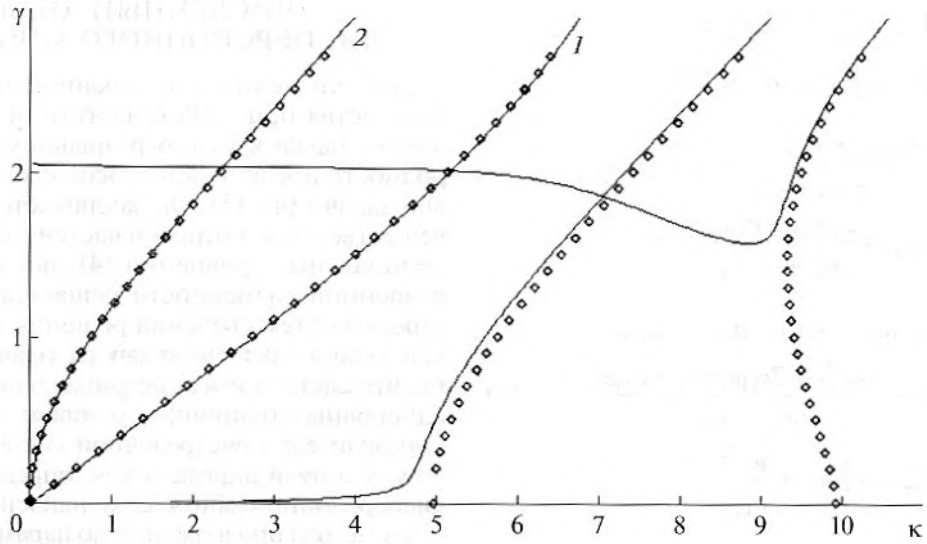

Рис. 1. Дисперсионное множество задачи без затухания – ◇, вещественная часть дисперсионного множества с затуханием – сплошная линия. *1* – мода 1, *2* – мода 2.

метим, что затухание отсутствует, когда $n = 0$ или $M = 1$ ($G(\kappa) = 1$ – предельный случай).

Отметим некоторые общие закономерности строения дисперсионного множества.

1. Точка $\kappa = 0$, $\gamma = 0$ всегда принадлежит дисперсионному множеству. В этом случае задача (4), (5) имеет следующие нетривиальные решения: $\mathbf{X} = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$, $\mathbf{X} = (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$. Первое решение отвечает поступательному перемещению вдоль оси x_1, второе – поступательному перемещению вдоль x_3.

2. $\gamma = 0$, $\kappa \neq 0$ (стоячие волны). Отметим, что задача без затухания ($n = 0$) в этом случае имеет вещественный спектр, который характеризует толщинные резонансы волновода; в силу аналитической природы дисперсионного множества [10] из этих точек выходят ветви дисперсионного множества, которые пересекают ось к под прямым углом, имеются участки нормальной и аномальной дисперсии.

3. $\kappa = 0$, $\gamma \neq 0$ (статический случай). В этом случае матрица (6) вещественна и спектральная задача имеет набор комплексных собственных значений следующей структуры: $\gamma_k = \pm\eta_k \pm i\xi_k$.

На рис. 1 представлены результаты расчета компонент дисперсионного множества в идеальной среде (без затухания, $M = 1$) и в задаче с затуханием ($M = 1.5$) для безразмерных параметров $c_{11} = 11.22$, $c_{13} = 6.22$, $c_{33} = 10.6$, $c_{44} = 2.49$, $e_{31} = -3.4$, $e_{33} = 15.1$, $e_{31} = 9.45$, $\text{э}_{11} = 72.57$, $\text{э}_{33} = 82.74$ (соответствует материалу ЦТС-19 [1]).

Расчеты показали, что при наличии затухания пропадают точки толщинных резонансов, характерные для идеальных волноводов. Дисперсионные кривые с аномальной дисперсией при $M = 1.5$ кардинально меняют структуру и берут начало из точки на комплексной плоскости ($\kappa = 0$).

ДЛИННОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА

Исследуем структуру дисперсионного множества в окрестности начала координат. Для этого разложим в ряд Тейлора компоненты матрицы (6):

$$a_{ij}(\kappa) = a_{ij0} + a_{ij1}\kappa + a_{ij2}\kappa^2 + \ldots,$$

а спектральные параметры будем искать в виде разложения по малому параметру δ: $\gamma = d_1\delta + d_2\delta^2 + d_3\delta^3 + \ldots$, $\kappa = p_1\delta + p_2\delta^2 + \ldots$, причем $p_1, p_2, \ldots \in \Re$.

Таким образом, имеем спектральную задачу вида $\mathbf{X}' = \mathbf{B}(\delta)\mathbf{X}$, где $\mathbf{B}(\delta) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1\delta + \mathbf{B}_2\delta^2 + \ldots$ с граничными условиями (5). Отметим, что матрица $\mathbf{B}_0$ имеет вещественные компоненты. Осуществим разложение компонент вектора $\mathbf{X}$ по параметру δ $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1\delta + \mathbf{X}_2\delta^2 + \ldots$ и сформулируем операторные задачи при одинаковых степенях δ:

$$\mathbf{X}_0' = \mathbf{B}_0\mathbf{X}_0,\ \mathbf{X}_1' = \mathbf{B}_0\mathbf{X}_1 + \mathbf{F}_1,\ \mathbf{X}_2' = \mathbf{B}_0\mathbf{X}_2 + \mathbf{F}_2 \text{ и т.д.},$$

где $\mathbf{F}_1 = \mathbf{B}_1\mathbf{X}_0$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{B}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{X}_0$ и т.д. Здесь

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{130}(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{240}(x) & 0 & a_{260}(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{540}(x) & 0 & a_{560}(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & d_1 & p_1 a_{131}(x) & 0 & d_1 a_{150}(x) & 0 \\ d_1 a_{210}(x) & 0 & 0 & p_1 a_{241}(x) & 0 & p_1 a_{261}(x) \\ 0 & 0 & 0 & d_1 a_{340}(x) & 0 & d_1 a_{360}(x) \\ 0 & 0 & -d_1 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 a_{510}(x) & 0 & 0 & p_1 a_{541}(x) & 0 & p_1 a_{561}(x) \\ 0 & 0 & d_1 a_{630}(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & d_2 & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 \\ d_1 p_1 a_{211}(x) + d_2 a_{210}(x) & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} \\ d_1^2 a_{310}(x) - p_1^2 & 0 & 0 & b_{34} & 0 & b_{36} \\ 0 & -p_1^2 & b_{43} & 0 & 0 & 0 \\ d_1 p_1 a_{511}(x) + d_2 a_{510}(x) & 0 & 0 & b_{54} & 0 & b_{56} \\ 0 & 0 & b_{63} & 0 & b_{65} & 0 \end{pmatrix},$$

b_{jk} – ненулевые элементы, которые не понадобятся для вычисления $\mathbf{F}_2$; задачи при третьей и четвертой степенях δ решены без приведения соответствующих матриц и векторов $\mathbf{F}_3$ и $\mathbf{F}_4$, при этом выполнены следующие граничные условия:

$$X_3^k(0) = X_3^k(1) = X_4^k(0) = \\ = X_4^k(1) = X_5^k(0) = X_5^k(1) = 0. \tag{11}$$

Решение однородной задачи нулевого приближения, как указано выше, имеет два собственных вектора – $\mathbf{X} = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$, $\mathbf{X} = (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$, а остальные задачи являются неоднородными, имеют вид $\mathbf{X}_k' = \mathbf{B}_0\mathbf{X}_k + \mathbf{F}_k$, причем правые части $\mathbf{F}_k$ выражаются через векторы, найденные на предыдущих этапах. Известно, что такие неоднородные задачи разрешимы лишь при некоторых ограничениях на правые части. Изучим неоднородную задачу и найдем условие разрешимости. Для скалярных операторов второго порядка имеется вполне определенная процедура нахождения такого условия [17], а для рассматриваемой векторной задачи осуществим следующие построения. Умножим скалярно неоднородное уравнение k-го приближения на пробный вектор $\mathbf{Y}$ и проинтегрируем по отрезку $[0,1]$, а затем в левой части осуществим интегрирование по частям:

$$(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y})\big|_0^1 - \int_0^1 (\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}')\,dx = \\ = \int_0^1 \left(\mathbf{X}_k, \mathbf{B}_0^T\mathbf{Y}\right)dx + \int_0^1 (\mathbf{F}_k, \mathbf{Y})\,dx.$$

Потребуем, чтобы $Y_1(0) = Y_1(1) = Y_2(0) = Y_2(1) = Y_6(0) = Y_6(1) = 0$, тогда слагаемое $(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y})\big|_0^1$ обратится в ноль. Также потребуем, чтобы вектор $\mathbf{Y}$ являлся решением сопряженного уравнения $-\mathbf{Y}' = \mathbf{B}_0^T\mathbf{Y}$. Нетрудно показать, что такой задаче удовлетворяют два вектора: $\mathbf{Y}_1 = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)^T$, $\mathbf{Y}_2 = (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)^T$. На основе изложенного можно заключить, что условие разрешимости неоднородной задачи состоит в выполнении условия ортогональности $\int_0^1 (\mathbf{F}_k, \mathbf{Y})\,dx = 0$.

Определим скалярное произведение вектор-функций: $(\mathbf{a}, \mathbf{b})^* = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^6 a_k(x) b_k(x)\right)dx$. Дальнейшее рассмотрение задач проведем раздельно.

Случай 1. Пусть $\mathbf{X}_0 = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$, тогда в задаче $\mathbf{X}_1' = \mathbf{B}_0\mathbf{X}_1 + \mathbf{F}_1$ условие $(\mathbf{F}_1, \mathbf{Y}_1)^* = (\mathbf{F}_1, \mathbf{Y}_2)^* = 0$ выполняется тождественно. Решим систему перво-

го приближения и определим компоненты вектора $\mathbf{X}_1$ в следующем виде:

$$\mathbf{X}_1 = (1\ X_{21}(x)\ 0\ 0\ X_{51}(x)\ d_1 l)^T,$$

где

$$l = -T(a_{510}(x))(T(a_{560}(x)))^{-1}.$$

Перейдем к рассмотрению задачи второго приближения $\mathbf{X}_2' = \mathbf{B}_0\mathbf{X}_2 + \mathbf{F}_2$. Условие $(\mathbf{F}_2, \mathbf{Y}_1)^* = 0$ приобретает вид $d_1^2 a_{310}(x) + d_1^2 l a_{360}(x) - p_1^2 = 0$, а условие $(\mathbf{F}_2, \mathbf{Y}_2)^* = 0$ выполняется тождественно. Отсюда получаем соотношение для коэффициента $d_1 = \pm p_1 (T(a_{310}(x) + l a_{360}(x)))^{-2}$, определяющего наклон вещественной части дисперсионной кривой. Далее находим, что $X_{42} = 0$, $X_{62} = \mathrm{const}$.

Из граничных условий (11) для $\mathbf{X}_2$ используем $X_{52}(0) = 0$, $X_{52}(1) = 0$ и определим

$$X_{62} = -(d_1 p_1 l T(a_{561}(x)) + d_1 T(a_{510}(x)) + \\ + d_1 p_1 T(a_{511}(x)) + d_2 T(a_{510}(x)))(T(a_{560}(x)))^{-1}.$$

Остальная часть решения может быть найдена, однако далее не будет использоваться.

В задаче при δ^3 используем лишь третье уравнение:

$$X_{33}' = d_1 a_{360}(x) X_{62} + d_1^2 a_{310}(x) + d_1^2 p_1 a_{311}(x) + \\ + 2 d_1 d_2 a_{310}(x) + d_1^2 p_1 l a_{361}(x) + d_1 d_2 l a_{360}(x) - \\ - p_1^2 - 2 p_1 p_2.$$

Решая это уравнение и удовлетворяя граничным условиям $X_{33}(0) = 0$, $X_{33}(1) = 0$, можно найти $\mathrm{Im}(d_2)$, $\mathrm{Re}(d_2)$ и p_2. Так, например,

$$\frac{1}{p_1}\mathrm{Im}(d_2) = d_1 \frac{2lT(\mathrm{Im}(a_{511}(x))) + l^2 T(\mathrm{Im}(a_{561}(x))) - T(\mathrm{Im}(a_{311}(x)))}{2lT(a_{360}(x)) + 2T(a_{310}(x))}.$$

Случай 2. Перейдем к решению задачи первого приближения $\mathbf{X}_1' = \mathbf{B}_0\mathbf{X}_1 + \mathbf{F}_1$ при $\mathbf{X}_0 = (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$. Условие $(\mathbf{F}_1, \mathbf{Y}_1)^* = (\mathbf{F}_1, \mathbf{Y}_2)^* = 0$ выполняется тождественно. Решая систему, получим, что $\mathbf{X}_1 = (d_1 x + c_1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$. Далее из условия $(\mathbf{F}_2, \mathbf{Y}_2)^* = 0$ получим, что $p_1 = 0$.

$\mathbf{X}_2$ имеет компоненты: $X_{12} = (d_1 + d_2)x + c_2$, X_{22}, $X_{32} = 0$, $X_{42} = 0$, X_{52}, $X_{62} = -d_1(d_1 T(a_{510}(x)x) + c_1 T(a_{510}(x)))/(T(a_{560}(x)))$.

На следующем этапе вычислим $X_{33}(x) = -d_1^3\left((l_4 + l_3 l)\int_0^x a_{360}(t)\,dt - \int_0^x (t - l_3) a_{310}(t)\,dt\right)$, где $l_3 = (l_2 T(a_{510}(x)x) - T(a_{310}(x)x))/(l_2 T(a_{510}(x)) - T(a_{310}(x)))$, $l_4 = T(a_{510}(x)x)/T(a_{560}(x))$.

В задаче четвертого приближения $\mathbf{X}_4' = \mathbf{B}_0\mathbf{X}_4 + \mathbf{F}_4$ условие разрешимости $(\mathbf{F}_4, \mathbf{Y}_2)^* = 0$ приводит к соотношению $p_2^2 + d_1 T(X_{33}(x)) = 0$, что позволяет найти $d_1^4/p_2^2 = ((l_4 + l_3 l)T((1-x)a_{360}(x)) - T((x - l_3)(1-x)a_{310}(x)))^{-1}$.

Используя квадратичное приближение из первого случая и задав определенные значения параметров, построим графики вещественной и мнимой частей моды 1 (см. рис. 1) дисперсионного множества, полученные с помощью асимптотического подхода и на основе численного расчета, и сравним их для определения области применимости асимптотического решения (рис. 2). Видно, что вещественная часть является линейной в окрестности начала координат, а мнимая – квадратичной. Отметим, что расхождение не превышает 1% в области $\kappa \le 1$.

Таким образом, можно сделать вывод, что полученное асимптотическое решение с высокой точностью описывает вещественную часть в области $\kappa \le 5$ (расчеты проведены для неоднородности механических характеристик $f_2(x)$ и наличия затухания).

Представим результаты расчетов коэффициентов асимптотического разложения для всех введенных видов неоднородности:

Вид неоднородности	d_1/p_1	$\mathrm{Im}(d_2)/p_1$
f_1, g_1	0.3634	0.00909
f_1, g_2	0.3618	0.00899
f_1, g_3	0.3623	0.00901

Для сочетания неоднородностей (f_1, g_1), (f_2, g_1), (f_3, g_1), (f_4, g_1) получены одинаковые результаты для этих коэффициентов, что свидетельствует о том, что вид неоднородности механических характеристик (при равных средних) не влияет на асимптотические значения, а неоднородность пьезоэлектрических характеристик меняет величину γ в окрестности начала координат.

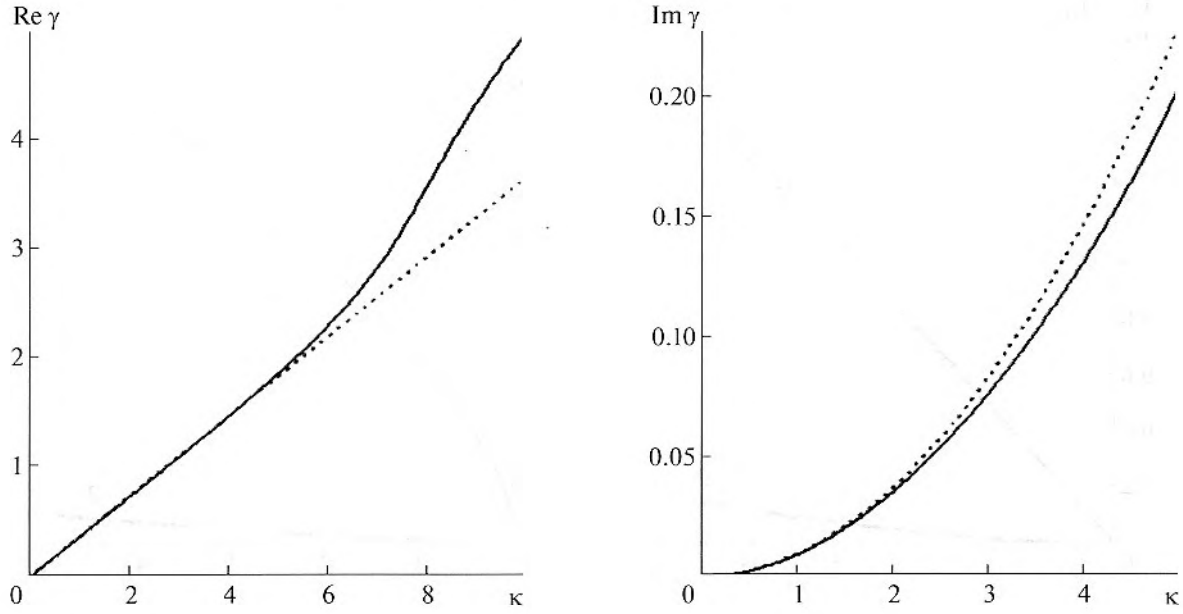

Рис. 2. Вещественная (слева) и мнимая (справа) части моды 1 (асимптотики – точки, численное решение – сплошная линия).

МЕТОД ГАЛЕРКИНА

Для построения прикладной теории, позволяющей дать приближенные оценки дисперсионного множества алгебраическими кривыми, использован метод Галеркина. Введем следующие координатные вектор-функции:

1. $\mathbf{\Phi}_1 = (x - 1/2, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{\Phi}_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{\Phi}_3 = (0, 0, x(x-1), 0, 0, 0)$, $\mathbf{\Phi}_4 = (0, 0, 0, x(x - 1/2)(x-1), 0, 0)$, $\mathbf{\Phi}_5 = (0, 0, 0, 0, x(x-1), 0)$, $\mathbf{\Phi}_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

2. $\mathbf{\Phi}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{\Phi}_2 = (0, x - 1/2, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{\Phi}_3 = (0, 0, x(x-1), 0, 0, 0)$, $\mathbf{\Phi}_4 = (0, 0, 0, x(x-1), 0, 0)$, $\mathbf{\Phi}_5 = (0, 0, 0, 0, x(x-1), 0)$, $\mathbf{\Phi}_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

Отметим, что описанные наборы 1, 2 удовлетворяют граничным условиям (5). Будем искать решение исходной спектральной задачи в виде линейной комбинации:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{6} c_k \mathbf{\Phi}_k.$$

Введем $\mathbf{\Psi}_1 = (x, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{\Psi}_2 = (0, x, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{\Psi}_3 = (0, 0, x, 0, 0, 0)$, $\mathbf{\Psi}_4 = (0, 0, 0, x, 0, 0)$, $\mathbf{\Psi}_5 = (0, 0, 0, 0, x, 0)$, $\mathbf{\Psi}_6 = (0, 0, 0, 0, 0, x)$ и невязку векторного уравнения $\mathbf{R} = \left(\sum_{k=1}^{6} c_k \left(\mathbf{\Phi}_k' - \mathbf{A}\mathbf{\Phi}_k\right)\right)$. Из условия ортогональности невязки набору вектор-функций $\mathbf{\Psi}_m$ получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\left(\sum_{k=1}^{6} c_k \mathbf{V}_{km}\right) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, 6,$$

$$\text{где } \mathbf{V}_{km} = \left(\mathbf{\Phi}_k' - \mathbf{A}\mathbf{\Phi}_k, \mathbf{\Psi}_m\right).$$

Уравнение $\det \mathbf{V}_{km} = 0$, полученное для наборов 1, 2, задает алгебраическое приближение искомых компонент дисперсионного множества.

Проведен вычислительный эксперимент, в котором осуществлено сравнение первых двух ветвей дисперсионного множества, построенных методом Галеркина, с численным решением, построенным с помощью метода пристрелки (рис. 3).

Нетрудно видеть, что этот подход дает достаточно хорошее приближение первых компонент дисперсионного множества алгебраическими кривыми, которые строятся единообразно для произвольных законов неоднородности. Успех такого подхода обусловлен специальным выбором координатных векторов, которые похожи на собственные формы. В то же время стремление приблизить и следующие ветви приводит к увеличению размерности в линейной комбинации, и вычислительные затраты становятся сравнимыми с прямым численным счетом.

На рис. 4, 5 в качестве примера представлены собственные формы задачи без затухания и неоднородности механических характеристик $f_2(x)$ на частоте $\kappa = 5$ для первой дисперсионной ветви.

Вычисление собственных форм с помощью метода пристрелки показало, что с ростом часто-

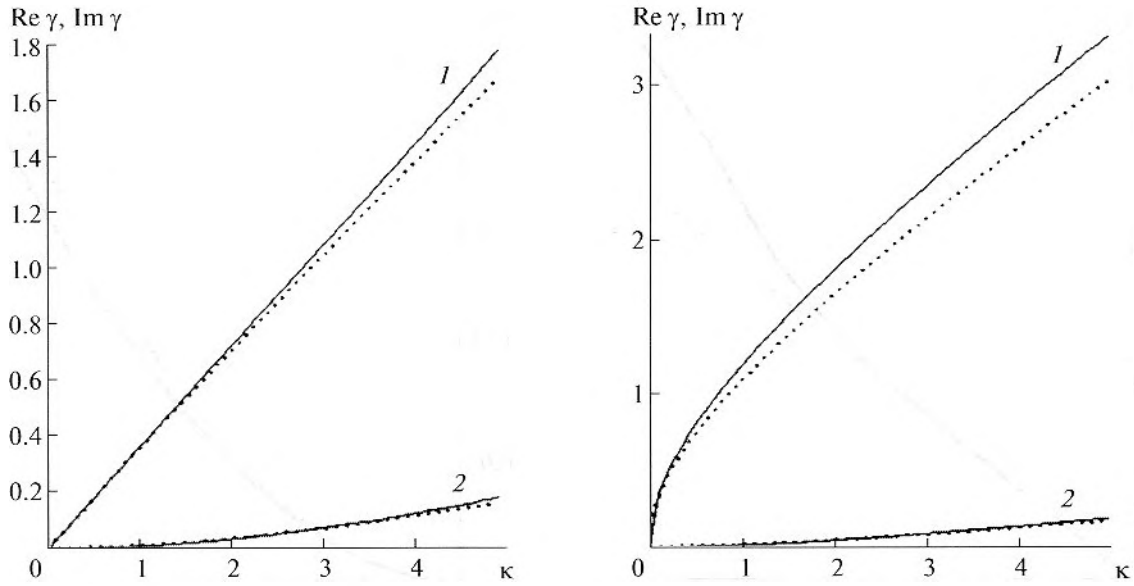

Рис. 3. Мода 1 (слева), мода 2 (справа). (Метод Галеркина – точки, метод пристрелки – сплошная линия, *1* – вещественная часть, *2* – мнимая часть).

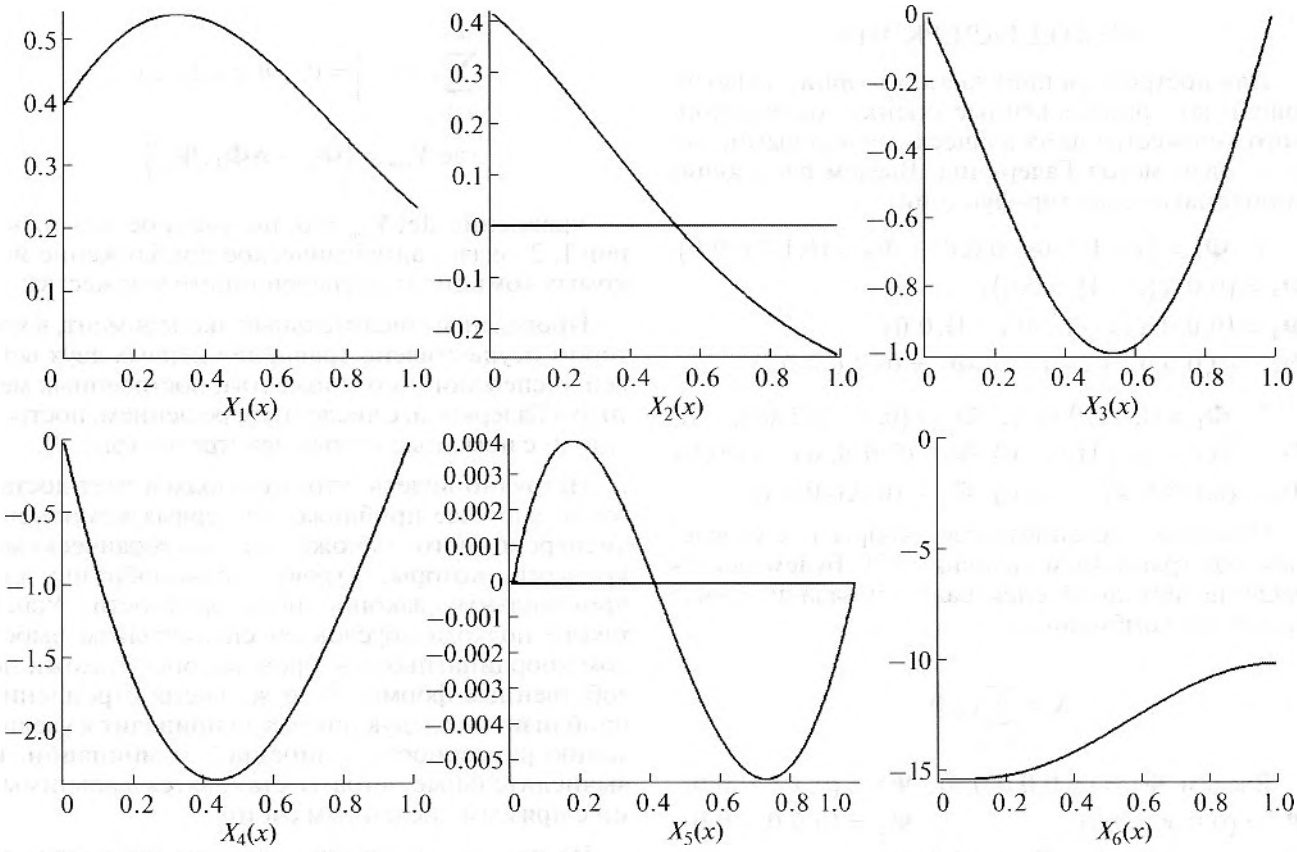

Рис. 4. Собственные формы моды 1 при к = 5.

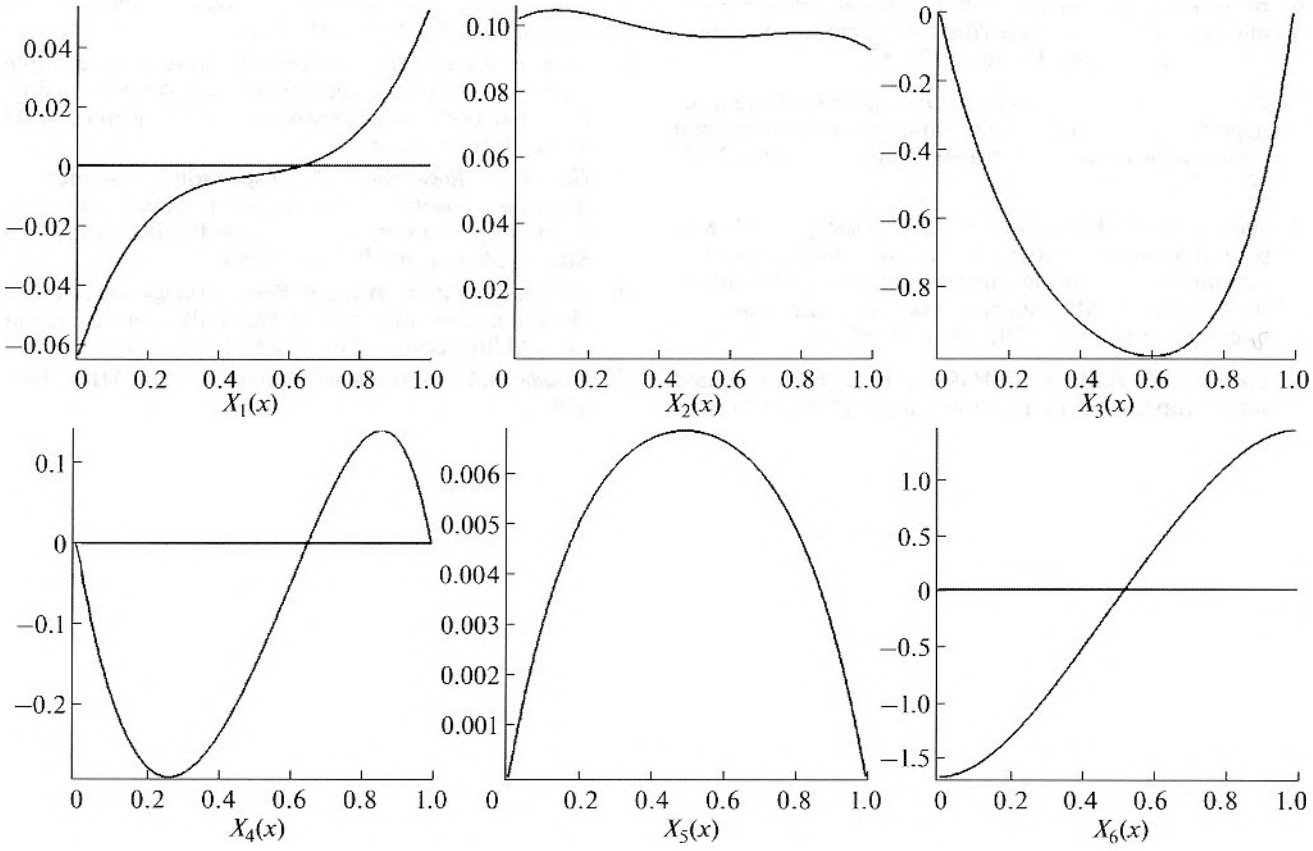

Рис. 5. Собственные формы моды 2 при $\kappa = 5$.

ты формы значительно меняют свою структуру и сильно отличаются от форм в низкочастотной области, где четко можно разделить продольную и изгибную моды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучены некоторые особенности строения дисперсионного множества задачи о распространении волн в неоднородном по толщине пьезослое с затуханием. Построено асимптотическое решение в низкочастотной области. На основе метода Галеркина составлен алгоритм аппроксимации ветвей дисперсионного множества алгебраическими кривыми, которая является достаточно точной в окрестности малых значений κ, γ. Построена область дисперсионного множества задачи на основе численных решений методом пристрелки. Реализован подход, позволяющий исследовать произвольные законы неоднородности (непрерывные, кусочно-постоянные).

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ (код проекта 16-01-00354) и при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МК-3179.2017.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
2. *Кристенсен Р.М.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
3. *Ржаницын А.Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 418 с.
4. *Анофрикова Н.С., Сергеева Н.В.* Исследование гармонических волн в наследственно-упругом слое // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. № 3. С. 321–328.
5. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
6. *Червинко О.П., Сенченков И.К.* Гармонические волны в слое и бесконечном цилиндре // Прикладная механика. 1986. Т. 22. № 12. С. 31–37.
7. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
8. *Мадорский В.В., Устинов Ю.А.* Построение системы однородных решений и анализ корней дисперсионных уравнений антисимметричных колебаний пьезоэлектрической плиты // ПМТФ. 1976. № 6. С. 138–145.
9. *Кузнецов С.В.* Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор) // Акуст. журн. 2014. № 1. С. 90–100.

10. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

11. *Ватульян А.О., Моргунова А.В.* Исследование дисперсионных свойств цилиндрических волноводов с переменными свойствами // Акуст. журн. 2015. № 3. С. 295–301.

12. *Лашаб М.И., Роджерсон Г.Э., Сэндифорд К.Д.* Коротковолновые асимптотики дисперсионных соотношений в случае симметричной трехслойной пластины // Математическое моделирование и численные методы. 2015. № 1. С. 50–66.

13. *Cortes D.H., Datta S.K., Mukdadi O.M.* Elastic guided wave propagation in a periodic array of multi-layered piezoelectric plates with finite cross-sections // Ultrasonics. 2010. V. 50. P. 347–356.

14. *Yu J.G., Zhang Ch., Lefebvre J.E.* Wave propagation in layered piezoelectric rectangular bar: An extended orthogonal polynomial approach // Ultrasonics. 2014. V. 54. P. 1677–1684.

15. *Guo F.L., Rogerson G.A.* Dispersion phenomena in transversely isotropic piezo-electric plates with either short or open circuit boundary conditions // Int. J. Sol. Struct. 2004. V. 41. P. 1539–1564.

16. *Zhu F., Qian Z.H., Wang B.* Wave propagation in piezoelectric layered structures of film bulk acoustic resonators // Ultrasonics. 2016. V. 67. P. 105–111.

17. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 454 с.