АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2017, том 63, № 4, с. 349–355

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

ОБОБЩЕНИЕ ОПТИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО МУЛЬТИПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ ПРОЗРАЧНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© 2017 г. Ю. А. Еремин*, А. Г. Свешников

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119991 ГСП-1, Москва, Ленинские горы

**e-mail: eremin@cs.msu.ru*

Поступила в редакцию 01.08.2016 г.

Оптическая теорема обобщается на случай возбуждения локальной неоднородности, внедренной в прозрачную подложку, мультиполем произвольного порядка. Показано, что для вычисления обобщенного сечения экстинкции достаточно вычислять производные от рассеянного поля в одной единственной точке, добавляя константу и определенный интеграл. Кроме общенаучного интереса, это обобщение дает возможность вычислять сечение поглощения посредством вычитания сечения рассеяния из сечения экстинкции. Последнее обстоятельство представляется важным, так как рассеянное поле в дальней зоне не содержит интегралов Зоммерфельда. Кроме того, сделанное обобщение позволяет тестировать компьютерные модули для случая рассмотрения неоднородности без потерь.

Ключевые слова: оптическая теорема, мультипольный источник произвольного порядка, неоднородность в полупространстве, интеграл Зоммерфельда.

DOI: 10.7868/S0320791917040049

ВВЕДЕНИЕ

Оптическая теорема (ОТ) является фундаментальным результатом математической теории дифракции волн. В случае возбуждения локального препятствия плоской волной сечение экстинкции пропорционально амплитуде рассеяния в направлении распространения плоской волны [1]. В российской научной литературе термин ОТ, по-видимому, впервые появился в монографии [2]. ОТ играет важную роль в оценке сечения поглощения для случая неоднородности с потерями посредством вычисления разности между сечением экстинкции и сечением рассеяния [3, 4]. ОТ широко известна не только в теории дифракции и распространения волн, но также в акустике, сейсмике, электромагнетизме и даже квантовой механике [5–9]. В вычислительной дифракции она используется для проверки компьютерного модуля для случая неоднородности без потерь путем сравнения сечений рассеяния и экстинкции [10].

Существует целый ряд обобщений ОТ в случае возбуждения акустических пучков [11], неэластичного рассеяния [12] и анизотропных и бианизотропных рассеивателей [13]. В ряде работ [14–18] ОТ была обобщена на случай дифракции плоской волны локальным препятствием в присутствии слоистой среды, включая возбуждение неизлучающими волнами. В [19, 20] было проведено обобщение ОТ на случай возбуждения точечным источником препятствия в свободном пространстве. В работе [21] ОТ впервые была обобщена на случай возбуждения рассеивателя точечным источником в присутствии полупространства. В работе авторов [22] ОТ была распространена на случай возбуждения проницаемого препятствия, расположенного внутри прозрачного полупространства, при возбуждении осесимметричным мультиполем (с азимутальным числом $m = 0$). В настоящей работе ОТ обобщается на случай возбуждения неоднородности, расположенной внутри проницаемой подложки мультиполем произвольного порядка ($m \neq 0$). Впервые установлено, что обобщенное сечение экстинкции можно привести к виду, не содержащему несобственных интегралов. Показано, что вычисление сечений рассеяния как в верхнем, так и нижнем полупространствах не требует использования интегралов Зоммерфельда.

ОПТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО МУЛЬТИПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ ПРОЗРАЧНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим математическую постановку скалярной задачи дифракции на локальной неоднородности D_i с гладкой поверхностью $\partial D_i \in C^{(2,\alpha)}$ поля мультипольного источника произвольного порядка, расположенного в точке M_0. Пусть все пространство $\Re^3$ разделено плоскостью Ξ $(z = 0)$ на два полупространства D_l с волновыми числами k_l, $l = 0, 1$, при этом D_0: $(z > 0)$, а D_1: $(z < 0)$. Будем полагать, что начало декартовой системы координат выбрано на плоскости Ξ, а источник располагается в верхнем полупространстве D_0, на оси $0z$ в точке $M_0 = (0, 0, z_0)$. Пусть неоднородность находится в нижнем полупространстве $D_i \subset D_1$. Тогда математическая постановка задачи может быть записана как

$$\Delta U_0 + k_0^2 U_0 = -J(M, M_0), \quad M, M_0 \in D_0; \tag{1а}$$

$$\Delta U_l + k_l^2 U_l = 0, \quad M \in D_l, \quad l = 1, i; \tag{1б}$$

$$\begin{gathered}[U(P)] = [\partial U(P)/\partial n] = 0, \quad P \in \partial D_i; \\ [U(Q)] = [\partial U(Q)/\partial z] = 0, \quad Q \in \Xi;\end{gathered} \tag{1в}$$

$$\lim_{r\to\infty} r \cdot \left(\frac{\partial U_l}{\partial r} + jk_l U_l\right) = 0, \quad \begin{matrix} l = 0, \ z > 0, \\ l = 1, \ z < 0, \end{matrix} \tag{1г}$$

$$\begin{gathered}\max\left\{\left|\frac{\partial U_l}{\partial r}\right|, |U_l|\right\} = O\left(\rho^{-\frac{1}{2}}\right), \\ \rho \to \infty, \ z = \pm 0, \ \rho^2 = x^2 + y^2.\end{gathered} \tag{1д}$$

Здесь $J(M, M_0)$ определяется порядком мультиполя, [.] означает скачок полей при переходе через поверхности, n – нормаль к поверхности рассеивателя ∂D_i. Отметим, что поставленные условия на бесконечности призваны обеспечивать единственность решения поставленной краевой задачи (1) [23]. Будем полагать, что рассеиватель может быть неоднородным, с непрерывными характеристиками среды внутри $k_i^2(M) \in C(D_i)$, мнимая часть которых – поглощение или прозрачность $\operatorname{Im} k_i^2(M) \le 0$, а поглощение в верхнем и нижнем полупространствах отсутствует $\operatorname{Im} k_l^2 = 0$, $l = 0, 1$, в соответствии с выбранной временной зависимостью $\exp(j\omega t)$.

Как известно [24], для сферических мультиполей справедливо следующее фундаментальное представление:

$$\begin{gathered} w_n^m(M, M_0) = h_n^{(2)}(k_0 r) P_n^m(\cos\theta) e^{-jm\varphi} = \\ = D_n^m h_0^{(2)}(k_0 R_{MM_0}), \end{gathered} \tag{2}$$

при этом дифференциальный оператор D_n^m имеет вид

$$D_n^m = (-1)^m j^n \left[\frac{j}{k_0}\left(\frac{\partial}{\partial x} - j\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^m P_n^{(m)}\left(\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{3}$$

здесь $h_n^{(2)}(x)$ – сферическая функция Ханкеля, $R_{MM_0} = |M - M_0|$, $P_n^{(m)}(\cos\theta) = \dfrac{d^m P_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}$, $P_n(\cos\theta)$ – полином Лежандра. Зафиксируем теперь произвольные целые значения n, m, $n \in \mathbb{N}$, $m \le n$. Учитывая, что фундаментальное решение уравнения Гельмгольца имеет вид $\Psi(M, M_0) = e^{-jk_0 R_{MM_0}} / 4\pi R_{MM_0}$ и $h_0^{(2)}(k_0 R_{MM_0}) = j\dfrac{4\pi}{k_0}\Psi(M, M_0)$, получим

$$\begin{gathered}\Delta h_0^{(2)}(k_0 R_{MM_0}) + k_0^2 h_0^{(2)}(k_0 R_{MM_0}) = \\ = -j\frac{4\pi}{k_0}\delta(M - M_0),\end{gathered}$$

здесь δ – дельта функция Дирака. В силу определения мультиполей (2) имеет место

$$\begin{gathered}\Delta w_n^m + k_0^2 w_n^m = \left(\Delta + k_0^2\right) D_n^m h_0^{(2)}(k_0 R_{MM_0}) = \\ = -j\frac{4\pi}{k_0} D_n^m \delta(M - M_0).\end{gathered} \tag{4}$$

Сравнивая (1а) и (4), легко видеть, что $J(M, M_0) = j\dfrac{4\pi}{k_0} D_n^m \delta(M - M_0)$.

Выберем сферу Σ_R радиуса R с центром в начале координат, содержащую точку источника M_0 и неоднородность D_i внутри себя. Обозначим круг, который сфера вырезает на плоскости Ξ, как C_R. Будем обозначать через D_R область пространства внутри сферы Σ_R. Она состоит из двух полушаров $D_R = D_R^+ \cup D_R^-$, каждый из которых ограничен поверхностями $\Sigma_R^+ \cup C_R$ и $\Sigma_R^- \cup C_R$. Применив в D_R^+

вторую формулу Грина к решению задачи (1) U_0 и U_0^*, имеем

$$\int\limits_{D_R^+} (\Delta U_0 U_0^* - \Delta U_0^* U_0) d\tau = \\ = \int\limits_{\Sigma_R^+ \cup C_R} \left\{ \frac{\partial U_0}{\partial n} U_0^* - \frac{\partial U_0^*}{\partial n} U_0 \right\} d\sigma. \quad (5)$$

Беря мнимые части от обеих частей (5), получим

$$\operatorname{Im} \int\limits_{D_R^+} J^*(P, M_0) U_0(P) d\tau_P = \\ = \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma_R^+} \frac{\partial U_0}{\partial n} U_0^* d\sigma - \operatorname{Im} \int\limits_{C_R} \frac{\partial U_0}{\partial z} U_0^* d\sigma. \quad (6)$$

Аналогично, применяя вторую формулу Грина к U_1 и U_1^* в D_R^-, имеем

$$\operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma_R^-} \frac{\partial U_1}{\partial r} U_1^* d\sigma + \operatorname{Im} \int\limits_{\partial D_i} \frac{\partial U_1}{\partial n} U_1^* d\sigma + \\ + \operatorname{Im} \int\limits_{C_R} \frac{\partial U_1}{\partial z} U_1^* d\sigma = 0. \quad (7)$$

Складывая (6) и (7) и учитывая при этом условия сопряжения для полей на плоскости Ξ, получим

$$\operatorname{Im} \int\limits_{D_R^+} J^*(P, M_0) U_0(P) d\tau_P = \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma_R^+} \frac{\partial U_0}{\partial n} U_0^* d\sigma + \\ + \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma_R^-} \frac{\partial U_1}{\partial r} U_1^* d\sigma + \operatorname{Im} \int\limits_{\partial D_i} \frac{\partial U_1}{\partial n} U_1^* d\sigma. \quad (8)$$

Применяя вторую формулу Грина к U_1 и U_1^* внутри неоднородности D_i, будем иметь

$$\operatorname{Im} \int\limits_{\partial D_i} \frac{\partial U_1}{\partial n} U_1^* d\sigma = \int\limits_{D_i} \operatorname{Im} k_i^2(P) |U_i(P)|^2 d\tau_P = \\ = -\int\limits_{D_i} \left| \operatorname{Im} k_i^2(P) \right| |U_i(P)|^2 d\tau_P. \quad (9)$$

Сравнивая (8) и (9), получаем

$$\operatorname{Im} \int\limits_{D_R^+} J^*(P, M_0) U_0(P) d\tau_P = \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma_R^+} \frac{\partial U_0}{\partial n} U_0^* d\sigma + \\ + \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma_R^-} \frac{\partial U_1}{\partial r} U_1^* d\sigma - \int\limits_{D_i} \left| \operatorname{Im} k_i^2(P) \right| |U_i(P)|^2 d\tau_P. \quad (10)$$

Введем в рассмотрение диаграммы направленности полей [25], включающих в себя излучение мультиполя:

$$U_l(M) = \frac{e^{-jk_l r}}{k_l r} F_l(\theta, \varphi) + o(r^{-1}), \\ l = 0,1, \quad r \to \infty, \quad z \neq 0.$$

Здесь $F_l(\theta, \varphi)$ – функции, заданные на единичных полусферах $\Omega^+ = \{0 \le \theta < \pi/2; 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ и $\Omega^- = \{\pi/2 < \theta \le \pi; 0 \le \varphi \le 2\pi\}$.

Покажем, что имеет место следующее соотношение:

$$\operatorname{Im} \lim_{R \to \infty} \int\limits_{\Sigma_R^\pm} \frac{\partial U_l}{\partial n} U_l^* d\sigma = -\frac{1}{k_l} \int\limits_{\Omega^\pm} |F_l|^2 d\omega, \quad l = 0,1. \quad (11)$$

Рассмотрим верхнее полупространство D_0. Выделим вблизи плоскости Ξ цилиндрическую поверхность Ξ_R^δ, радиуса R и высоты $0 < \delta \ll 1$. Гладко замкнем сверху эту поверхность полусферой $\Sigma_R^{+\delta}$. Запишем поток энергии через построенную суммарную поверхность как

$$\operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma_R^{+\delta}} \frac{\partial U_0}{\partial n} U_0^* d\sigma + \operatorname{Im} \int\limits_{\Xi_R^\delta} \frac{\partial U_0}{\partial n} U_0^* d\sigma = \\ = \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma_R^{+\delta}} \frac{\partial U_0}{\partial n} U_0^* d\sigma + \operatorname{Im} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\delta} \frac{\partial U_0}{\partial R} U_0^* R dR d\varphi.$$

Устремляя в последнем интеграле $R \to \infty$, используя неравенство Коши и асимптотическое условие, полученное на основе анализа полюсов функции Грина полупространства [23], $\max\left\{\left|\frac{\partial U_0}{\partial R}\right|, |U_0|\right\} = O\left(R^{-\frac{1}{2}}\right)$, $R \to \infty$, $z = +0$, легко видеть, что при $\delta \to 0$ $\operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta} \frac{\partial U_0}{\partial R} U_0^* R dR d\varphi = O(\delta)$. В итоге получаем

$$\lim_{R \to \infty} \lim_{\delta \to 0} \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma_R^{+\delta}} \frac{\partial U_0}{\partial n} U_0^* d\sigma = \lim_{R \to \infty} \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma_R^+} \frac{\partial U_0}{\partial n} U_0^* d\sigma.$$

Используя в последнем интеграле условия излучения Зоммерфельда и определение диаграммы направленности, получаем

$$\lim_{R \to \infty} \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma_R^+} \frac{\partial U_0}{\partial n} U_0^* d\sigma = \lim_{R \to \infty} \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma_R^+} \frac{\partial U_0}{\partial R} U_0^* d\sigma = \\ = -k_0 \lim_{R \to \infty} \int\limits_{\Sigma_R^+} |U_0|^2 d\sigma = -\frac{1}{k_0} \int\limits_{\Omega^+} |F_0|^2 d\omega.$$

Таким образом, установлена справедливость (11) для верхнего полупространства. Аналогично (11) устанавливается и для нижнего.

Поскольку (8) справедливо для всех значений R, то

$$-\operatorname{Im}\int\limits_{D_0} J^*(P,M_0)U_0(P)d\tau_P = \frac{1}{k_0}\int\limits_{\Omega^+}|F_0|^2 d\omega + \\ + \frac{1}{k_1}\int\limits_{\Omega^-}|F_1|^2 d\omega + \int\limits_{D_i}\left|\operatorname{Im} k_i^2(P)\right||U_i(P)|^2 d\tau_P. \quad (12)$$

Кстати, из последнего соотношения легко показать единственность решения граничной задачи (1).

Преобразуем интеграл в левой части последнего соотношения, используя свойства δ функции [26]:

$$\operatorname{Im}\int\limits_{D_0} J^*(P,M_0)U_0(P)d\tau_P = \\ = \operatorname{Im}\left\{\frac{4\pi}{k_0}\int\limits_{D^+}\left[D_n^{m*}\delta(P-M_0)\right]U_0(P)d\tau_P\right\} = \quad (13) \\ = \frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Im}\int\limits_{D^+}\left[\left(D_n^{m*}\right)^T U_0(P)\right]\delta(P-M_0)d\tau_P,$$

здесь

$$D_n^{m+} = \left(D_n^{m*}\right)^T = \\ = (-1)^m(-j)^{n+1}\left[\frac{j}{k_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^m P_n^{(m)}\left(\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Тогда (12) принимает вид

$$-\frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Im}\int\limits_{D_0}\left[\left(D_n^{m*}\right)^T U_0(P)\right]\delta(P-M_0)d\tau_P = \\ = \frac{1}{k_0}\int\limits_{\Omega^+}|F_0|^2 d\omega + \frac{1}{k_1}\int\limits_{\Omega^-}|F_1|^2 d\omega + \quad (14) \\ + \int\limits_{D_i}\left|\operatorname{Im} k_i^2(P)\right||U_i(P)|^2 d\tau_P.$$

Будем строить решение задачи дифракции (1), следуя [27]. А именно, полное поле разбивается на поле источника, удовлетворяющего условиям сопряжения на плоскости Ξ, и рассеянное поле U_0^s, которое также должно удовлетворять этим условиям. Следовательно, в данном случае поле в верхней полуплоскости может быть записано как $U_0(M) = U_0^s(M) + U_0^0(M)$, где U_0^0 – поле мультипольного источника, удовлетворяющего условиям сопряжения на плоскости Ξ. В этом случае фундаментальное решение $\Psi(M,M_0)$ заменяется функцией Грина полупространства, которая может быть представлена в виде интеграла Зоммерфельда [27]:

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\nu(\lambda,z,z_0)\lambda d\lambda, \quad (15)$$

где $J_0(.)$ – цилиндрическая функция Бесселя, $r^2 = \rho^2 + (z-z_0)^2$, а ν – спектральная функция, обеспечивающая выполнение условий сопряжения при $z = 0$ [28]. Она имеет следующий вид:

$$\nu(\lambda,z,z_0) = \\ = \begin{cases} \dfrac{\exp(-\eta_0|z-z_0|)}{\eta_0} + \dfrac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\times \\ \times\dfrac{\exp\{-\eta_0(z+z_0)\}}{\eta_0}, \quad z\ge 0 \qquad z_0>0, \\ \dfrac{2\eta_0}{\eta_0+\eta_1}\dfrac{\exp\{\eta_1 z-\eta_0 z_0\}}{\eta_0}, \quad z\le 0 \end{cases} \quad (16)$$

здесь $\eta_l^2 = \lambda^2 - k_l^2$, $l = 0,1$. Заметим, что первое слагаемое в (16) соответствует фундаментальному решению уравнения Гельмгольца в свободном пространстве $\Psi(M,M_0)$. Выделяя сингулярность, представим функцию Грина (15) в виде $G(M,M_0) = \Psi(M,M_0) + \tilde{G}(M,M_0)$, где $\tilde{G}$ – та часть функции Грина, которая не содержит особенностей вне плоскости Ξ. Тогда поле мультиполя, удовлетворяющее условиям сопряжения на Ξ, принимает вид

$$W_n^m(M,M_0) = \frac{1}{k_0}D_n^m\left\{\Psi(M,M_0)+\tilde{G}(M,M_0)\right\}$$

или

$$W_n^m(M,M_0) = w_n^m(M,M_0) + \\ + \frac{1}{k_0}\int\limits_0^\infty A(\lambda)D_n^m J_0(\lambda\rho)\frac{\exp\{-\eta_0(z+z_0)\}}{\eta_0}\lambda d\lambda. \quad (17)$$

Здесь для краткости введено обозначение $A(\lambda) = \dfrac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}$. Преобразуем интеграл в левой части (14) следующим образом:

$$\int\limits_{D_0} D_n^{m+}\left(U_0^s(P)+W_n^m(P,M_0)\right)\times \\ \times\delta(P-M_0)d\tau_P = \left\{D_n^{m+}U_0^s(M)\right\}_{M=M_0} + \quad (18) \\ + \int\limits_{D_0} D_n^{m+}W_n^m(P,M_0)\delta(P-M_0)d\tau_P.$$

Первое слагаемое существует при любых значениях n,m, так как $U_0^s(M)$ является аналитической функцией всюду в D_0 [25]. Как известно [22], интеграл $-\dfrac{4\pi}{k_0}\operatorname{Im}\int_{D_0}\left[D_n^{m+}w_n^m(P,M_0)\right]\delta(P-M_0)d\tau_P$ представ-

ляет собой полный поток энергии от мультиполя, расположенного в свободном пространстве, то есть

$$-\frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Im}\int\limits_{D_0}\left[D_n^{m+}w_n^m(P,M_0)\right]\times$$
$$\times\,\delta(P-M_0)d\tau_P=\frac{1}{k_0}\int\limits_{\Omega}\left|F_w\right|^2 d\omega,$$

где F_w – диаграмма излучения мультиполя, а Ω – единичная сфера. В силу определения (2), диаграмма имеет вид

$$F_w(\theta,\varphi)=(j)^{n+1}\exp\{-jk_0z_0\cos\theta\}\,P_n^m(\cos\theta)e^{-jm\varphi},$$

здесь $P_n^m(x)$ – присоединенный полином Лежандра [29]. Тогда

$$\int\limits_{\Omega}\left|F_w\right|^2 d\omega=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\left[P_n^m(\cos\theta)\right]^2\sin\theta d\theta=$$
$$=\frac{4\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Таким образом, получили

$$-\frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Im}\int\limits_{D_0}\left[D_n^{m+}w_n^m(P,M_0)\right]\delta(P-M_0)d\tau_P=$$
$$=\frac{4\pi}{k_0}\frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}. \tag{19}$$

Распишем интеграл в правой части (18) с учетом (17). Имеем

$$\int\limits_{D_0}D_n^{m+}W_n^m(P,M_0)\delta(P-M_0)d\tau_P=$$
$$=\int\limits_{D_0}D_n^{m+}w_n^m(P,M_0)\delta(P-M_0)d\tau_P+$$
$$+\int\limits_{D_0}\frac{1}{k_0}\int\limits_0^{\infty}A(\lambda)D_n^{m+}D_n^mJ_0(\lambda\rho)\times \tag{20}$$
$$\times\frac{\exp\{-\eta_0(z+z_0)\}}{\eta_0}\lambda d\lambda\delta(P-M_0)d\tau_P.$$

Используя соотношения $\left(\frac{\partial}{\partial x}\pm j\frac{\partial}{\partial y}\right)=e^{\pm j\varphi}\frac{\partial}{\partial\rho}$, легко получить, что

$$D_n^{m+}D_n^m=\frac{(-1)^m}{k_0^{2m}}\frac{\partial^{2m}}{\partial\rho^{2m}}\left[P_n^{(m)}\left(\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]^2.$$

Подставляя в (20), имеем

$$\int\limits_{D_0}\frac{1}{k_0}\int\limits_0^{\infty}A(\lambda)D_n^{m+}D_n^mJ_0(\lambda\rho)\times$$
$$\times\frac{\exp\{-\eta_0(z+z_0)\}}{\eta_0}\lambda d\lambda\delta(P-M_0)d\tau_P=$$
$$=\frac{1}{k_0}\int\limits_0^{\infty}A(\lambda)\left\{\frac{\partial^{2m}}{\partial\rho^{2m}}J_0(\lambda\rho)\right\}_{\rho=0}\times$$
$$\times P_n^{(m)2}\left(-\frac{j}{k_0}\eta_0\right)\frac{\exp\{-2\eta_0z_0\}}{\eta_0}\lambda d\lambda= \tag{21}$$
$$=\frac{(-1)^m(2m-1)!!}{(2m)!!}\int\limits_0^{\infty}\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\times$$
$$\times P_n^{(m)2}\left(-\frac{j}{k_0}\eta_0\right)\frac{\exp\{-2\eta_0z_0\}}{\eta_0}\lambda^{2m+1}d\lambda.$$

Собирая вместе полученные выражения (19), (21), получим, что

$$-\frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Im}\int\limits_{D_0}D_n^{m+}U_0(P)\delta(P-M_0)d\tau_P=$$
$$=\frac{4\pi}{k_0}\frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}-\frac{4\pi}{k_0}\frac{(-1)^m(2m-1)!!}{(2m)!!}\times$$
$$\times\operatorname{Im}\int\limits_0^{\infty}\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}P_n^{(m)2}\left(-\frac{j}{k_0}\eta_0\right)\times \tag{22}$$
$$\times\frac{\exp\{-2\eta_0z_0\}}{\eta_0}\lambda^{2m+1}d\lambda.$$

Рассмотрим подробнее интеграл в (22). Ясно, что при $\lambda>\max(k_0,k_1)$ $\operatorname{Im}\eta_{0,1}=0$. Основываясь на свойствах $P_n^{(m)}(jx)$ при $\operatorname{Im}x=0$ [29], в зависимости от конкретных значений n,m, имеет место: либо $\operatorname{Re}P_n^{(m)}(jx)=0$, либо $\operatorname{Im}P_n^{(m)}(jx)=0$. Следовательно, $\operatorname{Im}\left[P_n^{(m)}\left(-j\frac{\eta_0}{k_0}\right)\right]^2\equiv 0$ при $\forall n,m,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq m$ и $\lambda>\max(k_0,k_1)$. Таким образом, при $k_1>k_0$ получаем

$$\operatorname{Im}\int\limits_0^{\infty}\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}P_n^{(m)2}\left(-\frac{j}{k_0}\eta_0\right)\times$$
$$\times\frac{\exp\{-2\eta_0z_0\}}{\eta_0}\lambda^{2m+1}d\lambda=$$
$$=\operatorname{Im}\int\limits_0^{k_1}\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}P_n^{(m)2}\left(-\frac{j}{k_0}\eta_0\right)\times \tag{23}$$
$$\times\frac{\exp\{-2\eta_0z_0\}}{\eta_0}\lambda^{2m+1}d\lambda.$$

Вводя в рассмотрение сечения рассеяния $C_{\rm sc}^{\pm} = 1/k_{0,1} \int_{\Omega^{\pm}} |F_{0,1}|^2 d\omega$ и поглощения $C_{\rm abs} = \int_{D_i} |{\rm Im}\, k_i^2(P)| |U_i(P)|^2 d\tau_P$, можно переписать (14), учитывая (22), (23), следующим образом:

$$\frac{4\pi}{k_0}\frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} - \frac{4\pi(-1)^m(2m-1)!!}{k_0\quad(2m)!!}\times$$
$$\times\, {\rm Im}\int_0^{k_1}\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}P_n^{(m)2}\left(-\frac{j}{k_0}\eta_0\right)\times \tag{24}$$
$$\times\frac{\exp\{-2\eta_0 z_0\}}{\eta_0}\lambda^{2m+1}d\lambda -$$
$$-\frac{4\pi}{k_0}\left\{D_n^{m+}U_0^s(M)\right\}_{M=M_0} = C_{\rm abs} + C_{\rm sc}^{+} + C_{\rm sc}^{-}\,.$$

Окончательно, вводя в рассмотрение сечение экстинкции [3], получаем оптическую теорему в следующем виде:

$$C_{\rm ext} = -\frac{4\pi}{k_0}\left\{D_n^{m+}U_0^s(M)\right\}_{M=M_0} +$$
$$+\frac{4\pi}{k_0}\frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} -$$
$$-\frac{4\pi(-1)^m(2m-1)!!}{k_0\quad(2m)!!}{\rm Im}\int_0^{k_1}\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\times \tag{25}$$
$$\times P_n^{(m)2}\left(-\frac{j}{k_0}\eta_0\right)\frac{\exp\{-2\eta_0 z_0\}}{\eta_0}\lambda^{2m+1}d\lambda.$$

Как уже отмечалось, ОТ может использоваться для вычисления сечения поглощения $C_{\rm abs}$ непосредственно из соотношения (24), минуя интегрирование по объему или поверхности неоднородности. Для этого необходимо лишь вычислить сечения рассеяния в верхнем и нижнем полупространствах $C_{\rm sc}^{\pm}$.

Здесь представляется уместным сделать некоторое замечание. Дело в том, что формально определенное как сумма сечений рассеяния и поглощения $C_{\rm ext} = C_{\rm abs} + C_{\rm sc}^{+} + C_{\rm sc}^{-}$ обобщенное сечение экстинкции содержит энергию излучения диполя, поэтому оно не отвечает на вопрос: какую же энергию забирает рассеиватель из источника излучения [14]? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо изъять энергию излучения диполя. Это легко сделать, убрав рассеиватель из соотношения (24). Тогда ясно, что верхняя строка (24) представляет собой суммарную энергию излучения мультиполя в верхнее и нижнее полупространства. Оставшаяся энергия и соответствует энергии, которую забирает рассеиватель из источника излучения – мультиполя. Следовательно, ее можно определить как "реальную" экстинкцию следующим образом:

$$\sigma_{\rm ext} = -\frac{4\pi}{k_0}\left\{D_n^{m+}U_0^s(M)\right\}_{M=M_0}. \tag{26}$$

Отметим, что (26) полностью совпадает с выражением, полученным для свободного пространства [30]. Уместно напомнить, что в нашем случае $U_0^s(M)$ должно удовлетворять условиям сопряжения для полей на поверхности полупространства Ξ.

Заметим, что рассеянное поле порождается источниками, находящимися в области расположения рассеивателя $\overline{D}_i \subset D_1$. В этом случае диаграммы направленности рассеянного поля $F_{0,1}^s(\theta,\varphi)$ принимают вид [28]

$$F_0^s(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi}B_0(\theta)g_0\exp(j\chi_1 z_P),\quad \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right);$$
$$F_1^s(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi}g_1[\exp(jk_1 z_P\cos\theta) + \tag{27}$$
$$+\,A_1(\theta)\exp(-jk_1 z_P\cos\theta)],\quad \theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right).$$

Здесь $\varphi\in(0,2\pi)$, $P\in\overline{D}_i$, $\chi_1 = \sqrt{k_1^2 - k_0^2\sin^2\theta}$, $B_0(\theta) = \dfrac{2k_0\cos\theta}{k_0\cos\theta+\chi_1}$, $A_1(\theta) = \dfrac{k_1\cos\theta-\chi_1}{k_1\cos\theta+\chi_1}$, $g_{0,1} = \exp\{jk_{0,1}(x_P\sin\theta\cos\varphi + y_P\sin\theta\sin\varphi)\}$. Следовательно, вместо интегрирования функции Грина (15) с необходимостью вычисления несобственных интегралов Зоммерфельда можно интегрировать комбинации элементарных функций (27). Еще раз напомним, что точка $M_P = (x_P, y_P, z_P)$, соответствующая рассеивателю, располагается в нижнем полупространстве $D_1 : z_P < 0$.

Таким образом, вычислив энергии рассеянного поля в верхнем и нижнем полупространствах: $\sigma_{\rm sc}^{\pm} = -\dfrac{1}{k_l}\displaystyle\int_{\Omega^{\pm}}\left|F_l^s\right|^2 d\omega$, $l = 0,1$, используя (26), можно определять эффективности рассеяния в соответствующие полупространства $\eta^{\pm} = \sigma_{\rm sc}^{\pm}/\sigma_{\rm ext}$. Подобные величины используются для оценки эффективности оптических антенн или усиления рамановского рассеяния при возбуждении мультипольными источниками [31–33].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получено обобщение оптической теоремы на случай возбуждения локальной неоднородности, расположенной внутри проницаемого полупространства, мультипольным источником произвольного порядка. Показано, что обобщенное сечение экстинкции не содержит несобственных интегралов и для его нахождения

фактически требуется вычислить определенный интеграл и производные от рассеянного поля в одной-единственной точке – точке расположения мультиполя. Помимо общенаучного интереса, это обобщение позволяет тестировать компьютерные модули в случае рассмотрения неоднородности без потерь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Newton R.G.* Optical theorem and beyond // Am. J. Phys. 1976. V. 44. P. 639–642.
2. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
3. *Mishchenko M.I.* The electromagnetic optical theorem revisited // J. Quantitat. Spectr. Radiat. Trans. 2006. V. 101. P. 404–410.
4. *Фарафонов В.Г., Ильин В.Б., Винокуров А.А.* Рассеяние света несферическими частицами в ближней и дальней зонах: применимость методов со сферическим базисом // Оптика и спектроскопия. 2010. Т. 109. С. 476–487.
5. *Newton R.G.* Scattering Theory of Waves and Particles. New York: Springer, 1982. 748 p.
6. *Ström S.* The scattered field / Field representation and introduction to scattering. Ed.: Varadan V.V., Lakhtakia A., Varadan V.K. Elsevier Science Publisher, 1991. P. 143–149.
7. *Berg M.J., Sorensen C.M., Chakrabarti A.* Extinction and the optical theorem. Part I, Single particles // J. Opt. Soc. Am. A. 2008. V. 25. № 7. P. 1504–1513.
8. *Gouesbet G.* On the optical theorem and non-plane-wave scattering in quantum mechanics // J. Math. Phys. 2009. V. 50. 112302.
9. *Levitina T.V., Brändas E.J.* Angle-dependent total cross-sections and the optical theorem // Computat. Biology Chemistry. 2003. V. 27. № 3. P. 445–457.
10. *Mackowski D.W.* Calculation of total cross-sections of multiple-sphere clusters // J. Opt. Soc. Am. A. 1994. V. 11. P. 2851–2861.
11. *Mitri F.G.* Extended optical theorem for scalar monochromatic acoustical beams of arbitrary wave front in cylindrical coordinates // Ultrasonics. 2016. V. 67. P. 129–135.
12. *Cotanch S.R.* Coupled channels optical theorem and non-elastic cross section sum rule // Nuclear Phys. A. 2010. V. 842. № 1–4. P. 48–58.
13. *Wapenaar K., Douma H.* A unified optical theorem for scalar and vectorial wave fields // J. Acoust. Soc. Am. 2012. V. 131. № 5. P. 3611.
14. *Carney P.S., Schotland J.C., Wolf E.* Generalized optical theorem for reflection, transmission, and extinction of power for scalar fields // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. № 3. 036611.
15. *Small A., Fung J., Manoharan V.N.* Generalization of the optical theorem for light scattering from a particle at a planar interface // J. Opt. Soc. Am. A. 2013. V. 30. № 12. P. 2519–2525.
16. *Белинский Б.П., Коузов Д.П.* Оптическая теорема для системы пластина–жидкость // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 1. С. 13–19.
17. *Андронов И.В.* Оптическая теорема для системы пластина–стратифицированная жидкость // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 1. С. 13–18.
18. *Gulyaev Yu.V., Barabanenkov Yu.N., Barabanenkov M.Yu., Nikitov S.A.* Effect of energy emission from evanescent electromagnetic wave at scattering by a dielectric structure // Phys. Let. A. 2005. V. 335. № 5–6. P. 471–476.
19. *Athanasiadis C., Martin P.A., Spyropoulos A., Stratis I.G.* Scattering relations for point sources. Acoustic and electromagnetic waves // J. Math. Phys. 2002. V. 43. № 11. P. 5683–5697.
20. *Venkatapathi M.* Emitter near an arbitrary body: Purcell effect, optical theorem and the Wheeler–Feynman absorber // J. Quantitat. Spectr. Radiat. Transfer. 2012. V. 113. P. 1705–1711.
21. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Оптическая теорема для локальных источников в теории дифракции // Вестн. Моск. ун-та, сер.5. Физика, Астрономия. 2015. № 4. С. 43–46.
22. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Оптическая теорема для мультипольных источников в теории дифракции // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 3. С. 271–276.
23. *Jerez-Hanckes C., Nedelec J.-C.* Asymptotics for Helmholtz and Maxwell solutions in 3-D open waveguides. Research report No. 2010-07. February 2010. ETH, Swiss Federal Institute of Technology Zurich. 25 p.
24. *Devaney A.J., Wolf E.* Multipole expansions and plane wave representations of the electromagnetic field // J. Math. Phys. 1974. V. 15. P. 234–244.
25. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. Мир, 1987. 311 с.
26. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
27. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М.: МАКС Пресс, 2008. 316 с.
28. *Барышев А.В., Еремин Ю.А.* Новая математическая модель анализа малозаметных дефектов подложки // Матем. моделир. 2010. Т. 22. № 5. С. 122–130.
29. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 832 с.
30. *Eremin Yu., Wriedt T.* Generalization of the optical theorem to the multipole source excitation // J. Quantitat. Spectr. Radiat. Transfer. 2016. V. 185. P. 22–26.
31. *Frimmer M., Novotny L.* Controlling light at the nanoscale // EuroPhysics News. 2015. V. 46. № 5–6. P. 27–30.
32. *Maikhuri D., Purohit S.P., Mathur K.C.* Quadrupole effects in photoabsorption in ZnO quantum dots // J. Appl. Phys. 2012. V. 112. 104323.
33. *Hastings S.P., Swanglap P., Qian Z., Fang Y., Park S.-J., Link S., Engheta N., and Fakhraai Z.* Quadrupole-enhanced Raman scattering // ACS Nano. 2014. V. 8. № 9. P. 9025–9034.