АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2017, том 63, № 4, с. 371–379

ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 538.951

# УПРУГОСТЬ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© 2017 г. В. М. Полунин[a, *], П. А. Ряполов[a], В. Б. Платонов[a], Е. В. Шельдешова[a], Г. В. Карпова[a], И. М. Арефьев[b]

[a] Юго-Западный государственный университет (ЮЗГУ)
305040 Курск, ул. 50 лет Октября 94

[b] Ивановский государственный энергетический университет (ИГЭУ)
153003 Иваново, ул. Рабфаковская 34

*e-mail: polunin-vm1@yandex.ru

Поступила в редакцию 08.06.2016 г.

Проведены комплексные измерения упруго-магнитных параметров магнитной жидкости, удерживаемой магнитной левитацией в горизонтально расположенной трубке в сильном магнитном поле: частоты и коэффициента затухания колебаний, коэффициентов статической, пондеромоторной и динамической упругости, смещения жидкости при наложении гидростатического давления, кривой намагничивания, а также напряженности и градиента напряженности магнитного поля. Расчеты, проведенные с использованием модели пондеромоторной упругости с введенной поправкой на сопротивление движущейся вязкой жидкости и на основе результатов смещения столбика жидкости для двух образцов магнитной жидкости, находятся в хорошем соответствии с экспериментальной кривой намагничивания. Описанная методика представляет интерес для исследования магнитофореза и агрегирования наночастиц в магнитных коллоидах.

*Ключевые слова:* магнитная жидкость, частота колебаний, вязкость, коэффициент статической пондеромоторной упругости, гидростатическое давление, намагниченность насыщения.

**DOI:** 10.7868/S0320791917040116

## ВВЕДЕНИЕ

Магнитные жидкости (МЖ) получили свое распространение благодаря уникальному сочетанию свойств и возможности изменения под влиянием внешних магнитных полей своих физических параметров, таких как вязкость, скорость звука, оптическая проницаемость. В литературе давно известны и достаточно хорошо описаны лабораторные способы измерения зависимости вязкости МЖ от напряженности магнитного поля. Для проведения подобных исследований основной приборной базой являются ротационные реометры Брукфильда, в которых вал, диск или конус вращается в исследуемой жидкости [1–4].

Вместе с тем наиболее распространенные колебательные системы на основе нанодисперсных МЖ, такие как управляемые амортизаторы и комплексы для гашения вибрации, датчики перемещения и ускорения, акустические динамики с применением МЖ, основаны на линейных колебаниях упругих элементов на основе МЖ. Поэтому особенный интерес представляют такие измерения упруго-магнитных параметров магнитной жидкости, удерживаемой магнитной левитацией, в которых отслеживаются линейные перемещения образца МЖ.

В литературе описано использование U-образных трубок, полностью или частично заполненных МЖ, в которых жидкость совершает линейные колебания в магнитном поле [5–7]. Полученные в работе [5] экспериментальные значения коэффициента упругости системы отличаются от значений, полученных по предлагаемой в этих работах модели, в большую сторону в несколько раз. Авторы объясняют такое расхождение сложностью выполнения эксперимента и учетом влияния колен трубки друг на друга. В работе [7] произведена оценка вязкости двух образцов с высокой и низкой концентрацией твердой фазы. Для низкоконцентрированного образца получено удовлетворительное согласие, для высококонцентрированной МЖ данные эксперимента и теории различаются на порядок. Такое расхождение также объясняется сложностью учета размагничивающих полей такой системы.

В работе [8] описан вариант исследования системы с частично заполненным и размещенном на вибростоле цилиндром с МЖ. На торцах цилиндра расположены магниты. Изучается ЭДС

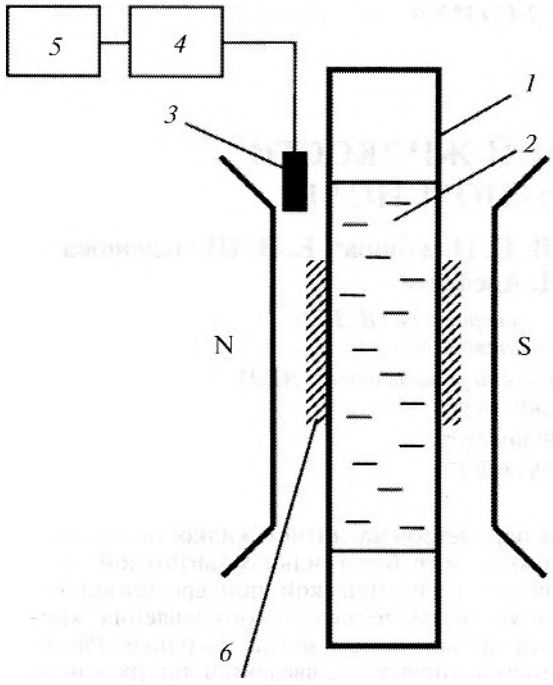


**Рис. 1.** Блок-схема экспериментальной установки № 1.

катушки, намотанной аксиально на цилиндр. Определены максимумы зависимости ЭДС от частоты вибрации стола для разного уровня заполняемости цилиндра, сделан вывод о зависимости коэффициента затухания подобной системы от величины уровня МЖ и ее характеристик, однако теоретического анализа исследуемой системы не приведено.

В работе [9] приведены результаты измерения упругих параметров колебательной системы (коэффициент упругости, коэффициент затухания и частота колебаний), в которой столбик МЖ в трубке удерживается за счет магнитной левитации в сильном магнитном поле. Роль упругости выполняет пондеромоторная сила, действующая на тонкие слои МЖ при верхнем и нижнем основаниях столбика жидкости, находящиеся в поле с постоянным и одинаковым градиентом напряженности. Однако в этой работе исследован узкий диапазон напряженности магнитного поля, использован один образец МЖ, не учитывается вязкое трение жидкости о стенки трубки.

В настоящем исследовании рассматриваются результаты комплексных измерений упруго-магнитных параметров столбика МЖ, удерживаемой магнитной левитацией в горизонтально расположенной трубке в сильном магнитном поле, в число которых входят: частота и коэффициент затухания колебаний, коэффициент пондеромоторной упругости, смещение жидкости под действием гидростатического давления, кривая намагничивания, а также напряженность и градиент напряженности магнитного поля. Проведены расчеты намагниченности МЖ с использованием модели пондеромоторной упругости с введенной поправкой на сопротивление движущейся вязкой жидкости и на основе результатов смещения жидкости под действием гидростатического давления для двух образцов МЖ. Рассчитанные значения намагниченности МЖ, относящиеся к области магнитного поля, близкого к насыщению, и кривая намагничивания, полученная путем прямого и независимого эксперимента, находятся в хорошем соответствии друг с другом.

## ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ И МЕТОДИКИ ИЗМЕРЕНИЙ

Для проведения комплексных измерений упруго-магнитных параметров столбика МЖ в сильном магнитном поле – частоты и коэффициента затухания колебаний, смещения жидкости при наложении гидростатического давления, а также для получения распределения магнитного поля вдоль столбика МЖ (напряженность и градиент напряженности), измерения кривой намагничивания исследуемых образцов МЖ – созданы две различные экспериментальные установки.

Блок-схема экспериментальной установки № 1, предназначенной для измерения частоты и коэффициента затухания колебаний МЖ-столбика, показана на рис. 1. В работе использовался лабораторный электромагнит ФЛ-1 с диаметром полюсных наконечников 100 мм. Конструкция электромагнита ФЛ-1 и его технические данные описаны в [15]. Между полюсными наконечниками размещена прозрачная трубка *1* с внутренним диаметром 12 мм, выполненная из оргстекла. Ось трубки проходит горизонтально через центр межполюсного зазора параллельно поверхности полюсных наконечников. При напряженности магнитного поля ≥100 кА/м трубка заполняется магнитной жидкостью *2*, которая захватывается полем и зависает в нем.

В зазоре между трубкой и полюсным наконечником на уровне свободной поверхности столбика МЖ установлен индикатор вибраций – катушка индуктивности *3*. Катушка индуктивности имеет 5000 витков, намотанных медным проводом диаметром 0.071 мм на каркасе из оргстекла. Сигнал с индикатора колебаний поступает на усилитель Selective Nanovoltmeter type 237 – *4*. После усиления сигнал передается на осциллограф GwInstek GDS-72074 – *5*, а затем на компьютер (на рисунке не показан) для последующей обработки данных по частоте колебаний ν и коэффициенту затухания β. При анализе осциллограмм, фиксируемых в измерительном блоке, применяется программа, разработанная в среде NI LabVIEW. На рис. 1 *6* – держатель трубки, обеспечи-

вающий ее устойчивое положение во время опытов. Столбик МЖ удерживается в положении равновесия и сохраняет форму цилиндра только за счет эффекта магнитной левитации. Для возбуждения колебаний столбика МЖ используется резиновая пробочка с отверстием, которое при выдергивании из трубочки прикрывается. Между пробочкой и свободной поверхностью жидкости имеется воздушная полость. Выдергивание пробочки с перекрытым отверстием из трубки обуславливает скачок давления в газовой полости. В процессе колебаний МЖ-столбика оба конца трубки остаются открытыми.

Блок-схема экспериментальной установки № 2, предназначенной для измерения смещения столбика МЖ под действием гидростатического давления, показана на рис. 2. Между полюсными наконечниками электромагнита ФЛ-1 размещена та же, что и в установке № 1, трубка *1*, заполненная исследуемым образцом МЖ 2. При помощи держателя *3* фиксируется положение трубки. Один из концов трубки соединяется с U-образной трубкой *4*, заполненной дистиллированной водой. Разность уровней воды $\Delta h$ в коленах U-образной трубки определяется с помощью катетометра. Для создания требуемого перепада давления плечи U-образной плексигласовой трубки имеют длину 900 мм, ее внутренний и внешний диаметры составляют соответственно 16 и 20 мм.

Для измерения $\Delta z$ – смещения столбика МЖ под действием гидростатического давления – в одной плоскости с горизонтальным осевым сечением трубки с МЖ устанавливается реперная отметка, показанная на рис. 2 пунктиром, а над всей системой – фотоаппарат для фиксирования смещения границы столбика МЖ. Столбик МЖ перемещается в положение равновесия за счет суммарного действия пондеромоторной силы и силы гидростатического давления.

Требуемое значение напряженности магнитного поля $H$ в межполюсном зазоре электромагнита ФЛ-1 достигается при помощи двух последовательно соединенных источников постоянного тока QJE QJ6030S и фиксируется тесламетром Актаком ATE-8702. Подобно [9] получена экспериментальная зависимость $H_x(z)$ напряженности магнитного поля (точнее – ее составляющей $H_x$) вдоль оси $OZ$, проходящей из центра межполюсного зазора параллельно поверхности полюсных наконечников. Однако в данном случае измерения проведены в диапазоне напряженности магнитного поля от 100 до 900 кА/м с шагом 50 кА/м. Измерительный щуп тесламетра перемещается на расстояние 90 мм с использованием катетометра. Положение щупа в интервалах от 0 до 40 мм и от 70 до 90 мм, устанавливаемое с шагом 10 мм, а в интервале от 40 до 70 мм – с шагом 2 мм, фиксируется с точностью 0.01 мм. Характерным обстоятельством полученных зависимостей $H_x(z)$, как и в работе [9], является наличие линейного участка на кривых на уровне $z = 55$ мм, что позволяет считать градиент напряженности магнитного поля на этом участке $\Delta H_x/\Delta z = \text{const}$.

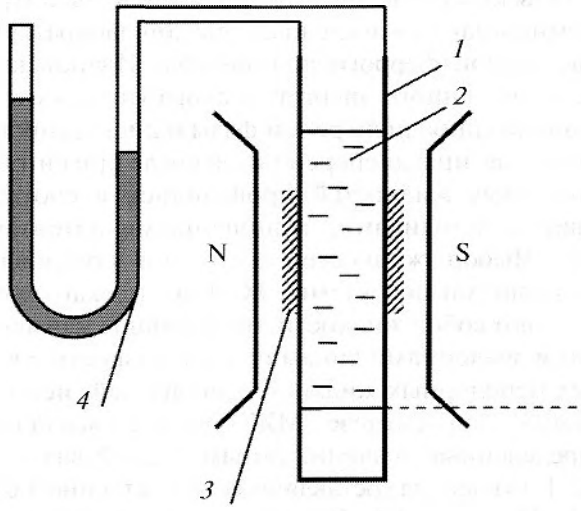


**Рис. 2.** Блок-схема экспериментальной установки № 2.

Экспериментальное значение намагниченности исследуемых образцов и кривая намагничивания определяются "прямым" методом – по изменению магнитного потока через катушку индуктивности, охватывающую образец.

Измерения физических величин $\nu$, $\beta$, $\Delta h$ и $\Delta z$ проведены при фиксированных значениях параметров магнитного поля. В центре между полюсами электромагнита $H_0$: 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 и 900 кА/м. У основания столбика МЖ соответственно $H_*$: 156, 236, 313, 391, 469, 540, 619 и 686 кА/м и градиенты напряженности магнитного поля $\Delta H_x/\Delta z$: $3.42 \times 10^6$, $5.13 \times 10^6$, $6.95 \times 10^6$, $8.70 \times 10^6$, $1.05 \times 10^7$, $1.24 \times 10^7$, $1.42 \times 10^7$ и $1.59 \times 10^7$ А/м$^2$. Массив экспериментальных данных, обсуждаемых в настоящей статье, получен в интервале температур $28 \pm 0.5$°C.

## ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИССЛЕДУЕМЫХ ОБРАЗЦОВ

В работе исследовались образцы магнитных жидкостей на основе высокодисперсного магнетита $Fe_3O_4$, стабилизированного поверхностно-активным веществом – олеиновой кислотой $C_8H_{17}CH{=}CH(CH_2)_7{-}COOH$. В образце МЖ-1 в качестве дисперсионной среды – жидкости-носителя – использовался авиационный керосин ТС-1, в образце МЖ-2 – ундекан $C_{11}H_{24}$, углеводород из класса алканов.

Объекты исследования синтезированы в Проблемной научно-исследовательской лаборатории прикладной феррогидродинамики Ивановского государственного энергетического университета. Стабилизация дисперсной фазы и диспергирование ее частиц в дисперсионной среде при синтезе магнитных жидкостей проводились в соответствии с методиками, защищенными патентами [10]. Выбор жидкостей-носителей обусловлен следующими аспектами. ТС-1 и ундекан представляют собой жидкости, обладающие наименьшими значениями динамической вязкости среди всех неполярных жидкостей-носителей, используемых при синтезе МЖ. Экспериментально определенные значения динамической вязкости ТС-1 и ундекана составляют соответственно 4.03 и 1.15 мПа с при 20°С. При подборе исследуемых образцов это свойство имеет существенное значение, поскольку от него зависит получаемое количество фиксируемых колебаний столбика МЖ. Кроме того, температуры кипения ТС-1 (150–200°С) и ундекана (196°С) при стандартном давлении являются одними из самых высоких среди маловязких насыщенных углеводородов, что делает жидкости наименее испаряемыми при температурах проведения эксперимента.

В отношении агрегативной устойчивости и магнитных свойств именно жидкость типа "магнетит–углеводородная среда" близка к оптимуму. Важным ее преимуществом является также простота технологии изготовления и доступность исходных материалов. Поэтому эти коллоиды часто выбираются в качестве объекта исследования и широко используются в прикладных целях. Так, МЖ на основе ТС-1 и ундекана в настоящее время широко используются в качестве рабочего тела в магнитожидкостных устройствах, например, в гироскопах и сепараторах [11].

Плотности ρ образцов МЖ-1 и МЖ-2 измерялись по ГОСТ 18995.1-73 при 20°С и соответственно равны 1245 и 1227 кг/м$^3$. Намагниченности насыщения $M_S$ образцов МЖ-1 и МЖ-2 соответственно равны 39.5 и 40.4 кА/м. Значения $M_S$ вычислены путем линейной аппроксимации экспериментально полученной на основе баллистического метода зависимости $M(H^{-1})$ в окрестности $H^{-1} \approx 0$ и экстраполяции полученной прямой до пересечения с осью ординат. Сдвиговая вязкость η измерена в лаборатории наномасштабной акустики ЮЗГУ на вискозиметре "Brookfield DV2T"; ее значение для МЖ-1 и МЖ-2 составляет соответственно 34.8 и 30.4 мПа с при скорости вращения шпинделя 60 об/мин.

## ТЕОРИЯ УПРУГО-МАГНИТНЫХ СВОЙСТВ МЖ-СТОЛБИКА

Упругость системы "столбик МЖ в трубке" определяется пондеромоторными силами взаимодействия намагниченного вещества с неоднородным магнитным полем. Выражение для коэффициента пондеромоторной упругости $k_p$ получено в работе [9]:

$$k_p = \mu_0 \frac{\pi d^2}{2} \left( M_x \frac{\partial H_x}{\partial z} \right)_{z=b/2}, \quad (1)$$

где $\mu_0$ – магнитная постоянная, $M_x$ и $\frac{\partial H_x}{\partial z}$ – соответственно намагниченность и градиент напряженности магнитного поля в месте расположения оснований МЖ-столбика, $d$ – диаметр трубки, $b$ – длина МЖ-столбика.

При наложении гидростатического давления на столбик МЖ за счет разности уровней воды в коленах U-образной трубки устанавливается равновесие:

$$\rho_w g \Delta h = 4 k_s \Delta z / \pi d^2, \quad (2)$$

где $\rho_w$ – плотность воды, $k_s$ – статический коэффициент упругости.

Из (2) получим

$$k_s = \pi d^2 \rho_w g \Delta h / 4 \Delta z. \quad (3)$$

Предполагая, что условия получения формулы (1) для $k_p$ в нашем эксперименте выполнены и $k_s = k_p$, получим

$$\left( \frac{\Delta h}{\Delta z} \right)_s = \frac{2\mu_0 \left( M_x \frac{\partial H_x}{\partial z} \right)_{z=b/2}}{\rho_w g}. \quad (4)$$

В выражении (4) отсутствует зависимость от диаметра трубки, а следовательно, она может быть сколь угодно тонкой и малоемкой по вместительности МЖ. Ограничением является возможная кривизна свободной поверхности за счет поверхностного натяжения жидкости. Отношение $(\Delta h / \Delta z)_s$ в магнитном поле, близком к магнитному насыщению, зависит только от намагниченности МЖ и градиента поля на концах МЖ-столбика.

Из выражения (4) следует формула для расчета намагниченности жидкости:

$$M_x \big|_{z=b/2} = \frac{\rho_w g \Delta h}{2\mu_0 \Delta z \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} \right)_{z=b/2}}. \quad (5)$$

Значение $M_x$, рассчитываемое по формуле (5), назовем магнитостатическим и обозначим $M_{xS}$, а

соответствующее значение намагниченности насыщения обозначим $M_{SS}$.

Тенденция возрастания $M_x$ такова, что при $H \to \infty$ $M_x \to M_{SS}$. Значение намагниченности насыщения $M_{SS}$ можно получить стандартным способом, а именно – линейной аппроксимацией экспериментальной зависимости $M_x(H^{-1})$ в окрестности $H^{-1} \approx 0$ и экстраполяцией прямой до пересечения с осью ординат.

Рассматривая колебательное движение столбика МЖ в трубке, воспользуемся представлениями теоретической модели колебательной системы с "сосредоточенными" параметрами. Основными параметрами, входящими в дифференциальное уравнение колебательного движения, являются вещественные постоянные коэффициенты упругости и затухания – $k$ и $\beta$. Параметры $k$ и $\beta$ входят коэффициентами в силы, пропорциональные соответственно колебательному смещению и колебательной скорости. В данном случае возникающая сила обусловлена распространением вязкой волны Стокса [12–14]. Сила, действующая на единицу колеблющейся плоской поверхности, направлена вдоль поверхности в сторону, противоположную колебательной скорости [12]:

$$f_z = -\sqrt{\omega\rho\eta}u_0\cos(\omega t + \pi/4), \tag{6}$$

где $u_0 = \omega\Delta z_0$– амплитуда колебательной скорости $u = u_0\cos\omega t$.

В таком представлении сила трения $f_z$ является источником диссипации энергии. Формула для расчета коэффициента затухания с характерной частотной зависимостью $\beta \sim \sqrt{\omega}$ была получена впервые Гельмгольцем [13, 19]. Однако в представлении выражения (6) в виде

$$f_z = -\sqrt{\omega^3\rho\eta}\Delta z_0\cos(\omega t + \pi/4) \tag{7}$$

действующая сила пропорциональна смещению и вносит вклад в коэффициент упругости колебательной системы, значение которого (как будет показано ниже) зависит от частоты как $\sim\sqrt{\omega^3}$.

В условиях колебаний МЖ в трубке коэффициент пондеромоторной упругости, описываемый формулой (1), по принципу аддитивности дополняется поправкой на вязкое трение жидкости о стенки трубки. Для нахождения поправки воспользуемся следующей простой схемой расчета.

Среднее по времени значение диссипации энергии в результате движения вязкой жидкости при колебаниях плоской стенки единичной площади приводится в [12]:

$$-\overline{E} = \frac{u_0^2}{2}\sqrt{\frac{\omega\eta\rho}{2}}. \tag{8}$$

С учетом площади трения – поверхности трубки, занятой МЖ, – получаем

$$-\overline{E}_S = \frac{\pi\Delta z_0^2 bd}{2}\sqrt{\frac{\omega^5\eta\rho}{2}}. \tag{9}$$

При отсутствии вязких потерь в силу закона сохранения энергии существует равенство максимальной кинетической энергии и максимальной потенциальной энергии колебательной системы $E_{k0} = k_p\Delta z_0^2/2$. При наличии диссипации колебательной энергии, принимая в начальный момент времени значение кинетической энергии максимальным $E_{k0}$, потенциальная энергия колебательного движения спустя четверть периода может быть представлена следующим образом:

$$\frac{k_p\Delta z_{01}^2}{2} = \frac{k_p\Delta z_0^2}{2} - \frac{\pi^2 bd}{2}\sqrt{\frac{\omega^3\eta\rho}{2}}\frac{\Delta z_0^2}{2}, \tag{10}$$

причем $\Delta z_{01} \le \Delta z_0$. Если произвести в левой части (10) переход $\Delta z_{01} \to \Delta z_0$, $k_p \to (k_p + \delta_\eta)$ и потребовать, чтобы равенство формально не нарушалось, то получим

$$\frac{(k_p + \delta_\eta)\Delta z_0^2}{2} = \frac{k_p\Delta z_0^2}{2} - \frac{\pi^2 bd}{2}\sqrt{\frac{\omega^3\eta\rho}{2}}\frac{\Delta z_0^2}{2}. \tag{11}$$

Здесь $\delta_\eta$ – поправка к пондеромоторному коэффициенту упругости, обусловленная течением вязкой жидкости. Из выражения (11) следует формула для $\delta_\eta$:

$$\delta_\eta = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}bd\sqrt{\omega^3\eta\rho}. \tag{12}$$

Коэффициент пондеромоторной упругости с поправкой на течение вязкой жидкости будем называть динамическим коэффициентом пондеромоторной упругости и обозначим $k_d$:

$$k_d = k_p + \delta_\eta. \tag{13}$$

С учетом (1) и (12) имеем

$$k_d = \mu_0\frac{\pi d^2}{2}\left(M_x\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)_{z=b/2} - \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}bd\sqrt{\omega^3\eta\rho}. \tag{14}$$

Необходимое условие, при выполнении которого можно воспользоваться результатами колебаний плоской поверхности, считая их вещественными, заключается в выполнении неравенства $\pi d/\lambda \ge 10$, в котором $\lambda$ – длина вязкой волны. Это же условие соответствует вещественной области определения коэффициента затухания колебаний и отсутствию "присоединенной" массы [13]. В выполненном эксперименте в области сильного магнитного поля за верхнюю границу частотного диапазона можно принять 15.5 Гц. Тогда $\lambda = 2\sqrt{\pi\eta/\rho\nu} \cong 4.7$ мм, что при длине окружности используемой трубки 37.7 мм позволяет

считать вышеупомянутое условие выполненным. Вместе с тем "глубина проникновения вязкой волны" $\sigma'' = \lambda/2\pi$ составляет ~0.75 мм, поэтому в гидродинамическом потоке находится только тонкий пристеночный слой жидкости.

Динамический коэффициент упругости может быть получен и из эксперимента по данным измерения частоты колебаний МЖ-столбика. Обозначив данный коэффициент упругости $k_{d\omega}$, запишем:

$$k_{d\omega} = \pi\omega^2\rho b d^2/4. \quad (15)$$

В этом случае мы приближенно полагаем колебания столбика МЖ в трубке свободными и незатухающими колебаниями гармонического осциллятора. Параметры $k_d$ и $k_{d\omega}$ введены независимым способом, поэтому равенство $k_d = k_{d\omega}$ нуждается в экспериментальном подтверждении.

С учетом выражений (14), (15) и сделанного предположения $k_d = k_{d\omega}$

$$\pi\omega^2\rho b d^2/4 = k_p - \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} b d\sqrt{\omega^3\eta\rho}. \quad (16)$$

Совершив замену $\omega \to \nu$, из (16) получим

$$\mu_0\frac{\pi d^2}{2}\left(M_x\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)_{z=b/2} = \pi^3\nu^2\rho b d^2 + b d\sqrt{\pi^7\nu^3\eta\rho}. \quad (17)$$

Выражение (17) связывает между собой пондеромоторный коэффициент упругости, полученный в работе [9], и кинетические (частотно-зависимые) составляющие коэффициента упругости. Из (17) находим

$$M_x\big|_{z=b/2} = 2\pi^2\nu^2\rho b/\mu_0\left.\frac{\partial H_x}{\partial z}\right|_{z=b/2} + 2b\sqrt{\pi^5\nu^3\eta\rho}/\mu_0 d\left.\frac{\partial H_x}{\partial z}\right|_{z=b/2}. \quad (18)$$

Значения $M_x$, рассчитываемые по формуле (18), назовем магнитодинамическими и обозначим $M_{xd}$, а соответствующее значение намагниченности насыщения обозначим $M_{Sd}$.

Как и при обсуждении метода получения $M_{SS}$ на основе гидростатических измерений, путем линейной аппроксимации экспериментальной зависимости $M_{xd}(H^{-1})$ в окрестности $H^{-1} \approx 0$ и экстраполяции прямой до пересечения с осью ординат получим значение намагниченности насыщения $M_{Sd}$.

С учетом предполагаемого равенства $k_p = k_s$ выражение (17) преобразуется к виду

$$\pi\omega^2\rho b d^2/4 = k_s - \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} b d\sqrt{\omega^3\eta\rho}. \quad (19)$$

Воспользовавшись выражением (3) и переходя от $\omega$ к $\nu$, запишем формулу (19) в виде

$$(\Delta h/\Delta z)_d = 4\pi^2\nu^2 b\rho/\rho_w g + 4b\sqrt{\pi^5\nu^3\eta\rho}/\rho_w g d. \quad (20)$$

Выражение (20) связывает частоту колебаний системы $\nu$ и ее статические параметры – $\Delta h$, $\Delta z$. При получении равенства численных значений $(\Delta h/\Delta z)_s$ и $(\Delta h/\Delta z)_d$ можно считать подтвержденными предположения о применимости формулы (1), справедливости равенств $k_s = k_p$, $k_d = k_{d\omega}$ и вывода модельной теории – $k_d = k_p + \delta_\eta$.

## СРАВНЕНИЕ ВЫВОДОВ ТЕОРИИ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ЭКСПЕРИМЕНТА

На рис. 3 представлены экспериментальные данные по кривой намагничивания МЖ-1 и МЖ-2 в диапазоне напряженности 3–750 кА/м и расчетные данные, полученные на основе выводов модельной теории для диапазона напряженностей 200–900 кА/м. Расчет выполнен с использованием экспериментальных результатов по измерениям частоты колебаний МЖ-столбика, данных измерения градиента напряженности магнитного поля в основании МЖ-столбика, статических измерений разности уровней водяного столба в коленах U-образной трубки $\Delta h$ и $\Delta z$ – смещения столбика МЖ под действием гидростатического давления.

Значения магнитостатической намагниченности $M_x$, показанные на рис. 3 черными треугольниками, вычисляются по формуле (5). Для получения $M_x$ используется массив экспериментальных данных по напряженности магнитного поля при различных значениях силы тока, подаваемого на обмотку ФЛ-1, а также отношение $\Delta h/\Delta z$. Магнитодинамическая намагниченность $M_{xd}$ рассчитывается по формуле (18) с использованием результатов измерения частоты колебаний МЖ-столбика. Эти данные показаны на рис. 3 черными квадратами. Экспериментальные результаты прямого измерения намагниченности (кривой намагничивания) исследуемых объектов нанесены незаштрихованными ромбами.

Графики, показанные на рис. 4, представляют собой экспериментальную зависимость $M(H^{-1})$, дополненную линейной аппроксимацией. Как и на рис. 3, значки, представляющие значения $M_x$ из статического эксперимента, показаны черными треугольниками, полученные на основе измерения частоты колебаний МЖ-столбика показаны черными квадратами, а результаты прямого измерения намагниченности исследуемых объектов нанесены незаштрихованными ромбами.

В таблице представлены значения акустических параметров $\nu$ и $\beta$; значения намагниченности

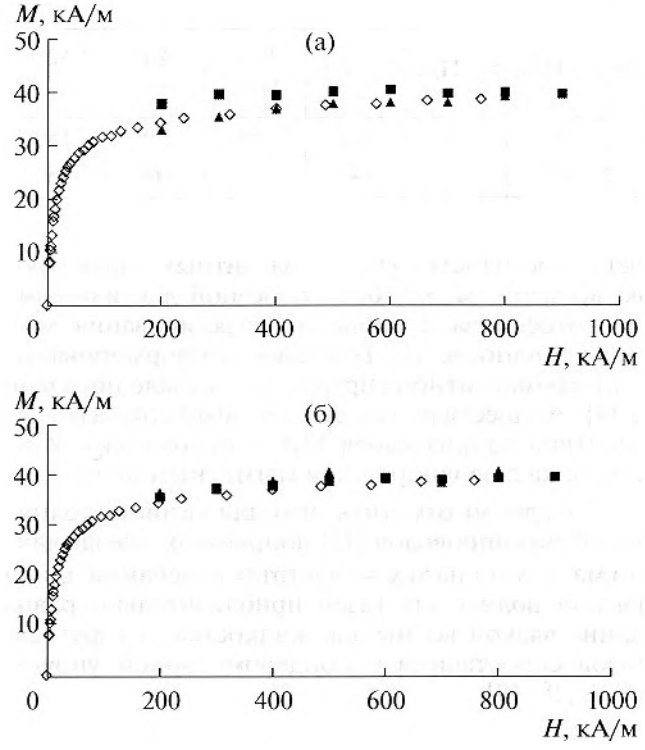


**Рис. 3.** Зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля: ◇ – экспериментальные значения намагниченности, ■ – магнитодинамическое значение намагниченности, ▲ – магнитостатическое значение намагниченности. (а) Образец МЖ-1, (б) образец МЖ-2.

насыщения, полученные "прямым" методом – $M_S$, статическим методом – $M_{SS}$, динамическим методом – $M_{Sd}$. Там же приведены коэффициенты упругости $k_p$, $k_s$, $k_d$, $k_{d\omega}$, поправка на течение вязкой жидкости $\delta_\eta$, численные значения отношений $(\Delta h/\Delta z)_s$ и $(\Delta h/\Delta z)_d$, рассчитываемые соответственно по формулам (1), (3), (14), (15), (12), (4) и (20). Данные по $k_p$, $k_s$, $k_d$, $k_{d\omega}$, $\delta_\eta$, $(\Delta h/\Delta z)_s$, $(\Delta h/\Delta z)_d$ и значения акустических параметров $\nu$ и $\beta$ получены для магнитного поля: $H_0 = 900$ кА/м, $H_* = 686$ кА/м и $\Delta H_x/\Delta z = 1.59 \times 10^7$ А/м$^2$. При этом расчеты $k_p$ проведены с использований значений $M_x$, принадлежащих кривой намагничивания исследуемых образцов.

Показанные на рис. 3 и рис. 4 значения намагниченности, полученные методом "прямого" определения и рассчитанные по данным статического и динамического экспериментов для образцов МЖ-1 и МЖ-2 в области магнитных полей, близких к магнитному насыщению, находятся в хорошем соответствии. Причем графическое представление результатов намагниченности на рис. 3 показывает, что по мере приближения к состоянию магнитного насыщения значения магнитостатической намагниченности $M_{xS}$ и значения магнитодинамической намагниченности $M_{xd}$ сближаются и практически накладываются на кривую намагничивания, полученную "прямым" методом. Такая же тенденция наблюдается и с результатами аппроксимации экспериментальной зависимости $M_x(H^{-1})$ в окрестности $H^{-1} \approx 0$ и экстраполяции получаемой прямой до пересечения с осью ординат, представленными на рис. 4.

Представленные в таблице значения намагниченности насыщения исследуемых образцов – $M_S$, $M_{SS}$ и $M_{Sd}$ в пределах погрешности измерений

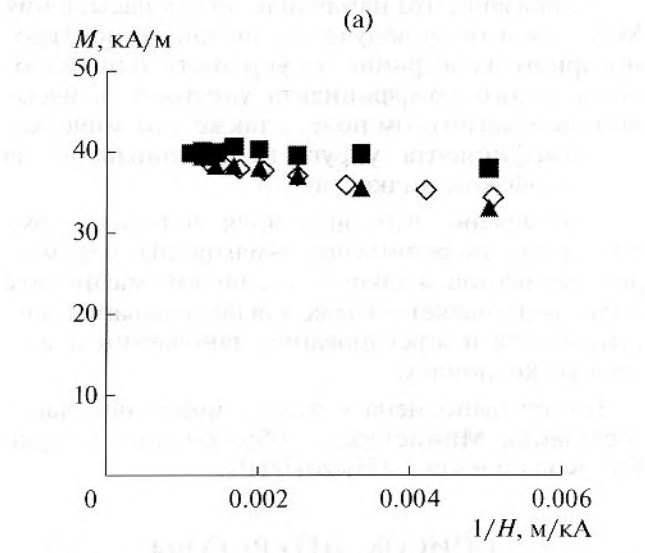


**Рис. 4.** Конечный участок кривой намагничивания: ◇ – экспериментальные значения намагниченности, ■ – магнитодинамическое значение намагниченности, ▲ – магнитостатическое значение намагниченности. (а) Образец МЖ-1, (б) образец МЖ-2.

**Таблица**

| Образец | ν, Гц | β, с$^{-1}$ | $M_S$, кА/м | $M_{SS}$, кА/м | $M_{Sd}$, кА/м | $k_p$, Н/м | $k_s$, Н/м | $\delta_\eta$, Н/м | $k_d$, Н/м | $k_{d\omega}$, Н/м | $\left(\frac{\Delta h}{\Delta z}\right)_s$ | $\left(\frac{\Delta h}{\Delta z}\right)_d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| МЖ-1 | 15.3 | 9.5 | 39.5 | 41.1 | 40.8 | 174 | 180 | 30 | 144 | 150 | 158 | 160 |
| МЖ-2 | 15.5 | 9.4 | 40.3 | 40.9 | 40.6 | 177 | 178 | 28 | 149 | 151 | 160 | 160 |

(≤2%) совпадают. Коэффициенты упругости: $k_p$, $k_s$, $k_d$, $k_{d\omega}$ и поправка на течение вязкой жидкости $\delta_\eta$ находятся для исследуемых образцов в приближенном равенстве между собой. Практически совпадают между собой численные значения отношений $(\Delta h/\Delta z)_s$ и $(\Delta h/\Delta z)_d$, что подтверждает высказанные ранее предположения: $k_p = k_s$, $k_d = k_{d\omega}$ и вывод теории $k_d = k_p + \delta_\eta$. Важно отметить, что результаты комплексного эксперимента для всех фиксированных параметров магнитного поля позволяют получить удовлетворительно выполняемые равенства: $k_p + \delta_\eta = k_s + \delta_\eta = k_d = k_{d\omega}$ и $(\Delta h/\Delta z)_s = (\Delta h/\Delta z)_d$.

Используя экспериментальные данные ν и β, можно показать, что изменение частоты колебаний системы, связанное с учетом затухания свободных колебаний, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, в данном случае незначительно.

Соответствие между выводами модельной теории и опытными данными, полученными по итогам комплексного эксперимента, свидетельствует о ее физической обоснованности.

Однако в предложенной модели не учитывается возможное приращение вязкости МЖ за счет "магнитовязкого" эффекта [17]. Фактическое приращение вязкости в сильных магнитных полях для магнетитового образца с объемной концентрацией 0.19–0.24 не превышает 5–6% [20]. В настоящее время отсутствует теория "магнитовязкого" эффекта, учитывающая специфику распределения скорости гидродинамического потока в пристеночном слое столбика МЖ, совершающего колебательное движение.

Полученные на основе метода комплексных измерений упруго-магнитных параметров МЖ в области магнитных полей высокой напряженности результаты, в частности значение намагниченности насыщения, можно сравнивать со значениями, полученными на основе других стандартных методов. Экспериментально установленные различия можно использовать для выявления физических механизмов, их обусловливающих [16–18].

Разработанная методика статического (гидростатического) эксперимента, а также динамического эксперимента с измерением частоты и коэффициента затухания колебаний системы "столбик МЖ, подвешенный в сильном и неоднородном магнитном поле", используемая для изучения степени постоянства упруго-магнитных параметров во времени, может быть полезной для изучения магнитофореза и процессов агрегирования магнитных наночастиц. Тем более что формирование пондеромагнитной упругости, как было показано в [9], осуществляется за счет эффектов взаимодействия тонких слоев МЖ в основаниях МЖ-столбика с неоднородным магнитным полем.

Интересно отметить, что для газов-наполнителей звукопроводов [13] поправка $\delta_\eta$ чрезвычайно мала, хотя на тех же частотах колебаний длина вязкой волны для газов приблизительно равна длине вязкой волны для жидкостей, а упругость газов сопоставима с пондеромоторной упругостью [18, 19].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе:

– осуществлено построение и проверка модельной теории формирования упругости МЖ в трубке, удерживаемой магнитной левитацией в сильном магнитном поле;

– введены понятия "пондеромоторный", "статический" и "динамический" коэффициенты упругости МЖ; намагниченность насыщения, полученная статическим методом – $M_{SS}$ и динамическим методом – $M_{Sd}$;

– показано, что намагниченность насыщения МЖ может быть получена с помощью пондеромоторного коэффициента упругости или гидростатического коэффициента упругости в насыщающем магнитном поле, а также динамического коэффициента упругости с поправкой на течение вязкой жидкости;

– отмечено, что описанная методика комплексных измерений упруго-магнитных параметров магнитной жидкости в сильном магнитном поле представляет интерес для исследования магнитофореза и агрегирования наночастиц в магнитных коллоидах.

Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Министерства образования и науки РФ. Код проекта 3.2751.2017/ПЧ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Odenbach S., Rylewicz T., Heyen M.* A rheometer dedicated for the investigation of viscoelastic effects in com-

mercial magnetic fluids // J. Magnetism Magn. Mater. 1999. V. 201. P. 198.

2. *Pop L.M., Odenbach S., Wiedenmann A., Matoussevitch N., Bonnemann H.* Microstructure and rheology of ferrofluids // J. Magnetism Magn. Mater. 2005. V. 289. P. 303.

3. *Koike K., Sato A.* Oscillating flow driven by a magnetic fluid column under fluctuating magnetic field // J. Magnetism Magn. Mater. 1993. V. 122. P. 217.

4. *Sapinski B., Horak W.* Rheological properties of MR fluids recommended for use in shock absorbers // Acta mechanica et automatica. 2013. V. 7. № 2. P. 107.

5. *Kamiyama S., Koike K.* Hydrodynamics of magnetic fluids // Brazil. J. Phys. 1995. V. 25. № 2. P. 83.

6. *Yangyang Liang, Guang Xi, Zhongguo Sun.* Numerical study of the damped oscillation of liquid column in U-tube with particle method // J. Fluids Eng. 2013. V. 135. № 1. P. 061202-1.

7. *Karpova G.V., Kutuev A.N., Ryapolov P.A., Polunin V.M., Zubarev E.K., Kovarda V.V.* On the dissipation processes in the oscillating system with a magneto-liquid element // Magnetohydrodynamics. 2009. V. 45. № 1. P. 85.

8. *Bibo A., Masana R., King A., Li G., Daqaq M.F.* Electromagnetic ferrofluid-based energy harvester // Phys. Lett. A. 2012. V. 376. P. 2163.

9. *Полунин В.М., Ряполов П.А., Платонов В.В., Кузько А.Е.* Свободные колебания магнитной жидкости в сильном магнитном поле // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 3. С. 302–307.

10. *Арефьев И.М., Арефьева Т.А.* Патент на изобретение РФ № 2558143. Заявл. 08.04.2014 № 2014113778/04, опубл. 27.07.2015, Бюл. № 21, МПК H01F 1/28.

11. *Страдомский Ю.И., Казаков Ю.Б., Филиппов В.А.* Патент на изобретение РФ № 2464101. Заявл. 01.04.2011 № 2011112604/03, опубл. 20.10.2012.

12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. Т. 6. 736 с.

13. *Ржевкин С.Н.* Курс лекций по теории звука. М.: Изд-во МГУ, 1960. 336 с.

14. *Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П.* Основы молекулярной акустики. М.: Наука, 1964. 514 с.

15. *Чечерников В.И.* Магнитные измерения. М.: Изд-во МГУ, 1969. 387 с.

16. *Rosensweig R.E.* Ferrohydrodynamics. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics. New-York, 1985. 344 p.

17. *Баштовой В.Г., Берковский Б.М., Вислович А.Н.* Введение в термомеханику магнитных жидкостей. М.: ИВТАН, 1985, 188 с.

18. *Polunin V.* Acoustics of nanodispersed magnetic fluids. London–New York: CRC Press, CISP, 2015. 472 p.

19. *Полунин В.М., Боев М.Л., Мьо Мин Тан, Карпова Г.В., Рослякова Л.И.* Упругие свойства магнитной жидкости с воздушной полостью, удерживаемой силами левитации // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 1. С. 63–69.

20. *Майоров М.М.* Измерение вязкости феррожидкости в магнитном поле // Магн. гидродинамика. 1980. № 4. С. 11–18.