

УДК 534.08

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СРЕДАХ С БОЛЬШИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ПОРИСТОСТИ В РАМКАХ ТЕОРИИ БИО

© 2017 г. Х. Х. Ильясов^{а, *}, А. В. Кравцов^{б, **}, С. В. Кузнецов^{а, ***},
С. Я. Секерж-Зенькович^{а, ****}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН 119526 Москва, пр. Вернадского 101, корп. 1

^бМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119991 ГСП-1, Москва, Ленинские горы

*e-mail: ilyasov@ipmnet.ru

**e-mail: avkravtsov@rambler.ru

***e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

****e-mail: seker@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 30.05.2016 г.

В рамках теории Био теоретически изучаются свойства акустических волн в флюидонасыщенных пористых средах с большими значениями пористости. Рассматриваются материалы, у которых объемный модуль упругости матрицы (скелета) сравним по величине с объемным модулем насыщающего поры флюида.

Ключевые слова: пористые среды, уравнения Био, медленная продольная волна.

DOI: 10.7868/S0320791917060041

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели, описывающие пористую среду в виде упругого скелета, заполненного вязким сжимаемым флюидом, впервые были предложены Я.И. Френкелем [1] и М.А. Био [2, 3]. Они предсказали существование в такой среде двух типов продольных волн, изучению свойств которых внутри и на границах различных по природе пористых сред посвящено значительное количество работ [4–10]. В большинстве случаев изучались материалы с небольшой пористостью (см., например, [11–15]), для которых влияние насыщающего поры флюида (жидкости или газа) на продольную и поперечную волны в скелете относительно невелико, а скорости продольных волн значительно отличаются друг от друга по величине.

Однако при определенных сочетаниях упругих свойств материалов и давления в насыщенных газом горных породах возможно возникновение условий, когда скорости продольных волн близки друг другу [16, 17]. Как показано в работе [17], в этой ситуации модуль упругости скелета будет близок по величине к модулю упругости сжатого газа. В случае искусственно созданных материалов с высокими значениями пористости, 0.9 и более [18, 19], условия близости упругих свойств скелета и насыщающего поры газа могут возникнуть и при атмосферном давлении, что представляет определенный интерес.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Акустические свойства насыщенных пористых сред будем рассматривать в рамках теории Био [3]:

$$\begin{aligned} H \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} - C \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} &= \\ &= \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}, \\ C \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - M \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} &= \\ &= \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - m \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\nu \partial \mathbf{w}}{\kappa \partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{w} = \beta(\mathbf{u} - \mathbf{U})$, $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$ – смещение частиц скелета пористой среды, $\mathbf{U} = \{U_x, U_y, U_z\}$ – смещение частиц флюида, $\rho = (1 - \beta)\rho_r + \beta\rho_f$ – средняя плотность пористой среды, ρ_r, ρ_f – плотность частиц скелета и плотность флюида соответственно, β – пористость среды, ν – кинематическая вязкость флюида, κ – гидравлический коэффициент проницаемости пор, $m = (1 + \alpha)\rho_f/\beta$, α – коэффициент дополнительных (присоединенных) масс.

Параметры H, C, M – упругие модули теории Био, которые представляют собой слабо изменя-

ющиеся с частотой величины и выражаются [14] как

$$H = \frac{(K_r - K_s)^2}{D_r - K_s} + K_s + \frac{4}{3}\mu,$$

$$D_r = K_r \left(1 + \beta \left(\frac{K_r}{K_f} - 1 \right) \right), \quad C = \frac{K_r(K_r - K_s)}{D_r - K_s},$$

$$K_s = \left(\frac{2n}{1-2n} + \frac{2}{3} \right) \mu, \quad M = \frac{K_r^2}{D_r - K_s},$$

где K_r – объемный модуль упругости материала скелета, K_f – объемный модуль упругости флюида в порах, K_s – объемный модуль упругости скелета, μ – модуль сдвига скелета, n – коэффициент Пуассона скелета пористой среды.

Представим смещения \mathbf{u} и \mathbf{w} через скалярный и векторный потенциалы:

$$\mathbf{u} = \text{grad}\Phi_s + \text{rot}\Psi_s, \quad (2)$$

$$\mathbf{w} = \text{grad}\Phi_f + \text{rot}\Psi_f.$$

В двумерном случае векторные потенциалы Ψ_s и Ψ_f имеют ненулевыми только Y -компоненты: $\Psi_s = \{0, \Psi_s, 0\}$, $\Psi_f = \{0, \Psi_f, 0\}$, поэтому в дальнейшем под Ψ_s , Ψ_f мы будем подразумевать именно их. Подставляя выражения для потенциалов (2) в уравнения Био (1) и применяя к полученным уравнениям операции div и rot , получаем

$$H \text{div grad}\Phi_s - C \text{div grad}\Phi_f =$$

$$= \rho \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial t^2},$$

$$C \text{div grad}\Phi_s - M \text{div grad}\Phi_f =$$

$$= \rho_f \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial t^2} - m \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\nu}{\kappa} \frac{\partial \Phi_f}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\mu \text{grad div}\Psi_s = \rho \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\partial^2 \Psi_f}{\partial t^2},$$

$$0 = \rho_f \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t^2} - m \frac{\partial^2 \Psi_f}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\nu}{\kappa} \frac{\partial \Psi_f}{\partial t}.$$

Для плоских монохроматических волн, распространяющихся в положительном направлении оси X в безграничной пористой среде, потенциалы могут быть записаны в виде $\Phi_s = A_s e^{i(\omega t - kx)}$, $\Phi_f = A_f e^{i(\omega t - kx)}$ и $\Psi_s = B_s e^{i(\omega t - kx)}$, $\Psi_f = B_f e^{i(\omega t - kx)}$. Волновые числа k связаны со скоростями волн соотношением $k = \omega/V$. Из условия нетривиальной разрешимости первых двух уравнений (3) по-

лучается дисперсионное соотношение для волновых чисел продольных волн k_+ и k_- :

$$(C^2 - HM)k^4 + \omega^2(\tilde{m}H + \rho M - 2\rho_f C)k^2 - \omega^4(\rho\tilde{m} - \rho_f^2) = 0, \quad (4)$$

а из последних двух – для волнового числа поперечной волны k_s :

$$k_s^2 = \omega^2 \frac{\rho\tilde{m} - \rho_f^2}{\mu\tilde{m}}. \quad (5)$$

Через \tilde{m} здесь обозначена величина $m - i\rho_f \nu / (\omega\kappa)$. В дальнейшем, если не оговаривается особо, ветви радикалов в выражениях для волновых чисел, получаемых из (4) и (5), выбираются таким образом, чтобы их вещественная часть была положительной.

В том случае, когда волновые числа продольных волн существенно различаются, $|k_+| \ll |k_-|$, что эквивалентно $|(HM - C^2)(\rho\tilde{m} - \rho_f^2) / (\tilde{m}H + \rho M - 2\rho_f C)| \ll 1$, можно использовать [14] приближенные соотношения

$$k_-^2 \approx \omega^2 \frac{\tilde{m}H + \rho M - 2\rho_f C}{HM - C^2} \quad (6)$$

$$\text{и } k_+^2 \approx \omega^2 \frac{\rho\tilde{m} - \rho_f^2}{\tilde{m}H + \rho M - 2\rho_f C}.$$

Как следует из (4) и (5), при стремлении частоты к нулю справедливы следующие оценки для волновых чисел:

$$k_+ \approx \omega \sqrt{\frac{\rho}{H}}, \quad k_- \approx \omega \sqrt{\frac{\tilde{m}H}{HM - C^2}}, \quad k_s \approx \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \quad (7)$$

откуда видно, что на низких частотах волновые числа одной из продольных (k_+) и поперечной (k_s) волн стремятся к аналогичным значениям в “сухом” скелете, а волновое число второй продольной волны k_- (будем называть ее волной Био) стремится к нулю как $\sqrt{\omega}$. Таким образом, при уменьшении частоты скорость волны Био, в отличие от скоростей двух других волн, стремится к нулю пропорционально корню квадратному от частоты. Выражения (6) становятся неприменимыми в том случае, когда модуль упругости скелета близок к модулю упругости насыщающего поры флюида. В [17] на примере газонасыщенных горных пород теоретически показано, что в этом случае зависимости скоростей продольных волн от частоты пересекаются и происходит “перестройка” характера продольных волн. Если в природных пористых средах описанные выше условия реализуются при значительном давлении газа в порах, то для искусственных материалов с малой жесткостью скелета, получаемой за счет большой

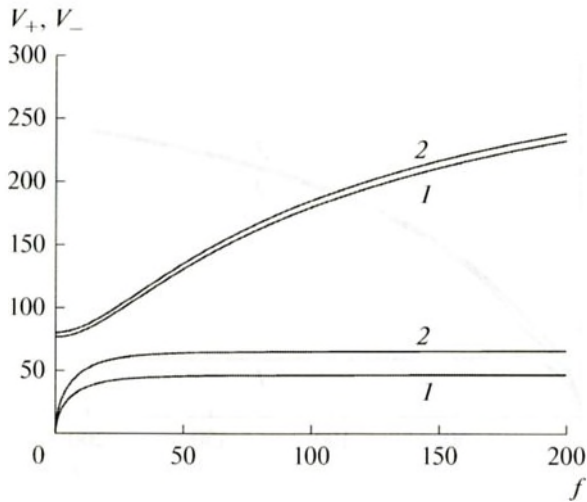


Рис. 1. Зависимости скорости первой V_+ (вверху) и второй V_- (внизу) продольных волн от частоты при значениях пористости скелета: 1 – $\beta = 0.97$, 2 – $\beta = 0.94$, асимптотические формулы.

пористости, это возможно даже при атмосферном давлении.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим семейство пористых материалов на основе вспененного полиуретан–полиэстера с воздушным заполнением пор. За основу примем изготавливаемый промышленно [19] материал со следующими параметрами: $\beta = 0.97$, $\rho_r = 1170 \text{ кг/м}^3$, $K_r = 1.5 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$, $K_s = 5.2 \times 10^4 \text{ Н/м}^2$, $\mu = 2.2 \times 10^4 \text{ Н/м}^2$, $\alpha = 0.25$, $\rho_f = 1.2 \text{ кг/м}^3$, $K_f = 1.3 \times 10^5 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 1.45 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\kappa = 5 \times 10^{-9} \text{ м}^2$. Будем изменять пористость исходного материала в диапазоне $\beta = 0.94 \dots 0.97$ при неизменном значении коэффициента Пуассона для скелета. Тем самым плотность скелета изучаемых нами сред меняется в два раза.

На рис. 1 приведены графики скоростей продольных волн в пористой среде в зависимости от частоты, вычисленные по соотношениям (6). Значения пористости и объемного модуля упругости скелета среды взяты следующими: 1 – $\beta = 0.97$, $K_s = 5.2 \times 10^4 \text{ Н/м}^2$; 2 – $\beta = 0.94$, $K_s = 2.1 \times 10^5 \text{ Н/м}^2$. Как следует из зависимостей, скорость второй продольной волны с увеличением частоты растет, но при этом остается меньшей по величине, чем скорость первой продольной волны. По этой причине вторую продольную волну в пористой среде часто называют “медленной” – см., например, [12].

Рассмотрим теперь поведение скоростей продольных волн сжатия, найденных прямым решением (4) для следующих значений пористости и объемного модуля упругости скелета: 1 – $\beta = 0.97$, $K_s = 5.2 \times 10^4 \text{ Н/м}^2$; 2 – $\beta = 0.955$, $K_s = 1.17 \times 10^5 \text{ Н/м}^2$; 3 – $\beta = 0.94$, $K_s = 2.1 \times 10^5 \text{ Н/м}^2$. Как видно из графиков, с ростом плотности скелета пористой среды меняется и асимптотическое поведение скоростей продольных волн в зависимости от частоты. В соответствии с приближенными формулами (6), при малых значениях плотности скелета скорость первой продольной волны стремится с ростом частоты к характерным значениям для “медленной волны”, а при больших значениях плотности – к характерным значениям скорости для “быстрой волны”. Для поведения второй продольной волны характерна обратная зависимость при увеличении плотности скелета.

Таким образом, для рассматриваемых упругих сред ассоциирование второй продольной волны (волны Био) с “медленной” продольной волной теряет смысл, поскольку для определенного набора параметров ее скорость может превышать скорость первой. Затухание на длину волны в такой ситуации также не может служить признаком первой или второй продольной волны. Как видно из (7), с уменьшением частоты затухание второй продольной волны стремится к бесконечности, и, как отмечалось многими авторами, в случае сред с малой пористостью для этой волны характерно значительно большее затухание по сравнению с первой продольной. Из представленных на рис. 3 зависимостей декремента затухания (затухания на длину волны) продольных волн от частоты и с учетом рис. 2 видно, что при стремлении частоты к нулю затухание первой продольной волны на единицу длины стремится к нулю, а второй продольной волны – к бесконечности. Однако с ростом частоты величины затухания для обеих волн становятся близкими, что делает также невозможным выделение первой или второй продольных волн по этому признаку.

Необычное поведение продольных волн в рассматриваемых в данной работе пористых средах связано с тем, что для различных значений упругих модулей в решении биквадратного уравнения (4) первой и второй продольной волне будут соответствовать разные знаки у радикала от дискриминанта. Обычно в случае сред с тяжелыми скелетами малой пористости выбор знака перед этим радикалом однозначным образом определяет тип продольной волны. При малых значениях частоты вещественная часть дискриминанта

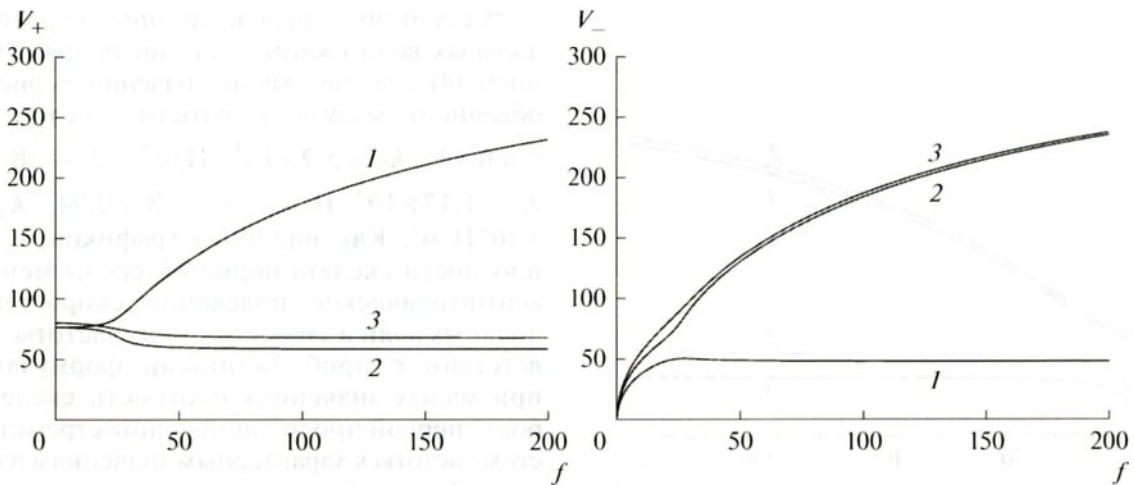


Рис. 2. Изменение скоростей первой (слева) и второй (справа) продольных волн в зависимости от частоты при значениях пористости скелета: 1 – $\beta = 0.97$, 2 – $\beta = 0.955$, 3 – $\beta = 0.94$.

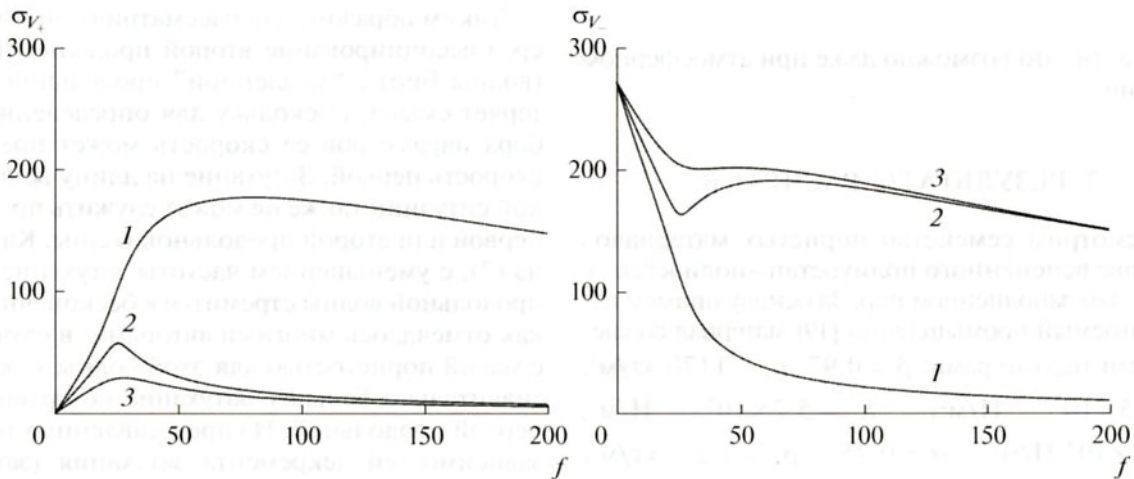


Рис. 3. Декремент затухания первой (слева) и второй (справа) продольных волн в зависимости от частоты при значениях пористости скелета: 1 – $\beta = 0.97$, 2 – $\beta = 0.955$, 3 – $\beta = 0.94$.

$$-\left(\frac{\rho_f v}{\omega k}\right)^2 + (mH + \rho M - 2\rho_f C)^2 + (HM - C^2)(\rho m - \rho_f^2)$$

отрицательна, и “скачкообразное” изменение свойств продольных волн возникает в момент обращения в ноль мнимой части:

$$2(HM - C^2)\rho - H(mH + \rho M - 2\rho_f C) = 0, \quad (8)$$

который, как видно из выражения, не зависит от частоты и определяется только упругими свойствами среды. Для рассматриваемых в данной работе сред скачкообразному изменению свойств продольных волн соответствуют значения $\beta^* = 0.96066$ и $K_s^* = 8.96 \times 10^4$ Н/м². Зависимости

скоростей продольных волн от частоты для значений пористости немного меньше ($\beta = 0.96063$) и больше ($\beta = 0.96069$) найденного значения приведены на рис. 4.

Как видно из графиков, для частот ниже критической $f \approx 25$ Гц поведение обоих типов волн при $\beta \leq \beta^*$ и $\beta \geq \beta^*$ практически не изменяется. Для частот выше критической значение пористости β определяет, какой из двух ветвей (верхней или нижней) будет следовать зависимость скорости продольной волны от частоты.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в рассмотренных средах с большими значениями пористости и упругими

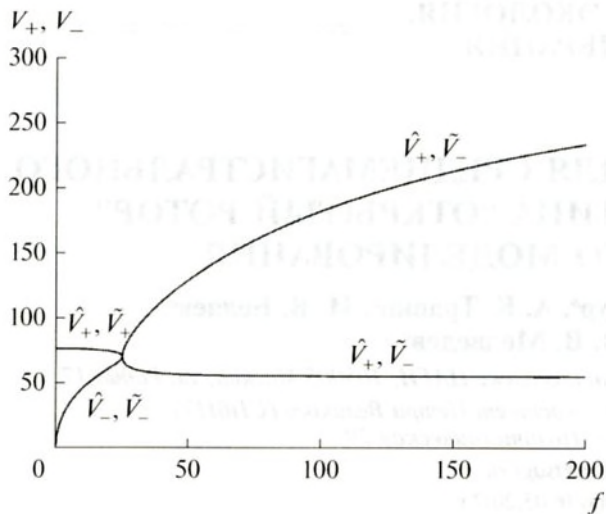


Рис. 4. Скорости продольных волн в области обращения в ноль выражения (8). \hat{V}_+ , \hat{V}_- при β чуть больше β^* , \tilde{V}_+ ; \tilde{V}_- при β чуть меньше β^* , где $\beta^* = 0.961066$.

свойствами скелета, сравнимыми с свойствами насыщающего поры газа, поведение продольных волн в части скорости и затухания становится настолько похожим, что для разделения по типам приходится прибегать к анализу их низкочастотной асимптотики.

Проведенный анализ показывает, что описанные в [17] условия близости скоростей продольных волн могут наблюдаться в высокопористых материалах в области звуковых частот при атмосферном давлении заполняющего поры газа. Указанные свойства могут представлять интерес для экспериментального исследования акустических свойств материалов с большим значением пористости.

Авторы хотели бы поблагодарить рецензентов за ценные замечания, которые способствовали улучшению работы. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-08-00311 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмoeлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геоф. 1944. Т. 8. № 4. С. 133–149.
2. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range. II. Higher frequency range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. V. 28. № 2. P. 168–191.
3. Biot M.A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. № 4. P. 1482–1498.

4. Хоа Н.Н., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных поверхностных кинематических возмущений в упруго-пористой полуплоскости // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т. 17. № 4. С. 567–576.
5. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Тарлаковский Д.В., Локтева Н.А. Численное моделирование динамики составного пороупругого тела // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Т. 75. № 2. С. 130–136.
6. Игумнов Л.А., Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Белов А.А. Гранично-элементный анализ волн на упругом, пористом и вязкоупругом полупространствах // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Т. 75. № 2. С. 145–151.
7. Данг К.З., Тарлаковский Д.В. Действие на границу упруго-пористого полупространства с касательной диафрагмой нестационарной нормальной осесимметричной нагрузки // Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Т. 20. № 1. С. 148–158.
8. Игумнов Л.А., Аменицкий А.В., Белов А.А., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н. Численно-аналитическое исследование динамики вязких пористо-упругих тел // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55. № 1. С. 1085–1144.
9. Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю. Распространение волн вдоль границы насыщенной пористой среды и жидкости // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 2. С. 201–211.
10. Марков М.Г., Маркова И.А., Садовничий С.Н. Распространение низкочастотных поверхностных волн вдоль плоских границ в насыщенных пористых средах // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 3. С. 333–340.
11. Plona T.J. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies // Appl. Phys. Lett. 1980. V. 36. P. 259–261.
12. Johnson D.L., Plona T.J. Acoustic slow waves and the consolidation transition // J. Acoust. Soc. Am. 1982. V. 72. P. 556–565.
13. Stoll R.D., Kan T.-K. Reflection of acoustic waves at water-sediment interface // J. Acoust. Soc. Am. 1981. V. 70. № 1. P. 149–156.
14. Turgut A., Yamamoto T. Measurements of acoustic wave velocities and attenuation in marine sediments // J. Acoust. Soc. Am. 1990. V. 87. P. 2376–2383.
15. Nagy P.B., Adler L., Bonner B.P. Slow wave propagation in air-filled porous materials and natural rocks // Appl. Phys. Lett. 1990. V. 56. № 25. P. 2504–2506.
16. Николаевский В.Н. Изменение сейсмических волн из-за присутствия газа в пластах // Геофизика. 2014. № 3. С. 14–20.
17. Михайлов Д.Н. Различие продольных волн Френкеля–Био в водонасыщенной и газонасыщенной пористых средах // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 1. С. 121–130.
18. Lakes R.S. Foam structures with a negative Poisson ratio // Science. 1987. V. 235. № 4792. P. 1038–1040.
19. Choi J.B., Lakes R.S. Nonlinear properties of polymer cellular materials with negative Poisson's ratio // J. Materials Science. 1992. V. 27. № 17. P. 4678–4684.