

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ
АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.21:534.26

ГИБРИДНАЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ СХЕМА
ДЛЯ РАСЧЕТА ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН
В ЛОКАЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВОДАХ

© 2018 г. Е. В. Глушков*, Н. В. Глушкова, А. А. Евдокимов

Кубанский государственный университет

Российская Федерация, 350040 Краснодар, ул. Ставропольская 149

**e-mail: evg@math.kubsu.ru*

Поступила в редакцию 07.06.2017 г.

Численное моделирование процесса возбуждения, распространения и дифракции бегущих волн в структурах с локальными неоднородностями (препятствиями) сопряжено с большими вычислительными затратами, связанными с необходимостью сеточной аппроксимации протяженных областей, а также с проблемами строгого учета условий излучения на бесконечности. Поэтому разрабатываются гибридные численно-аналитические подходы, основанные на сопряжении численного решения в локальной окрестности препятствия и/или источника с явным аналитическим представлением в полубесконечной внешней области. Однако в стандартных конечно-элементных пакетах возможность такого сопряжения с внешним полем, тем более в случае многомодового разложения, как правило, отсутствует. В настоящей работе предлагается гибридная вычислительная схема, позволяющая реализовать такое сопряжение, используя стандартный пакет. С его помощью строится набор численных решений, служащих базисом для искомого решения в локальной внутренней области. Неизвестные коэффициенты разложения по данному базису и по нормальным модам в полубесконечной внешней области определяются затем из условий непрерывности полей перемещений и напряжений на границе между этими областями. Приводится описание реализации данного подхода в скалярном и векторном случаях. Для оценки достоверности результатов и эффективности алгоритма проводится сопоставление с полуаналитическим решением задачи дифракции бегущих волн на горизонтальном препятствии, а также с конечно-элементным решением, полученным при искусственном ограничении области дискретизации с помощью поглощающих границ. В качестве примера рассматривается набегание фундаментальной антисимметричной волны Лэмба на поверхностные и частично заглубленные упругие препятствия. Отмечается, что предлагаемая гибридная схема может быть также использована для определения собственных частот и форм резонансного рассеяния, а также для определения характеристик бегущих волн во встроженных волноводах.

Ключевые слова: бегущие волны, произвольные локальные неоднородности, локально-глобальное решение, резонансные частоты рассеяния

DOI: 10.7868/S0320791918010082

ВВЕДЕНИЕ

Дифракция электромагнитных, акустических или упругих волн на локальных неоднородностях (препятствиях) является классической вычислительной задачей, актуальность разработки эффективных методов решения которой обусловлена многочисленными приложениями в приборостроении, акустоэлектронике, геофизике, гидроакустике, медицинской томографии, электронной микроскопии и других областях (см., например, обзор [1]). Рассмотренная в настоящей работе задача распространения бегущих волн Лэмба в упругих волноводах и их дифракции на локальных препятствиях различной природы возникает при разработке методов обнаружения и идентификации дефектов в тонкостенных конструкциях

(например, в корпусе авиалайнера из дюралюминия или композитного материала) в рамках развивающейся в настоящее время SHM-технологии (SHM – Structural Health Monitoring) [2]. Данная технология базируется на использовании встроженных пьезоактивных и оптоволоконных сенсоров для возбуждения и регистрации бегущих волн, распространяющихся на большие расстояния и дифрагирующих на неоднородностях любой природы, что позволяет вести мониторинг больших площадей с помощью сравнительно редкой сети пьезоэлементов. При этом для корректной интерпретации получаемых данных необходимы математические и компьютерные модели, адекватно описывающие процесс возбуждения бегущих волн пьезоактуаторами (амплитудно-ча-

стотные характеристики каждой моды), их распространение на сравнительно большие расстояния и взаимодействие с произвольными препятствиями.

В настоящее время для численного моделирования широко используются стандартные (коммерческие) пакеты, реализующие метод конечных элементов (МКЭ) или конечных разностей. Ввиду широкого диапазона их применимости в отношении размера, формы и неоднородности материала моделируемых объектов, развитого дружественного интерфейса, возможности постпроцессорной обработки и визуализации результатов расчетов они зачастую считаются универсальным инструментом компьютерного моделирования для научно-технических задач и инженерных приложений. Однако использование пакетов МКЭ при решении волновых задач, в частности при моделировании распространения и дифракции бегущих волн в бесконечных волноводных структурах с локальными неоднородностями, сталкивается с рядом трудностей.

Во-первых, для применения стандартного пакета МКЭ бесконечная область должна быть ограничена. Для этого на искусственных границах задаются поглощающие или неотражающие граничные условия различного вида, призванные корректно учесть отток волновой энергии на бесконечность [3]. Среди них особую популярность приобрели условия идеально согласованного слоя (PML – Perfectly Matched Layer) [4, 5], реализованные во многих коммерческих пакетах. Данный подход хорошо работает, особенно в скалярном случае, когда установившиеся гармонические колебания внешней среды описываются уравнением Гельмгольца. Но у него есть слабое место – появление точек дискретного спектра у волновых задач в ограниченных областях, которые отсутствуют в случае неограниченной области. Причем чем больше размер ограниченной области, тем гуще лежат точки дополнительного спектра. В случае расположения некоторых из них вблизи вещественной оси МКЭ-PML решение может значительно отличаться от искомого решения для бесконечной области на частотах, близких к этим точкам спектра.

Во-вторых, область, выделенная с помощью поглощающих граничных условий, должна включать в себя не только зону локальной неоднородности (рассеиватель), но и источник колебаний, а также точки, в которых измеряется рассеянное препятствием волновое поле. При большом удалении источника и/или сенсоров уровень вычислительных затрат значительно возрастает из-за увеличения числа узлов сетки, необходимых для аппроксимации решения на всем пути распространения волны от источника к препятствию и

сенсорам, а не только в зоне дифракции, где использование МКЭ необходимо по существу.

Одним из естественных способов преодоления указанных трудностей является сопряжение явного аналитического представления волнового поля во внешней волноводной структуре с численным решением для внутренней области, содержащей препятствие и/или источник [6]. Такое сопряжение может быть осуществлено различными способами. В рамках концепции DtN-отображений (DtN – Dirichlet-to-Neumann) [7] общее представление решения во внешней области используется для определения соотношений между искомыми функциями и их производными (перемещениями и напряжениями в упругом случае). DtN-операторы задают условия на искусственной границе, выделяющей внутреннюю область, позволяя применить МКЭ или другие методы, базирующиеся на сеточной аппроксимации. Получающиеся граничные условия трактуются как *точные* неотражающие граничные условия [8].

Другим способом сопряжения общего решения для внешней области с численным решением во внутренней является введение его непосредственно в схему МКЭ-дискретизации в форме специальных бесконечных [9] или масштабированных [10] элементов, что дает дополнительные уравнения в алгебраической системе МКЭ, вытекающие из условий сопряжения.

В любом случае сопряжение с внешним аналитическим решением требует определенной модификации стандартной схемы МКЭ. Однако для пользователя МКЭ-пакеты, как правило, являются “черным ящиком”, не дающим возможности изменять их исходный код. В настоящей статье предлагается гибридная численно-аналитическая схема, позволяющая, тем не менее, использовать стандартные пакеты для моделирования распространения и дифракции бегущих волн в волноводах с препятствиями, сопрягая численное решение в ограниченной области с внешним аналитическим. Она основана на предварительном построении набора МКЭ-решений с граничными условиями, наводимыми каждой нормальной модой на искусственных границах локальной области, которые затем играют роль базиса при сшивании с явным представлением решения во внешней области в виде разложения по нормальным модам. Данное разложение, содержащее несколько неизвестных коэффициентов, фактически является многомодовым бесконечным элементом, позволяющим корректно описывать отток волновой энергии на бесконечность без введения искусственных поглощающих граничных условий.

Идея и общая схема реализации данного подхода описывается сначала для скалярного случая,

а затем дается ее описание и приводятся тестовые численные примеры для упругой полосы.

1. СКАЛЯРНЫЙ СЛУЧАЙ

В качестве модельной задачи рассматривается прохождение набегающей волны $u_0(\mathbf{x}) = a_0(z)e^{i\zeta_0 x}$ через зону неоднородности полосового волновода $D = D_1 \cup D_2$, состоящего из ограниченной области $D_1: |x| \leq a$, которая содержит локальные неоднородности и в общем случае может быть произвольной формы (переменной толщины), и внешних однородных полуполос D_2 постоянной толщины $h: -h \leq z \leq 0$ для $a \leq |x| < \infty$ (рис. 1а). Комплексная амплитуда установившихся гармонических колебаний $u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, $\mathbf{x} = (x, z)$, удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad (1)$$

где $k = \omega/c$ – волновое число, c – скорость распространения колебаний в среде (для определенности – скорость звука), $\omega = 2\pi f$ – круговая частота установившихся колебаний, f – частота.

Гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опущен. Во внутренней области D_1 скорость звука и, соответственно, волновое число могут зависеть от пространственных координат: $c = c(\mathbf{x})$ и $k = k(\mathbf{x})$, а во внешней области D_2 они предполагаются постоянными. На внешней границе области D задаются условия Дирихле и/или Неймана. Пусть для определенности $u = 0$ на нижней границе $z = -h(x)$, а на верхней границе $\partial u / \partial n = 0$ (\mathbf{n} – внешняя нормаль к границе). На бесконечности требуется выполнение условий излучения, вытекающих из принципа предельного поглощения.

Набегающая волна $u_0(x)$ удовлетворяет уравнению (1) во внешней области $|x| \geq a$, где $k = \text{const}$, являясь собственным решением соответствующей краевой задачи с однородными граничными условиями $\partial u / \partial z = 0$ при $z = 0$ и $u = 0$ при $z = -h$. Волновое число ζ_0 – один из вещественных корней

$$\zeta_n = \sqrt{k^2 - p_n^2}, \quad p_n = \pi(n - 1/2)/h, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

дисперсионного уравнения

$$\Delta(\alpha, \omega) = \text{ch}(\sigma h) = 0, \quad \sigma = \sqrt{\alpha^2 - k^2} \quad (3)$$

для бегущих волн в полосе со свойствами области D_2 . Амплитудный множитель $a_0(z) = a_j(z) = \cos p_j z$, где j – номер нормальной моды, выбранной в качестве u_0 , а $a_j(z)$ – ее собственная форма, соответствующая корню $\zeta_0 = \zeta_j$.

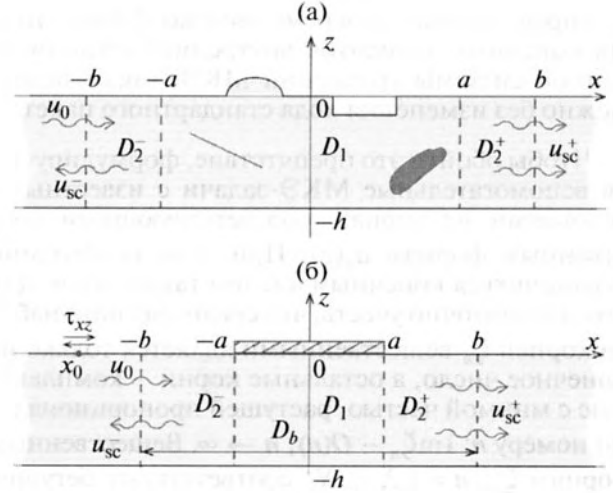


Рис. 1. (а) Полосовой волновод с неоднородностями различного типа, локализованными в области $D_1: |x| \leq a$ и (б) волновод с поверхностной накладкой; область МКЭ-дискретизации $D_b: |x| \leq b$.

В результате дифракции падающей волны u_0 на неоднородностях области D_1 возникает рассеянное поле u_{sc} , которое в области D_2 можно представить в виде разложения по нормальным модам с неизвестными коэффициентами c_n^\pm :

$$u_{sc}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} c_n^- a_n^-(z) e^{-i\zeta_n(x+a)}, & x \leq -a, \\ c_n^+ a_n^+(z) e^{i\zeta_n(x-a)}, & x \geq a, \end{cases} \quad a_n^- = a_n^+ = a_n. \quad (4)$$

Во внутренней области D_1 решение предполагается построить методом конечных элементов, для чего в дополнение к условиям на верхней и нижней границах необходимо задать граничные условия и на ее боковых торцах. В соответствии с представлением (4) на любых вертикальных отрезках $x = \pm b$, $-h \leq z \leq 0$, $b > a$ волновое поле можно записать с точностью до бесконечного набора неизвестных констант c_n^\pm :

$$u = u_0 + u_{sc}, \quad u_{sc}(\pm b, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^\pm a_n(z) e^{i\zeta_n r}, \quad r = b - a. \quad (5)$$

Наличие неизвестных коэффициентов не позволяет непосредственно использовать это представление для задания граничных условий на торцах прямоугольной области $|x| < b$ или для построения DtN-отображений, чтобы применить стандартный МКЭ-пакет. Использование разложения по модам в качестве дополнительного бесконечного элемента, так, чтобы коэффициенты

c_n^\pm определялись одновременно с коэффициентами конечных элементов внутренней области из единой системы уравнений МКЭ, также невозможно без изменения кода стандартного пакета.

Чтобы обойти это препятствие, формулируются вспомогательные МКЭ-задачи с известными условиями на торцах, соответствующими собственным формам $a_n(z)$. При этом необходимо ограничиться конечным числом таких задач. Для этого достаточно учесть, что среди счетного набора корней ζ_n вещественными является только их конечное число, а остальные корни – комплексные с мнимой частью, растущей пропорционально номеру n : $\text{Im}\zeta_n \sim O(n)$, $n \rightarrow \infty$. Вещественным корням ζ_n , $n = 1, 2, \dots, N_r$ соответствуют бегущие волны $a_n e^{\pm i\zeta_n(x \mp a)}$, распространяющиеся по волноводу D_2 вправо и влево от области дифракции D_1 без затухания, в то время как амплитуда нормальных мод, соответствующих комплексным корням, экспоненциально убывает с расстоянием:

$$|a_n e^{\pm i\zeta_n(x \mp a)}| \sim O(e^{-\text{Im}\zeta_n(|x| - a)}), \quad |x| - a \rightarrow \infty.$$

Данное свойство присуще волноводам конечной толщины любой структуры (многослойные материалы, анизотропные композитные пластины, акустические волноводы с подводным звуковым каналом, скважинные волноводы и т.п.). Это позволяет использовать описанный ниже подход и для таких структур с локальными препятствиями произвольного вида.

Ввиду экспоненциального затухания высших мод, в разложении (5) можно ограничиться конечным числом слагаемых $N \geq N_r$, оставаясь в пределах заданной точности (отметим, что учитываются все бегущие волны). Поэтому для построения МКЭ-решения выбирается область D_b ; $|x| \leq b$, включающая в себя область локальной неоднородности D_1 (рис. 1б). При достаточно большой величине $r = b - a$ вклад остальных экспоненциально затухающих высших мод в пределах заданной точности не влияет на результат. При уменьшении области МКЭ-дискретизации D_b , и тем самым числа узлов сетки, необходимо увеличить число мод N , удерживаемых в разложении (4).

Численное решение в области D_b ищется в виде разложения по базисным МКЭ-решениям $u_{F,n}^\pm(\mathbf{x})$:

$$u(\mathbf{x}) \approx u_F(\mathbf{x}) = u_{F,0}(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^N [c_n^+ u_{F,n}^+(\mathbf{x}) + c_n^- u_{F,n}^-(\mathbf{x})], \quad |x| \leq b. \quad (6)$$

Коэффициенты c_n^\pm здесь те же, что и в разложении (4), а функции $u_{F,n}^\pm(\mathbf{x})$ удовлетворяют в области D_b уравнению (1) и исходным граничным условиям на ее верхней и нижней границах, а также всем условиям на внутренних границах, если рассматриваются препятствия в виде трещин, полостей, включений и т.п. На боковых торцах $x = \pm b$ задаются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u_{F,0}(-b, z) &= u_0(-b, z), & u_{F,0}(b, z) &= 0, \\ u_{F,n}^-(-b, z) &= a_n^-(z) e^{i\zeta_n r}, & u_{F,n}^-(b, z) &= 0, \\ u_{F,n}^+(-b, z) &= 0, & u_{F,n}^+(b, z) &= a_n^+(z) e^{i\zeta_n r}, \\ -h \leq z \leq 0, & & n &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

Во всем волноводе D искомое решение $u(\mathbf{x})$ аппроксимируется функцией $u_N(\mathbf{x})$:

$$u(\mathbf{x}) \approx u_N(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_0(\mathbf{x}) + u_{sc,N}^-(\mathbf{x}), & x \leq -b, \\ u_F(\mathbf{x}), & |x| \leq b, \\ u_{sc,N}^+(\mathbf{x}), & x \geq b, \end{cases} \quad (8)$$

в которой $u_{sc,N}^\pm = \sum_{n=1}^N c_n^\pm a_n(z) e^{i\zeta_n x}$ – конечные суммы, аппроксимирующие рассеянное поле u_{sc} . При таком выборе автоматически выполняется условие непрерывности искомого решения на искусственных внутренних границах $x = \pm b$.

Для определения неизвестных коэффициентов c_n^\pm на искомую функцию $u_N(\mathbf{x})$ накладывается дополнительное условие непрерывности производной $\partial u_N / \partial x$ при $x = \pm b$. Используя обозначения

$$\begin{aligned} d_n^\pm(x, z) &= \frac{\partial u_{F,n}^\pm(x, z)}{\partial x}, \\ d_n^\pm &= \frac{\partial}{\partial x} [e^{\pm i\zeta_n(x \mp a)}]_{x=\pm b} = \pm i\zeta_n e^{i\zeta_n r}, \end{aligned}$$

эти условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (c_n^- [a_n^-(z) e_n^- - d_n^-(-b, z)] - c_n^+ d_n^+(-b, z)) &= \\ = d_0(-b, z) - \left. \frac{\partial u_0(x, z)}{\partial x} \right|_{x=-b}, & \quad (9) \\ \sum_{n=1}^N (-c_n^- d_n^-(b, z) + c_n^+ [a_n^+(z) e_n^+ - d_n^+(b, z)]) &= \\ = d_0(b, z), \quad -h \leq z \leq 0. & \end{aligned}$$

Дискретизация соотношений (9), сводящая их к линейной алгебраической системе относительно вектора $c = \{c_1^-, c_2^-, \dots, c_N^-; c_1^+, c_2^+, \dots, c_N^+\}$ длины $2N$, может быть проведена различными способами (здесь и далее в фигурных скобках приводятся компоненты векторов-столбцов). В рассматри-

ваемом случае удобно воспользоваться методом Галеркина, используя в качестве проекторов нормальные моды $a_m^\pm(z) = \cos p_m z$, обладающие свойством ортогональности относительно скалярного произведения в L_2 :

$$(a_n, a_m) = \int_{-h}^0 \cos p_n z \cos p_m z dz = \frac{h}{2} \delta_{mn},$$

δ_{mn} – символ Кронекера. Это приводит к системе размерности $2N \times 2N$

$$Ac = f, \tag{10}$$

матрица которой складывается из диагональной матрицы D и заполненной B :

$$A = D + B, \quad D = \text{diag}(d_1^-, d_2^-, \dots, d_N^-; d_1^+, d_2^+, \dots, d_N^+),$$

$$B = - \begin{bmatrix} B_1^- & B_1^+ \\ B_2^- & B_2^+ \end{bmatrix}, \quad d_m^\pm = ie_m^\pm / (2\zeta_m),$$

$$b_{1,mn}^\pm = (d_n^\pm, a_m) \Big|_{x=-b}, \quad b_{2,mn}^\pm = (d_n^\pm, a_m) \Big|_{x=b}.$$

Правая часть (10) представима в виде $f = f_0 + f_F$; в векторе f_0 ненулевым является только j -й элемент $f_{0,j} = -i\zeta_j e^{-i\zeta_j b} h/2$, где j – номер моды, взятой в качестве набегающей волны u_0 , а $f_F = \{f_{F,1}^-, \dots, f_{F,N}^-; f_{F,1}^+, \dots, f_{F,N}^+\}$ – вектор с элементами $f_{F,m}^\pm = (d_0, a_m) \Big|_{x=\pm b}$.

2. УПРУГИЙ ВОЛНОВОД

В качестве модельной задачи для векторного случая рассмотрим упругий изотропный волновод той же геометрии (рис. 1). Установившиеся гармонические колебания частиц упругой среды описываются вектором комплексной амплитуды смещений $\mathbf{u} = \{u_x, u_z\} = \{u, w\}$, который во внешней однородной области D_2 удовлетворяет векторному уравнению Навье–Ламе с постоянными коэффициентами Ламе λ и μ и плотностью ρ :

$$(\lambda + \mu)\nabla \cdot \text{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0. \tag{11}$$

Внешние границы области D_2 для определенности считаем свободными от напряжений:

$$\tau \Big|_{z=0} = \tau \Big|_{z=-h} = 0, \quad \tau = \{\tau_{xz}, \sigma_z\}. \tag{12}$$

Внутренняя область D_1 , как и ранее, может быть сложной формы, неоднородной и с произвольными условиями на границе. Набегающая волна \mathbf{u}_0 удовлетворяет в D_2 уравнению (11) и условиям (12).

Гибридная схема определения параметров рассеянного поля \mathbf{u}_{sc} и конечно-элементного решения \mathbf{u}_F остается в целом той же, что и в скаляр-

ном случае. Основное отличие связано с тем, что волновые числа ζ_n в разложении \mathbf{u}_{sc} вида (4) – это корни дисперсионного уравнения для свободного упругого слоя, а собственные формы соответствующих нормальных мод описываются вектор-функциями $\mathbf{a}_n^\pm(z)$. Как и выше, ограниченному набору вещественных корней $\zeta_n, n = 1, 2, \dots, N_r$ соответствуют бегущие волны (в рассматриваемом примере – симметричные и антисимметричные волны Лэмба [11]), а комплексным ($n > N_r$) – экспоненциально убывающие с удалением от D_1 составляющие. Соответственно, вектор-функциями являются и базисные МКЭ-решения $\mathbf{u}_{F,n}, n = 0, 1, \dots, N$ во вспомогательной области D_b . Граничные условия для их определения формулируются так, чтобы можно было воспользоваться свойством обобщенной ортогональности нормальных мод упругого слоя [12]:

$$(a_{m,x}, b_{n,x}) - (b_{m,z}, a_{n,z}) = 0, \quad n \neq m,$$

$$(f, g) = \int_{-h}^0 f(z)g(z)dz. \tag{13}$$

В этом соотношении перемножаются и интегрируются по z компоненты амплитудных функций нормальных мод для вектора смещений $\mathbf{u}_n = \mathbf{a}_n e^{i\zeta_n x}$ и напряжений на вертикальной площадке $\boldsymbol{\sigma}_n = \{\sigma_{n,xx}, \tau_{n,xz}\} = \mathbf{b}_n e^{i\zeta_n x}$: $\mathbf{a}_n = \{a_{n,x}, a_{n,z}\}$, $\mathbf{b}_n = \{b_{n,x}, b_{n,z}\}$.

В соответствии с соотношением (13) на торцах $x = -b$ и $x = b, -h \leq z \leq 0$ задается первая компонента перемещений $\mathbf{u}_{F,n} = \{u_{F,n}, w_{F,n}\}$ и вторая компонента напряжений $\boldsymbol{\sigma}_{F,n} = \{\sigma_{F,n}, \tau_{F,n}\}$:

$$\begin{pmatrix} u_{F,0} \\ \tau_{F,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{0,x} \\ \tau_{0,xz} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{F,n}^+ \\ \tau_{F,n}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\begin{pmatrix} u_{F,n}^- \\ \tau_{F,n}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,x}^-(z) \\ b_{n,z}^-(z) \end{pmatrix} e^{i\zeta_n x}, \quad x = -b,$$

$$\begin{pmatrix} u_{F,0} \\ \tau_{F,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{F,n}^+ \\ \tau_{F,n}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,x}^+(z) \\ b_{n,z}^+(z) \end{pmatrix} e^{i\zeta_n x}, \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix} u_{F,n}^- \\ \tau_{F,n}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = b.$$

Этим, как и в скалярном случае, автоматически обеспечивается непрерывность первой компоненты u_N вектора смещений \mathbf{u}_N и второй компоненты τ_N соответствующего вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma}_N$ суммарного искомого решения (аналога представления (8)). А условия непрерывности для оставшихся компонент – вертикальных смещений w_N и нормальных напряжений σ_N – исполь-

зуются для определения коэффициентов разложения c_n^\pm . Первое из них домножается на $b_{m,z}$, а второе на $a_{m,x}$, вычитается из первого и интегрируется по z в соответствии с соотношением ортогональности (13). В результате возникает система вида (10) с такой же структурой матрицы $A = D + B$, но, естественно, с иным представлением элементов d_m^\pm , $b_{1,mn}^\pm$ и $b_{2,mn}^\pm$.

Вид вещественных и комплексных ветвей дисперсионных кривых для волн Лэмба в однородном слое, т.е. частотных зависимостей волновых чисел $\zeta_n = \zeta_n(\omega)$, хорошо изучен. В классическом случае однородной упругой полосы численное определение значений ζ_n и соответствующих собственных форм $\mathbf{a}_n(z)$ и $\mathbf{b}_n(z)$ относительно несложно. Однако уже для многослойных изотропных, а тем более для анизотропных или функционально-градиентных материалов разработка и реализация соответствующих методов представляет собой самостоятельную, достаточно сложную проблему. Одним из путей ее решения является использование интегрального представления матрицы-функции Грина рассматриваемого волновода $k(\mathbf{x})$ в форме обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} k(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha, z) e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ &= \pm i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res} K(\alpha, z) \Big|_{\alpha=\pm\zeta_n} e^{i\zeta_n |x|}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $K = \hat{K}(\alpha, z)/\Delta(\alpha) = \mathcal{F}_x[k]$ — фурье-символ матрицы Грина, \mathcal{F}_x — оператор преобразования Фурье по переменной x ; $\Delta(\alpha)$ — общий знаменатель элементов матрицы K , определяющий дисперсионное уравнение $\Delta(\alpha, \omega) = 0$, корни которого ζ_n являются полюсами подынтегральной функции. Контур интегрирования Γ идет вдоль вещественной оси комплексной плоскости α , отклоняясь от нее при обходе вещественных полюсов $\pm\zeta_n$, $n = 1, 2, \dots, N$, в верхнюю или нижнюю полуплоскость в соответствии с принципом предельного поглощения [13]. Применение теории вычетов (леммы Жордана и теоремы Коши) дает альтернативное представление $k(\mathbf{x})$ в виде суммы нормальных мод (вычетов в полюсах $\pm\zeta_n$); в формуле (16) верхний знак для $x < 0$, нижний — для $x > 0$. Столбцы каждой из матриц

$$\operatorname{res} K(\alpha, z) \Big|_{\alpha=\pm\zeta_n} = \hat{K}(\pm\zeta_n, z)/\Delta'(\pm\zeta_n),$$

являясь вектор-функциями от z , с точностью до постоянного множителя совпадают между собой и с собственными формами нормальных мод для соответствующих волновых чисел (точек дис-

кретного спектра) $\pm\zeta_n$. В разложении вида (4) они берутся в качестве амплитудных функций $\mathbf{a}_n^\pm(z)$.

Явный вид элементов матрицы $K(\alpha, z)$ и знаменателя $\Delta(\alpha)$ для рассматриваемой однородной упругой полосы хорошо известен (см., например, [14]). Для волноводов более сложного строения (многослойные, анизотропные, пористые, функционально-градиентные) разработаны эффективные алгоритмы построения матрицы K , поиска полюсов ζ_n и вычисления вычетов K в этих полюсах [15–17], позволяющие применять предлагаемую гибридную схему анализа дифракции на локальных неоднородностях и в таких структурах.

3. ВЕРИФИКАЦИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Для проверки применимости и точности предлагаемой схемы была выбрана тестовая задача дифракции для упругого слоя с горизонтальным поверхностным препятствием (рис. 16). Ее полуаналитическое решение, полученное на основе сведения к интегральному уравнению, в пределах различимой погрешности можно считать точным. Кроме того, для оценки сравнительной эффективности гибридной схемы проводилось сопоставление с МКЭ-результатами, полученными для ограниченных областей, выделенных из рассматриваемой бесконечной полосы с помощью поглощающих граничных условий PML пакета Comsol Multiphysics [18]. В дальнейшем для краткости данный подход называется FEM-PML, а предлагаемая численно-аналитическая схема — FEM-An.

Ниже все численные результаты приводятся в безразмерном виде, получающемся при использовании в качестве трех базовых единиц длины $l_0 = h$, скорости $v_0 = v_s$ и плотности $\rho_0 = \rho$ ($v_s = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость поперечных волн в упругой среде). В этих единицах безразмерная круговая частота $\omega = 2\pi f h / v_s$, где f — размерная частота в герцах. Безразмерные параметры упругой среды $\lambda = 2.125$, $\mu = 1$ и $\rho = 1$ (коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$) соответствуют свойствам дюралюминиевой пластины ($v_s = 3132$ м/с, $\rho = 2700$ кг/м³).

Поверхностное препятствие (гибкая, но не растяжимая накладка, приклеенная к поверхности) моделируется условием отсутствия касательных смещений u_x и нормальных напряжений σ_{zz} в области $|x| < a$, $z = 0$ (рис. 16). В качестве источника колебаний задается сосредоточенная касательная нагрузка $\tau_{xz} = \delta(x - x_0)$, приложенная к поверхности слоя в точке $x = x_0$, либо, как в скалярном случае, задается набегающая волна $\mathbf{u}_0 = \mathbf{a}_0^+(z) e^{i\zeta_0 x}$, приходящая из бесконечности. Вещественные и комплексные ветви дисперсион-

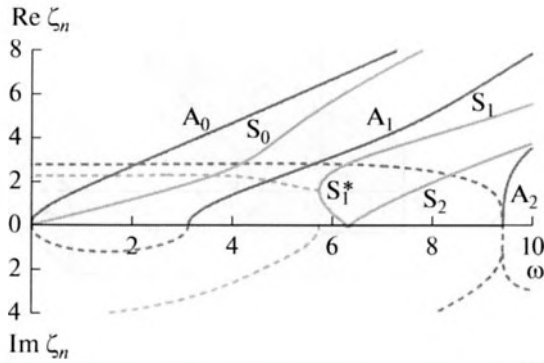


Рис. 2. Вещественные (сплошные линии) и комплексные (пунктир) ветви дисперсионных кривых $\zeta_n(\omega)$ для упругого слоя с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.34$.

ных кривых (зависимости $\zeta_n(\omega)$) для фундаментальных и нескольких первых высших симметричных и антисимметричных мод S_m и A_m , $m = 0, 1, 2, \dots$ рассматриваемого волновода показаны на рис. 2. Кривая S_1 имеет характерный изгиб, указывающий на наличие обратной волны S_1^* в частотном диапазоне $5.75 < \omega < 6.28$.

На рис. 3 приводится распределение амплитуды смещений $|\mathbf{u}(x, z)|$ в полосе с накладкой полуширины $a = 1$, полученное при $x_0 = -5$, $\omega = 2$ тремя способами:

- а) через решение интегрального уравнения (точное решение);
- б) МКЭ с условием поглощения на торцах $x = -10$ и $x = 6$ (FEM-PML);
- в) гибридная схема с МКЭ-дискретизацией в области D_1 : $|x| \leq b = 4$ (FEM-An).

Во втором случае для дискретизации области $-10 \leq x \leq 6$, $-1 \leq z \leq 0$ использовано 1350 конечных элементов (рис. 3б), а в третьем – 611 для внутренней области D_1 и $N = 3$ мод поля \mathbf{u}_{sc} в каждой из полуполос $x \leq -4$ и $x \geq 4$ (рис. 3в).

Результаты, полученные этими тремя способами, практически не различаются, что подтверждает возможность использования гибридной схемы. Но, несмотря на меньшее количество конечных элементов, время счета по этой схеме в данном примере оказалось большим, чем у FEM-PML, так как для построения базисных функций $\mathbf{u}_{F,n}^\pm$ пакет МКЭ (в нашем случае Comsol в среде Matlab) приходится применять $2N + 1$ раз. Следует отметить, что формируемые при этом алгебраические системы различаются только правыми частями. Поэтому, если пакет допускает сохранение обратной матрицы или формирование и решение системы с несколькими правыми частями

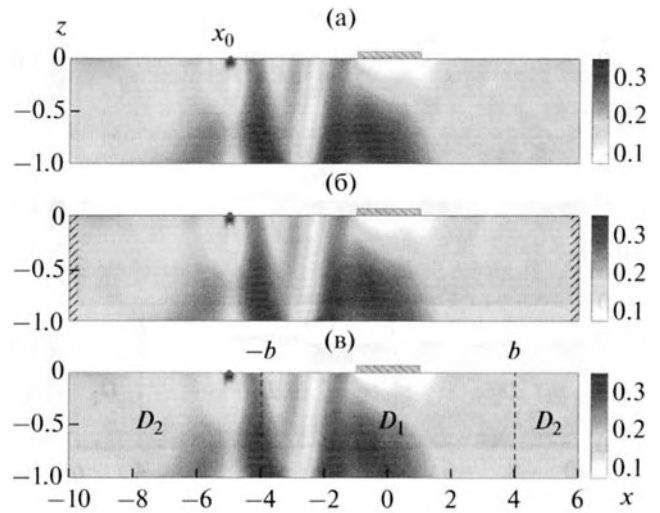


Рис. 3. Решение тестовой задачи $|\mathbf{u}(x, z)|$: (а) через сведение к интегральному уравнению (точное решение), (б) МКЭ для ограниченного образца с поглощающими граничными условиями на торцах (FEM-PML), (в) гибридная схема (FEM-An); касательная нагрузка $\tau_{xz} = \delta(x - x_0)$, $x_0 = -5$, $\omega = 2$.

за одно обращение, то дополнительных затрат, связанных с необходимостью применять пакет $2N + 1$ раз, можно избежать.

Но и без такой оптимизации преимущество FEM-PML быстро сходит на нет с удалением точки приложения нагрузки x_0 от препятствия из-за лавинообразного роста числа конечных элементов, необходимых для аппроксимации увеличивающейся области дискретизации. При расстояниях от источника до препятствия, больших некоторого порогового значения, погрешность МКЭ-решения резко возрастает (говорят, что решение “разваливается”) либо ресурсов персонального компьютера оказывается недостаточно для применения FEM-PML, в то время как затраты и точность гибридной схемы не зависят от точки приложения нагрузки x_0 . Кроме того, переход от исходной бесконечной области к ограниченной с помощью поглощающих граничных условий оказался неприменимым в диапазоне обратных волн, в то время как результаты гибридной схемы совпадают с точными и для таких частот (рис. 4).

Сопоставление результатов, полученных тремя указанными способами во всем рассматриваемом частотном диапазоне, иллюстрируется графиком частотной зависимости коэффициента прохождения $\kappa^+ = E^+/E_0$ (рис. 5); здесь E_0 – осредненное за период колебаний количество волновой энергии, поступающей в волновод от источника, а E^+ – проходящей через его поперечное сечение правее препятствия. Результаты

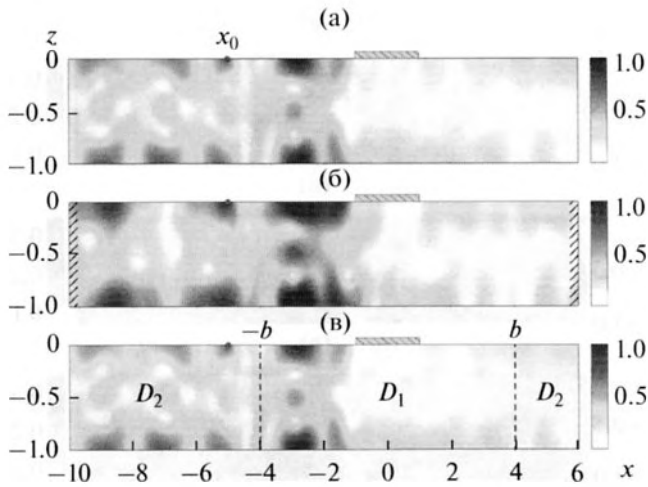


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но в диапазоне обратной волны ($\omega = 6$); результат FEM-PML (б) отличается от точного (а), в то время как FEM-An (в) дает корректные результаты и для таких частот.

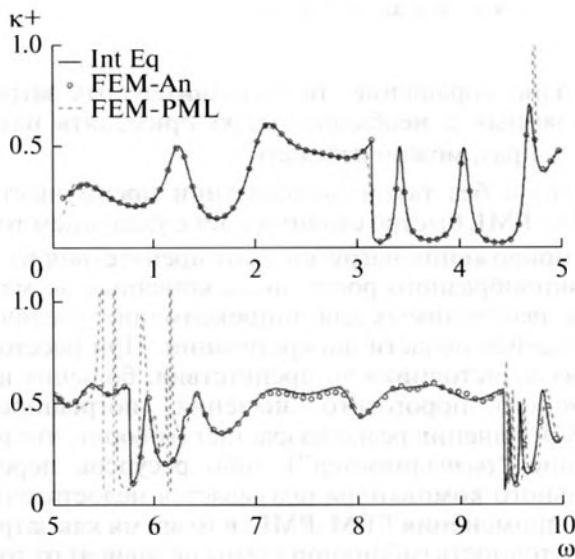


Рис. 5. Частотная зависимость коэффициента прохождения $\kappa^+(\omega)$; точное решение (сплошная линия), FEM-PML (пунктир) и FEM-An (маркеры).

FEM-An совпадают с точными во всем частотном диапазоне, в то время как наблюдается качественное отличие результатов FEM-PML от точных в диапазоне обратных волн и его окрестности.

В качестве иллюстрации применимости FEM-An в том случае, когда стандартный FEM-PML нельзя использовать из-за чрезмерной протяженности области дискретизации, проведены расчеты для упругого волновода с прямоугольным препятствием, на которое набегают волны, приходя-

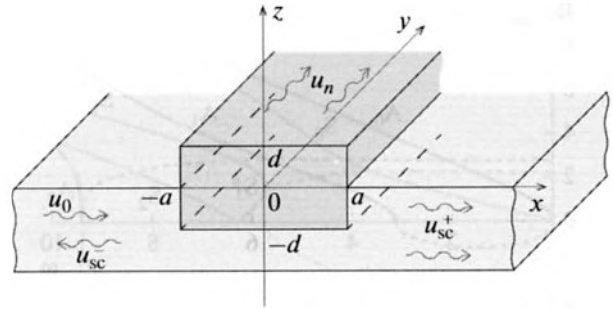


Рис. 6. Упругое прямоугольное препятствие $2a \times 2d$ для волн, распространяющихся вдоль двумерной полосы в плоскости (x, z) , или волновод прямоугольного сечения, встроенный в упругий слой для волн, бегущих вдоль оси y .

щая из бесконечности (рис. 6). На рис. 7 приведены частотные зависимости коэффициента прохождения $\kappa_A^+ = E^+/E_A$ фундаментальной антисимметричной моды A_0 , проходящей через область с препятствиями трех видов:

- 1) упругая, но более жесткая полосовая накладка прямоугольного сечения $2a \times 2d$ ($a = 1$, $d = 0.25$), приклеенная к поверхности слоя $z = 0$;
- 2) прямоугольное упругое включение такого же сечения $2a \times 2d$, встроенное в полосу на глубину $d = 0.25$;
- 3) то же для $d = 0.5$.

Упругие свойства накладки и включений: $\lambda = 4.25$, $\mu = 2$ и $\rho = 1.5$. В определении κ_A^+ , E_A – энергия набегающей волны, E^+ , как и ранее, – поток энергии через поперечное сечение правее препятствия.

В третьем случае высота выступающей над поверхностью слоя части включения $d = 0.5$ равна высоте накладки, рассмотренной в первом случае. Этим объясняется близость соответствующих кривых $\kappa_A^+(\omega)$ в двухмодовом диапазоне $0 < \omega < \pi$, в то время как включение, выступающее на вдвое меньшую высоту $d = 0.25$ (второй случай), слабее экранирует волну A_0 в этом диапазоне. Заглубленная часть мало влияет на коэффициент прохождения из-за слабой контрастности упругих свойств включения и слоя. В диапазоне высших мод $\omega > \pi$ различными становятся экранирующие свойства всех трех рассмотренных препятствий. Здесь интересно отметить резкое усиление экранирования меньшим включением в окрестности $\omega = 4.8$ при почти полном прохождении волны A_0 в двух других случаях. Это пример запирания волновода на частотах, близких к комплексным резонансным частотам рассеяния [14].

Использование FEM-An позволяет не только учитывать влияние упругих свойств и геометрии препятствия на характеристики рассеянного поля \mathbf{u}_{sc} во внешней области, но и анализировать волновое поле внутри объемного рассеивателя (рис. 8).

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Разработанная гибридная схема позволяет снизить вычислительные затраты и получить корректные результаты, используя стандартные МКЭ-пакеты. Тестовые сопоставления показали высокую точность определения характеристик отраженных и прошедших волн, а использование конечно-элементной дискретизации практически снимает ограничения на вид, форму и материальные параметры неоднородности.

2. Наряду с моделированием дифрагированного волнового поля, разработанный подход может быть использован для определения комплексных резонансных частот рассеяния ω_n , являющихся полюсами частотного спектра $\mathbf{u}_{sc}(x, \omega)$. В рамках гибридной схемы они хорошо аппроксимируются корнями характеристического уравнения $\det A(\omega) = 0$, где A – матрица системы (10).

Следует отметить, что полюса ω_n можно искать и в рамках FEM-PML. Они находятся среди собственных частот ограниченной области, которая вырезается из исходной бесконечной с помощью поглощающих граничных условий. Признаком, по которому проводится отбор, является локализация соответствующих собственных решений $u(x, \omega_n)$ в окрестности препятствия. Однако у ограниченного, но протяженного образца собственных частот оказывается слишком много (до нескольких сотен), что сильно затрудняет отбор нескольких требуемых. В рамках FEM-An область остается бесконечной, и все собственные решения связаны только с наличием локальной неоднородности, то есть лишних корней, введенных искусственным ограничением бесконечного волновода, нет.

3. Для близких к вещественной оси полюсов ω_n имеет место так называемый эффект ловушечной моды (trapped mode effect [19, 20]), который для упругих волноводов проявляется в виде как резкого резонансного блокирования бегущих волн одиночными препятствиями на данной частоте ($\kappa^+ \approx 0$) [14], так и резонансного пропускания ($\kappa^+ \approx 1$) в случае множественных препятствий [21]. В нестационарном поле ловушечные колебания $\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t)$ локализируются в окрестности препятствия, что подтверждается экспериментальными измерениями колебаний поверхности с помощью лазерного виброметра [22, 23].

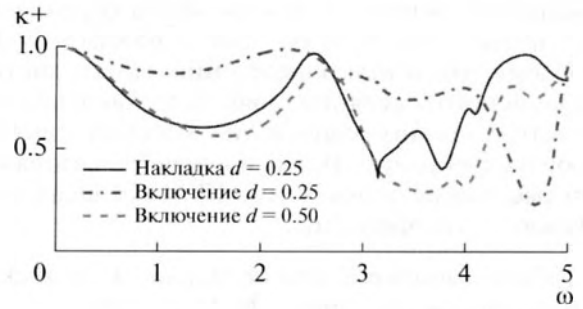


Рис. 7. Частотные зависимости коэффициента прохождения $\kappa_A^+(\omega)$ для фундаментальной моды A_0 , набегающей на поверхностную накладку и наполовину заглубленные включения.

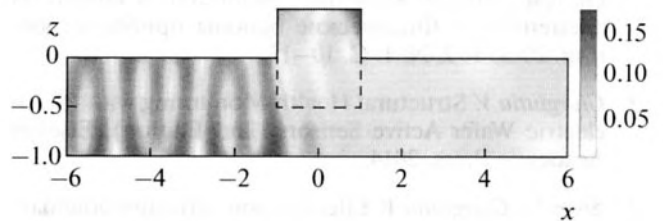


Рис. 8. Амплитуда волнового поля $|u(x, z)|$ в слое с прямоугольным упругим включением при набегающей волне A_0 на частоте $\omega = 4$; $a = 1$, $d = 0.5$.

Значения резонансных полюсов определяются размерами, формой и материальными свойствами рассеивателя, поэтому изучение закономерностей их появления и движения вблизи вещественной оси при варьировании параметров препятствия создает основу для разработки алгоритмов оценки потенциальной опасности скрытых дефектов по резонансным характеристикам рассеяния зондирующих сигналов (метод резонансной идентификации). В частности, для повышения разрешающей способности SHM-систем активного волнового мониторинга тонкостенных конструкций из композитных материалов ультразвуковыми бегущими волнами.

4. Еще одной, тесно связанной с предыдущей областью применения FEM-An является расчет характеристик бегущих волн во встроенных волноводах произвольного сечения. Область D рассмотренных выше двумерных задач можно считать поперечным сечением волновода, встроенного в упругий слой (рис. 6). Такие задачи нередко называют 2.5-мерными [24], так как волны распространяются в направлении, ортогональном к двумерному поперечному сечению. Их решение также строится на основе МКЭ-дискретизации ограниченной области, выделенной из бесконечной области D с помощью поглощающих или демпфирующих граничных условий [25, 26]. К

сожалению, переход к искусственно ограниченной любым способом области порождает ту же проблему, что и при определении характеристик резонансного рассеяния: появляется большое количество лишних корней, из которых сложно отобрать требуемые. И, как и в задаче о резонансном рассеянии, применение FEM-An позволяет избежать этой проблемы.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01191).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов А.Н., Боголюбов Н.А., Свешников А.Г.* Математическое моделирование волноведущих систем методом конечных разностей и конечных элементов // *Физические основы приборостроения*. 2013. Т. 2. № 1. С. 10–17.
2. *Giurgiutiu V.* Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors (2nd Edition). Elsevier Academic Press, 2014.
3. *Shen Y., Giurgiutiu V.* Effective non-reflective boundary for Lamb waves: Theory, finite element implementation, and applications // *Wave Motion*. 2015. V. 58. P. 22–41.
4. *Berenger J.-P.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // *J. Computational Physics*. 1994. V. 114(2). P. 185–200.
5. *Joly P.* An elementary introduction to the construction and the analysis of perfectly matched layers for time domain wave propagation // *SeMA J.* 2012. V. 57. P. 5–48.
6. *Moulin E., Assaad J., Delebarre Ch., Osmont D.* Modeling of Lamb waves generated by integrated transducers in composite plates using a coupled finite element-normal modes expansion method // *J. Acoust. Soc. Am.* 2000. V. 107. № 1. P. 87–94.
7. *Harari I., Patlashenko I., Givoli D.* Dirichlet-to-Neumann maps for unbounded wave guides // *J. Computational Physics*. 1998 V. 143. P. 200–223.
8. *Givoli D., Patlashenko I.* Dirichlet-to-Neumann boundary condition for time-dependent dispersive waves in three-dimensional guides // *J. Computational Physics*. 2004 V. 199. P. 339–354.
9. *Pinto T., Coyette J.-P.* Conjugated infinite elements for two-dimensional time-harmonic elastodynamics // *J. Computational Acoustics*. 2000. V. 8. № 3. P. 473–493.
10. *Gravenkamp H., Birk C., Song Ch.* Simulation of elastic guided waves interacting with defects in arbitrarily long structures using the Scaled Boundary Finite Element Method // *J. Computational Physics*. 2015. V. 295(15). P. 438–455.
11. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
12. *Зильбергейт А.С., Нуллер Б.М.* Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // *Докл. АН СССР*. 1977. Т. 234. № 2. С. 333–335.
13. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
14. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В.* Блокирование бегущих волн и локализация энергии упругих колебаний при дифракции на трещине // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. № 3. С. 314–325.
15. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Кривонос А.С.* Возбуждение и распространение упругих волн в многослойных анизотропных композитах // *Прикладная математика и механика*. 2010. Т. 74. № 3. С. 419–432.
16. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И.* Влияние пористости на характеристики волн релеевского типа в многослойном полупространстве // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 2. С. 234–245.
17. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И., Жанг Ч.* Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // *Акуст. журн.* 2012. Т. 58. № 3. С. 370–385.
18. <https://www.comsol.com/comsol-multiphysics>
19. *Ursell F.* Trapping modes in the theory of surface waves // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1951. V. 47(2). P. 347–358.
20. *Linton C.M., Evans D.V.* Trapped modes above a submerged horizontal plate // *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1991. V. 44. № 3. P. 487–506.
21. *Glushkov E., Glushkova N., Golub M., Eremin A.* Resonance blocking and passing effects in two-dimensional elastic waveguides with obstacles // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. V. 130 (1). P. 113–121.
22. *Glushkov E., Glushkova N., Golub M.V., Moll J., Fritzen C.-P.* Wave energy trapping and localization in a plate with a delamination // *Smart Mater. Struct.* 2012. V. 21(12). 125001. 12 p.
23. *Glushkov E., Glushkova N., Eremin A., Lammering R.* Trapped mode effects in notched plate-like structures // *J. Sound Vib.* 2015. V. 358. P. 142–151.
24. *François S., Schevenels M., Galvín P., Lombaert G., Degrande G.* A 2.5D coupled FE–BE methodology for the dynamic interaction between longitudinally invariant structures and a layered halfspace // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2010. V. 199. P. 1536–1548.
25. *Castaings M., Lowe M.* Finite element model for waves guided along solid systems of arbitrary section coupled to infinite solid media // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008. V. 123. P. 696–708.
26. *Gravenkamp H., Birk C., Van J.* Modeling ultrasonic waves in elastic waveguides of arbitrary cross-section embedded in infinite solid medium // *Computers and Structures*. 2015. V. 149. P. 61–71.