АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2018, том 64, № 2, с. 125–138

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.2:517.4

РАССЕЯНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА РЕФРАКЦИОННО-ПЛОТНОСТНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ МАЛОГО ВОЛНОВОГО РАЗМЕРА И РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

© 2018 г. К. В. Дмитриев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет
119991 ГСП-1, Москва, Ленинские горы
e-mail: kdmitrie@aesc.msu.ru

Поступила в редакцию 25.04.2017 г.

Рассмотрено рассеяние акустических волн на неоднородностях малого волнового размера с помощью аппарата матричных функций Грина, который позволяет единообразно учесть как рефракционную, так и плотностную составляющие неоднородности. Приведены оценки мультипольных компонент поля, рассеянного нерезонансной неоднородностью. При малых ее размерах достаточно рассмотреть только рассеяние монопольного и дипольного типов. Данные выводы подтверждаются анализом поля, рассеянного круговым цилиндром малого волнового радиуса. Полученные результаты используются при численном решении уравнения типа Липпмана–Швингера. Приводится вид дискретизованной матричной функции Грина при одинаковых значениях пространственных аргументов. Она позволяет учитывать процессы многократного рассеяния внутри каждого элемента дискретизации, имеющего малый волновой размер. Ее использование автоматически приводит к выполнению соотношений между фазой и амплитудой вторичных источников акустического поля.

Ключевые слова: уравнение Липпмана–Швингера, рассеяние волн, матричные функции Грина

DOI: 10.7868/S032079191802003X

1. ВВЕДЕНИЕ

Распространение акустической волны в среде, неоднородной по фазовой скорости звука $c(\mathbf{z})$ и плотности $\rho(\mathbf{z})$, может рассматриваться с точки зрения возникновения в каждой точке неоднородности вторичных источников поля. Эти вторичные источники равны произведению функции рассеивателя, которая описывает неоднородности среды, и акустического поля в фиксированной точке $\mathbf{z}$. В свою очередь, акустическое поле складывается из падающего поля, которое создается первичными источниками $\phi(\mathbf{x},\omega)$, расположенными в точках $\mathbf{x}$ за пределами области $\mathfrak{R}$ присутствия неоднородностей, и из полей всех вторичных источников. Таким образом, даже при допущении возможности произвольного выбора пространственных распределений $c(\mathbf{z})$ и $\rho(\mathbf{z})$ возникающие вторичные источники не являются произвольными. Так, для простейшего случая точечной чисто рефракционной ($\rho \equiv \mathrm{const}$) неоднородности монопольного типа в [1] было показано, что амплитуда коэффициента рассеяния, связывающего вторичный источник и падающее поле, ограничена по величине и однозначно зависит от фазы этого коэффициента. В [2] этот вывод обобщается на случай произвольной рефракционно-плотностной неоднородности малого волнового размера. Полученные ограничения являются следствием процессов многократного рассеяния, находящих свое отражение в некоторых свойствах функций Грина. Эти свойства будут рассмотрены в данной работе.

Следует отметить два важных случая, в которых требуется решение прямой задачи рассеяния для совокупности дискретных неоднородностей. Во-первых, это нужно при численном моделировании с помощью уравнения типа Липпмана–Швингера, когда неоднородная среда разбивается на конечные элементы малого волнового размера; во-вторых, когда рассматривается метаматериал, представляющий собой систему дискретных элементов – неоднородностей малого волнового размера, которые могут, в ряде случаев, выступать в роли резонаторов. При этом также необходимо иметь дело с дискретной функцией Грина и учитывать многократное рассеяние внутри каждого элемента разрешения.

Структура представляемой работы включает введение и три части. В п. 2 рассматривается рассеяние акустического поля на комбинированной

рефракционно-плотностной неоднородности малого волнового размера. Показано, что в отсутствие резонансов рассеянное поле на расстояниях, существенно превышающих размер рассеивателя, определяется только монопольной и дипольной компонентами. В п. 3 рассмотрен конкретный пример поля, рассеянного на неоднородности в виде однородного кругового цилиндра, для которого существует аналитическое решение задачи рассеяния. В п. 4 приводится процедура численного решения уравнения типа Липпмана–Швингера в неоднородной по плотности и сжимаемости среде. При этом показано, как преодолеть затруднение, которое связано с учетом многократного рассеяния внутри элемента среды с отличным от фонового значением плотности.

2. РАССЕЯНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОСТИ МАЛОГО ВОЛНОВОГО РАЗМЕРА

Решение прямой задачи рассеяния в неоднородной непоглощающей среде с помощью уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 p(\mathbf{z},\omega) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{z})} p(\mathbf{z},\omega) = \\ = \phi(\mathbf{z},\omega) + \frac{\nabla\rho(\mathbf{z},\omega)}{\rho(\mathbf{z},\omega)}\nabla p(\mathbf{z},\omega)$$

для спектральных амплитуд $p(\mathbf{z},\omega)$ поля акустического давления в монохроматическом случае при временной зависимости полей $\sim\exp(-i\omega t)$ предполагает замену [3, 4] $p(\mathbf{z},\omega) = \sqrt{\rho(\mathbf{z})/\rho_0}V(\mathbf{z},\omega)$. При этом уравнение Гельмгольца приобретает вид $\nabla^2 V(\mathbf{z},\omega) + k_0^2 V(\mathbf{z},\omega) = \phi(\mathbf{z},\omega) + \nu(\mathbf{z},\omega)V(\mathbf{z},\omega)$, где $k_0 = \omega/c_0$ – волновое число в однородной фоновой среде с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0, $\nu(\mathbf{z},\omega)$ – функция рассеивателя:

$$\nu(\mathbf{z},\omega) \equiv \omega^2\left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{z})}\right) + \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{z})}{\rho_0}}\nabla^2\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{z})}}\right). \quad (1)$$

Если известно падающее поле $V_0(\mathbf{z},\omega)$, которое создают первичные источники $\phi(\mathbf{z},\omega)$ в однородной фоновой среде, то полное поле $V(\mathbf{z},\omega)$ в среде, содержащей область неоднородности $\Re$, может быть найдено с помощью решения уравнения Липпмана–Швингера

$$V(\mathbf{z},\omega) = V_0(\mathbf{z},\omega) + \\ + \int_{\Re} G_0(\mathbf{z}-\mathbf{z}')\nu(\mathbf{z}',\omega)V(\mathbf{z}',\omega)d\mathbf{z}', \quad (2)$$

где $G_0(\mathbf{z}-\mathbf{z}')$ – скалярная функция Грина однородной среды. К недостаткам данного подхода следует отнести довольно сложный вид функции рассеивателя (1), особенно в тех случаях, когда рассматриваемая среда неоднородна по плотности или, тем более, в задаче присутствуют границы различных сред. В связи с этим представляется целесообразным развивать подход к решению задач рассеяния, основанный не на уравнении Гельмгольца, а на исходной системе линеаризованных уравнений гидродинамики [2, 5]. Следуя такому подходу, вводятся в обозначениях Дирака вектор-столбцы полевых переменных $\left|u^{\pm}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}\mathbf{v}^{\pm}\\ p^{\pm}\end{pmatrix}$ и первичных источников поля $\left|F^{\pm}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}\mathbf{f}^{\pm}\\ \phi^{\pm}\end{pmatrix}$, где верхним индексом "+" обозначаются запаздывающие, а верхним индексом "–" – опережающие поля колебательной скорости $\mathbf{v}^{\pm}$ и акустического давления $p^{\pm}$, а также первичные скалярные $\phi^{\pm}$ и векторные $\mathbf{f}^{\pm}$ источники. Тогда система уравнений гидродинамики в случае точечных первичных источников, расположенных в точке $\mathbf{x}$ за пределами области расположения неоднородности $\Re$,

$$\begin{cases} -i\omega\rho(\mathbf{z})\mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{z}}p^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{\pm}\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}), \\ \nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) - i\omega\eta(\mathbf{z})p^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \phi^{\pm}\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}), \end{cases} \quad (3)$$

записывается в простой матричной форме:

$$\hat{A}(\mathbf{z})\left|u^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\rangle = \left|F^{\pm}\right\rangle\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}). \quad (4)$$

Здесь $\eta(\mathbf{z}) \equiv \dfrac{1}{\rho(\mathbf{z})c^2(\mathbf{z})}$ – сжимаемость; $\hat{A}(\mathbf{z})$ – матричный дифференциальный оператор, описывающий распространение волны в неоднородной среде; аргумент ω при записи полей $\mathbf{v}^{\pm}$ и $p^{\pm}$ для краткости опускается. Для поля в однородной фоновой среде с плотностью ρ_0 и сжимаемостью η_0 аналогично вводится оператор $\hat{A}_0(\mathbf{z})$. Оператор $\hat{A}_1(\mathbf{z}) \equiv \hat{A}_0(\mathbf{z}) - \hat{A}(\mathbf{z})$ представляет собой диагональную матрицу, элементы которой зависят от пространственных координат:

$$\hat{A}_{1,D=2}(\mathbf{z}) = i\omega\begin{pmatrix}\rho'(\mathbf{z}) & 0 & 0\\ 0 & \rho'(\mathbf{z}) & 0\\ 0 & 0 & \eta'(\mathbf{z})\end{pmatrix};$$
$$\hat{A}_{1,D=3}(\mathbf{z}) = i\omega\begin{pmatrix}\rho'(\mathbf{z}) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \rho'(\mathbf{z}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \rho'(\mathbf{z}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \eta'(\mathbf{z})\end{pmatrix}. \quad (5)$$

Здесь $\rho'(\mathbf{z}) \equiv \rho(\mathbf{z}) - \rho_0$ и $\eta'(\mathbf{z}) \equiv \eta(\mathbf{z}) - \eta_0$ – добавки к фоновым значениям плотности и сжимаемости, D – размерность пространства. Оператор $\hat{A}_1(\mathbf{z})$

не содержит дифференцирования и является аналогом функции рассеивателя $v(\mathbf{z})$. Явный вид всех трех операторов приведен в [2].

Решение $\left|u^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\rangle$ уравнения (4) и решение аналогичного уравнения для однородной фоновой среды $\left|u_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\rangle$ могут быть выражены через матричные функции Грина неоднородной $\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})$ и однородной $\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})$ среды соответственно:

$$\begin{aligned}\left|u^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\rangle &= \hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\left|F^{\pm}\right\rangle,\\ \left|u_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\right\rangle &= \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})\left|F^{\pm}\right\rangle.\end{aligned} \tag{6}$$

Матричные функции Грина $\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'')$ неоднородной среды для произвольных точек $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}''$ являются решениями матричных уравнений типа Липпмана–Швингера [2]:

$$\begin{aligned}\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') &= \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') +\\ &+ \int\limits_{\Re} \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')\hat{A}_1(\mathbf{z}')\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')d\mathbf{z}'.\end{aligned} \tag{7}$$

Данная запись позволяет абстрагироваться от конкретного вида первичных источников поля, а сами эти поля легко вычисляются с помощью соотношений (6) для одиночного точечного источника или с помощью интегрирования по области расположения первичных источников.

Пусть область расположения неоднородности $\Re$ ограничена сферой конечного радиуса R_0 с центром в точке $\mathbf{r}_0$ (в двумерном случае границей является окружность такого же радиуса). Справедливо разложение входящей в подынтегральное выражение в (7) функции Грина $\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')$ в ряд Тейлора (с центром в точке $\mathbf{r}_0$) по второму ее аргументу $\mathbf{z}' \in \Re$:

$$\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}') = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\hat{\mathbf{D}}_2^{m-1}\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)}{(m-1)!}. \tag{8}$$

Предполагается, что $\mathbf{z}'$ отстоит от центральной точки $\mathbf{r}_0$ настолько, что ряд (8) сходится. Здесь введен дифференциальный оператор $\hat{\mathbf{D}}_2^{m-1} \equiv \left(-(\mathbf{z}'-\mathbf{r}_0)\nabla_2\right)^{m-1}$, действующий отдельно на каждый матричный элемент функции Грина, причем нижний индекс "2" означает, что производная берется по второму ее векторному аргументу. Подстановка (8) в (7) позволяет записать

$$\begin{aligned}&\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') - \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') =\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}\int\limits_{\Re}\left\{\hat{\mathbf{D}}_2^{m-1}\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\right\}\hat{A}_1(\mathbf{z}')\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')d\mathbf{z}'.\end{aligned} \tag{9}$$

Сумма, стоящая в правой части этого выражения, представляет собой разложение рассеянного неоднородностью поля $\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') - \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'')$ в ряд, каждый m-й член которого содержит вклад рассеяния от 0-го (монопольного) до m-го порядков мультипольности включительно.

Функция Грина однородной среды $\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})$ в пространствах разной размерности D представляет собой симметричную матрицу. Процедура ее расчета описана в работе [5], однако при этом в некоторых выражениях в [5] содержится неточность, и поэтому данная процедура приводится ниже повторно.

Явное выражение для матричной формы функций Грина $\hat{G}_0^{\pm}$ получается [6, с. 304] переходом к пространственным частотам $\mathbf{k}$, т.е. разложением полей с помощью набора плоских гармонических волн, для которых давление и колебательная скорость изменяются по закону $\sim\exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})$. Здесь пространство векторов $\mathbf{k}$ является фурье-сопряженным к пространству векторов $\mathbf{r}$; $|\mathbf{k}| \in [0;+\infty)$ при фиксированной частоте ω. В этом пространстве оператор $\hat{A}_0$ принимает вид обычной матрицы $\hat{A}_0(\mathbf{k})$, обращение которой дает $\left(\hat{A}_0(\mathbf{k})\right)^{-1} = \hat{B}(\mathbf{k})\dfrac{1}{k_0^2-\mathbf{k}^2}$. Здесь $\hat{B}(\mathbf{k})$ – обычная матрица, содержащая числа и компоненты вектора $\mathbf{k}$, которая вычисляется согласно стандартным правилам обращения матриц. Для получения функций Грина $\hat{G}_0^{\pm}$ в координатном представлении нужно выполнить обратное фурье-преобразование (переход от пространства векторов $\mathbf{k}$ в пространство векторов $\mathbf{r}$) этого выражения. При этом в знаменателе дроби $\dfrac{1}{k_0^2-\mathbf{k}^2}$ возникает полюс, для обхода которого необходимо введение бесконечно малой мнимой части $\pm\xi$ у волнового числа: $k_0 = \omega\sqrt{\rho_0\eta_0} \pm i\xi$, где $\xi \to +0$. Знак "+" или "–" перед бесконечно малым, но положительным значением ξ определяет, будет ли функция Грина запаздывающей или опережающей. В результате для функций Грина получается выражение

$$\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \equiv \hat{B}G_0^{\pm}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{10}$$

где $G_0^{\pm}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ – скалярные функции Грина (запаздывающая или опережающая) уравнения Гельмгольца для однородного пространства соответствующей размерности с характеристиками ρ_0 и η_0, аналитический вид которых хорошо известен. Матричный оператор $\hat{B}$ получается обратным преобразованием Фурье от матрицы $\hat{B}(\mathbf{k})$ и представляет собой, как и оператор $\hat{A}_0$, матрицу, со-

держащую наряду со скалярными матричными элементами операторы производной вдоль координатных осей. Он действует на аргумент $\mathbf{r}$ функций $G_0^{\pm}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$.

В итоге матричные элементы $g^{\pm}_{p,q;\,D} = g^{\pm}_{q,p;\,D}$ функций Грина $\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{x})$ определяются следующим образом [2, 5, 7]:

$$g^{\pm}_{1,1;\,D=1} = \pm\frac{\exp(\pm ik_0|l|)}{2}\sqrt{\frac{\eta_0}{\rho_0}},\quad g^{\pm}_{1,2;\,D=1} = \frac{\exp(\pm ik_0|l|)}{2}\operatorname{sign}(l),\quad g^{\pm}_{2,2;\,D=1} = \pm\frac{\exp(\pm ik_0|l|)}{2}\sqrt{\frac{\rho_0}{\eta_0}};$$

$$g^{\pm}_{p,p;\,D=2} = \pm\frac{\omega\eta_0}{4}\left(H_0^{\pm}\frac{l^2_{(p)}}{|\mathbf{l}|^2} + H_1^{\pm}\frac{l^2_{(3-p)} - l^2_{(p)}}{k_0|\mathbf{l}|^3}\right),$$

$$g^{\pm}_{3,3;\,D=2} = \pm\frac{\omega\rho_0}{4}H_0^{\pm},\quad g^{\pm}_{p,3;\,D=2} = \pm\frac{ik_0}{4}H_1^{\pm}\frac{l_{(p)}}{|\mathbf{l}|},$$

$$g^{\pm}_{p,q;\,D=2} = \mp\frac{\omega\eta_0}{4}\frac{l_{(p)}l_{(q)}}{|\mathbf{l}|^2}H_2^{\pm};\quad g^{\pm}_{p,q;\,D=3} = -\frac{i}{4\pi\omega\rho_0}\frac{\exp(\pm ik_0|\mathbf{l}|)}{|\mathbf{l}|^5}l_{(p)}l_{(q)}\left[3 + ik_0|\mathbf{l}|(\mp 3 + ik_0|\mathbf{l}|)\right]; \tag{11}$$

$$g^{\pm}_{4,p;\,D=3} = -\frac{1}{4\pi}\frac{l_{(p)}(-1 \pm ik_0|\mathbf{l}|)\exp(\pm ik_0|\mathbf{l}|)}{|\mathbf{l}|^3},$$

$$g^{\pm}_{p,p;\,D=3} = \frac{i}{4\pi\omega\rho_0}\frac{\exp(\pm ik_0|\mathbf{l}|)}{|\mathbf{l}|^3}\times\left(1 \mp ik_0|\mathbf{l}| + k_0^2 l^2_{(p)} - 3\frac{l^2_{(p)}}{|\mathbf{l}|^2}(1 \mp ik_0|\mathbf{l}|)\right),$$

$$g^{\pm}_{4,4;\,D=3} = \frac{i\omega\rho_0}{4\pi}\frac{\exp(\pm ik_0|\mathbf{l}|)}{|\mathbf{l}|},$$

где $\mathbf{l} \equiv \mathbf{z} - \mathbf{x}$ (в одномерном случае $l \equiv z - x$); индексы p и q могут принимать целые значения от 1 до D, причем $p \neq q$. Надо обратить внимание, что матричные функции Грина имеют размерность $(D+1)\times(D+1)$. При $D = 2$ выражение для матричной функции Грина содержит функции Ханкеля первого и второго рода j-го порядка ($j = 0, 1, 2$), для которых используются обозначения $H_j^{+} \equiv H_j^{(1)}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{x}|)$ и $H_j^{-} \equiv H_j^{(2)}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{x}|)$.

Пусть рассматривается рассеянное поле в точке $\mathbf{z}$ *вдали от неоднородности*. С учетом того, что в этом случае $k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0| \gg 1$, можно воспользоваться асимптотикой функций Грина (коэффициенты пропорциональности, индивидуальные для каждого матричного элемента, опускаются) $\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0) \sim \dfrac{\exp(\pm ik_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|^{(D-1)/2}}$, где D – пространственная размерность задачи. Это позволяет показать, что в данном случае $\nabla_2\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0) \approx \pm ik_0\mathbf{n}\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)$, где $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{z}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|}$ – единичный вектор, задающий направление из центра неоднородности в точку приема рассеянного поля. Следовательно,

$$\hat{\mathbf{D}}_2^{m-1}\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0) = \left(\mp ik_0(\mathbf{z}'-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}\right)^{m-1}\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (9), можно вынести $\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)$ за знак суммы:

$$\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') - \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') = \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\times \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\mp ik_0R_0)^{m-1}}{(m-1)!}\int_{\Re}\left(\frac{(\mathbf{z}'-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}}{R_0}\right)^{m-1}\hat{A}_1(\mathbf{z}')\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')d\mathbf{z}'. \tag{13}$$

Важно подчеркнуть, что за счет матричного характера функции Грина $\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)$ слагаемое, соответствующее $m = 1$ в (13), описывает рассеянное поле как монопольного, так и дипольного порядков. В слагаемом, соответствующем $m = 2$, появляется вклад квадрупольного порядка; при этом присутствие более низких порядков мультипольности не исключается в этом слагаемом, и т.д.

Интеграл $\int_{\Re}\hat{A}_1(\mathbf{z}')\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')d\mathbf{z}'$, соответствующий первому слагаемому в сумме, т.е. $m = 1$, не зависит от точки наблюдения $\mathbf{z}$, поскольку под знаком суммы в (13) от $\mathbf{z}$ зависит только вектор $\mathbf{n}$. Это позволяет ввести матричные коэффициенты рассеяния $\hat{\beta}^{\pm}$ (не зависящие от $\mathbf{z}$) согласно выражению

$$\int_{\Re}\hat{A}_1(\mathbf{z}')\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z}',\mathbf{z}'')d\mathbf{z}' = \hat{\beta}^{\pm}\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}''). \tag{14}$$

Подобная процедура осуществлялась в работе [1] для точечной неоднородности, создающей рассеянное поле монопольного порядка, и в работе [2] для точечной неоднородности, не создающей рассеянного поля квадрупольного и более высоких порядков мультипольности. Для матричных коэффициентов рассеяния $\hat{\beta}^{\pm}$ в последнем случае были получены следующие соотношения:

$$\hat{\beta}^{-} - \hat{\beta}^{+} = \hat{\beta}^{-}\hat{C}_D\hat{\beta}^{+};\quad \hat{\beta}^{\pm} = -\hat{\sigma}_3\left\{\hat{\beta}^{\mp}\right\}^{*}\hat{\sigma}_3, \tag{15}$$

где матрица $\hat{\sigma}_3$ совпадает с единичной матрицей во всех элементах, кроме самого правого нижнего (т.е. элемента, стоящего в последнем столбце и последней строке), который равен -1; матрица $\hat{C}_D$ является диагональной и состоит из констант, которые определяются размерностью задачи D [2]. Соотношения (15) могут быть сведены к единственному уравнению для $\hat{\beta}^{+}$ (или $\hat{\beta}^{-}$), из которого следует, что каждый комплексный матричный

элемент коэффициентов рассеяния ограничен по абсолютной величине; при этом его абсолютная величина однозначно взаимосвязана с фазой. Подробно эти аспекты изложены в [2]. Ограниченность абсолютной величины матричных элементов коэффициента рассеяния приводит к тому, что существует некоторая максимальная мощность, рассеянная квазиточечной неоднородностью [7, 8]. При этом представляется важным то обстоятельство, что предельная максимальная мощность рассеянного поля не зависит от конкретного размера квазиточечной неоднородности. При любом, сколь угодно малом объеме такой неоднородности (или площади в двумерном случае) соответствующий выбор параметров среды внутри неоднородности позволяет достичь этого предельного значения. Следует также отметить, что соотношения (15) отражают тот факт, что процессы многократного рассеяния внутри неоднородности оказываются существенными даже в том случае, когда неоднородность квазиточечная [2].

Когда процесс рассеяния внутри неоднородности не носит резонансного характера, а ее размер $k_0R_0 \ll 1$ (квазиточечная неоднородность), выполняется приближенное соотношение $\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z}',\mathbf{z}'') \approx \hat{G}^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}'')$, где $\mathbf{z}' \in \Re$. Тогда остальные члены суммы (13) имеют порядок малости $(k_0R_0)^{m-1}$, т.е. быстро уменьшаются по мере уменьшения размера неоднородности (а также с ростом m). Тем самым, этими слагаемыми можно пренебречь, и из (13), (14) следует

$$\hat{G}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') - \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}'') \approx \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^{\pm}\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{r}_0,\mathbf{z}''). \quad (16)$$

Наоборот, когда неоднородность является резонансной, значение акустического поля внутри нее может быть велико, и в сочетании со специально подобранным видом $\hat{A}_1(\mathbf{z}')$ это может приводить к появлению рассеянного поля квадрупольного и более высоких порядков мультипольности, которое в фиксированной точке наблюдения $\mathbf{z}$ (не обязательно вдали от неоднородности) имеет конечную амплитуду даже при $k_0R_0 \to 0$. Данное обстоятельство будет проиллюстрировано на этапе численного моделирования в конце п. 2.

Пусть теперь рассматривается рассеянное поле квазиточечной нерезонансной неоднородности *на расстояниях, малых по сравнению с длиной волны*, но существенно превосходящих R_0, так что выполнены условия $k_0R_0 \ll k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0| \ll 1$. Для упрощения последующих выкладок целесообразно использовать представление матричных функций Грина $\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')$ через скалярные функции Грина $G_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')$ в виде (10).

Матричные элементы оператора $\hat{B}$ либо представляют собой константы, определяющиеся параметрами однородной среды, либо являются дифференциальными операторами, которые действуют на аргумент $\mathbf{z}$ скалярной функции Грина $G_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')$. Поэтому, подставляя (10) в (8) и (9), можно поменять местами оператор $\hat{B}$ и дифференциальный оператор $\hat{\mathbf{D}}_2^{m-1}$, т.е. работать с разложением скалярных функций Грина в ряд Тейлора $G_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}') = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\hat{\mathbf{D}}_2^{m-1}G_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)}{(m-1)!}$. Скалярные функции Грина $G_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)$ зависят только от модуля разности векторных аргументов $|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|$:

$$G_{0;\,D=1}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0) = \mp\frac{i}{2k_0}\exp(\pm ik_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|),$$
$$G_{0;\,D=2}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0) = \mp\frac{i}{4}H_0^{\pm}, \quad (17)$$
$$G_{0;\,D=3}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\exp(\pm ik_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|}.$$

Оператор ∇_2, действующий на второй аргумент $G_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)$, т.е. на $\mathbf{r}_0$, записывается как $\nabla_2 = \nabla|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|\frac{\partial}{\partial|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|} = -\frac{\mathbf{z}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|} = -\mathbf{n}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|}$. Тогда, вводя вектор $\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{z}'-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{z}'-\mathbf{r}_0|}$, можно представить $\hat{\mathbf{D}}_2^{m-1}G_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)$ в виде

$$\hat{\mathbf{D}}_2^{m-1}G_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0) = \left((\mathbf{z}'-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|}\right)^{m-1}G_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0) = |\mathbf{z}'-\mathbf{r}_0|^{m-1}\left(\mathbf{n}'\mathbf{n}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|}\right)^{m-1}G_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0). \quad (18)$$

Производные функций Грина в (18) определяются с помощью (17). При этом для случая $D = 2$, ввиду асимптотики функции Ханкеля, $G_{0;\,D=2}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0) \approx \frac{1}{2\pi}\ln(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|)$. Тогда, вычисляя производные в (18) и опуская постоянные множители, можно получить следующие оценки:

$$\left|\hat{\mathbf{D}}_2^{m-1}G_{0;\,D=1}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\right| = (k_0|\mathbf{z}'-\mathbf{r}_0|)^{m-1}\left|G_{0;\,D=1}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\right| \quad \text{при} \quad m \ge 1, \quad (19)$$

$$\left|\hat{\mathbf{D}}_2^{m-1}G_{0;\,D=2}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\right| \sim \left(\frac{|\mathbf{z}'-\mathbf{r}_0|}{|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|}\right)^{m-1} \times \left|\frac{1}{\ln(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|)}\right|\left|G_{0;\,D=2}^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\right| \quad \text{при} \quad m > 1, \quad (20)$$

$$\left|\hat{\mathbf{D}}_2^{m-1} G^{\pm}_{0;\,D=3}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\right| \sim \left(\frac{|\mathbf{z}'-\mathbf{r}_0|}{|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|}\right)^{m-1} \left|G^{\pm}_{0;\,D=3}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\right| \quad (21)$$

$$\text{при} \quad m \geq 1.$$

Так как $\mathbf{z}' \in \Re$, т.е. $|\mathbf{z}'-\mathbf{r}_0| \leq R_0$, то $k_0|\mathbf{z}'-\mathbf{r}_0| \leq$ $\leq k_0 R_0 \ll 1$ и $\dfrac{|\mathbf{z}'-\mathbf{r}_0|}{|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|} \leq \dfrac{R_0}{|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|} \ll 1$ в силу условий $k_0 R_0 \ll k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0| \ll 1$. Поэтому величина $\hat{\mathbf{D}}_2^{m-1} G_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)$ при $m \geq 2$ мала по сравнению со случаем $m = 1$. В итоге, в общем выражении (9) превалирует первый член суммы ($m = 1$), который с учетом (14) приводит выражение (9) снова к виду (16).

Поле на расстояниях, сравнимых с размером неоднородности $|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0| \cong R_0$, оценить аналитически из общих соображений затруднительно. Поэтому было выполнено численное моделирование рассеянного поля в случае падающей плоской волны единичной амплитуды в двумерном пространстве. Падающее поле рассеивалось на неоднородностях двух типов: в виде квадрата со стороной a и в виде круга радиуса $a/\sqrt{\pi}$, где полагалось $a = 0.1\lambda_0$; λ_0 – длина падающей плоской волны в однородной фоновой среде. При таком соотношении размеров квадрата и круга неоднородности обоих типов имеют равную площадь. Если справедливо борновское приближение, то вторичные источники, возникающие в каждой точке неоднородностей первого и второго типа, равны произведению оператора $\hat{A}_1(\mathbf{z})$ и падающего акустического поля. Параметры среды внутри каждой из неоднородностей полагались при моделировании постоянными в пространстве и одинаковыми для обоих типов неоднородностей. В силу малости волнового размера каждой неоднородности падающее поле во всех ее точках также можно считать одинаковым. Следовательно, рассеянное поле каждой из неоднородностей, равное сумме полей отдельных вторичных источников, оказывается пропорционально количеству этих источников, т.е. площади неоднородности. Различие между полями, рассеянными на двух типах неоднородностей, говорит о том, что борновское приближение становится неприменимым.

Численное моделирование уравнения Гельмгольца осуществлялось методом конечных элементов в компьютерной системе COMSOL. При фиксированных значениях плотности ρ_0 и сжимаемости η_0 однородной фоновой среды, соответствующих воде, осуществлялось изменение параметров среды ρ и η внутри неоднородности. В одном случае относительная плотность ρ/ρ_0 изменялась в пределах 1–200 при фиксированной сжимаемости $\eta = \eta_0$. В другом случае относительная сжимаемость η/η_0 изменялась в пределах 1–200 при фиксированной плотности $\rho = \rho_0$. Вычислялось рассеянное поле акустического давления на расстоянии $|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0| = a$ от центра неоднородности (т.е. на расстоянии, сравнимом с размером неоднородности), что соответствует центру соседнего элемента дискретизации при разбиении в процессе моделирования рассматриваемой области на отдельные участки в виде квадратов со стороной a. Поскольку амплитуды компонент рассеянного поля давления монопольного, дипольного, квадрупольного и высших порядков мультипольности зависят от угла θ полярной системы координат (с центром в точке $\mathbf{r}_0$) как, соответственно, p_{mono}, $p_{\text{dip}}|\cos\theta|$, $p_{\text{quad}}|\cos 2\theta|$ и т.д. (угол $\theta = 0$ соответствует направлению падения плоской волны), то это позволяет определить значения p_{mono}, p_{dip}, p_{quad} для выбранного расстояния до центра неоднородности. Результаты моделирования представлены на рисунке.

Во-первых, следует обратить внимание на возникновение резонансов, сопровождающихся резким увеличением амплитуды одной из мультипольных компонент поля. На рисунке (а) хорошо видны резонансы квадрупольного типа, а на рисунке (б) – дипольного типа. Значения параметров неоднородностей, соответствующие резонансам, лежат в узких областях, причем с ростом порядка мультипольности ширина таких областей уменьшается.

Во-вторых, за исключением резонансных областей, амплитуда квадрупольной компоненты оказывается существенно меньше амплитуд дипольной и монопольной компонент. Моделирование показало, что компоненты более высокой мультипольности (на рисунке не отражены) также малы по сравнению с дипольной и монопольной компонентами, за исключением отдельных узких резонансных областей.

В-третьих, если плотность неоднородности равна плотности фоновой среды (рисунок (а)), то в широком диапазоне изменения сжимаемости (вплоть до $\eta/\eta_0 \approx 100$) форма неоднородности не влияет на амплитуды монопольной и дипольной компонент поля. Это выражается в совпадении на рисунке (а) сплошной и пунктирной черных кривых. Если же неоднородность отличается от фоновой среды плотностью (рисунок (б)), эти амплитуды оказываются несколько различными, особенно для монопольной компоненты. Тем не менее, если различие в плотности невелико (вплоть до $\rho/\rho_0 \approx 100$), рассеяние в основном является дипольным, и итоговое рассеянное поле слабо зависит от формы рассеивателя.

Итак, поле, рассеянное *нерезонансной* неоднородностью малого волнового размера, представ-

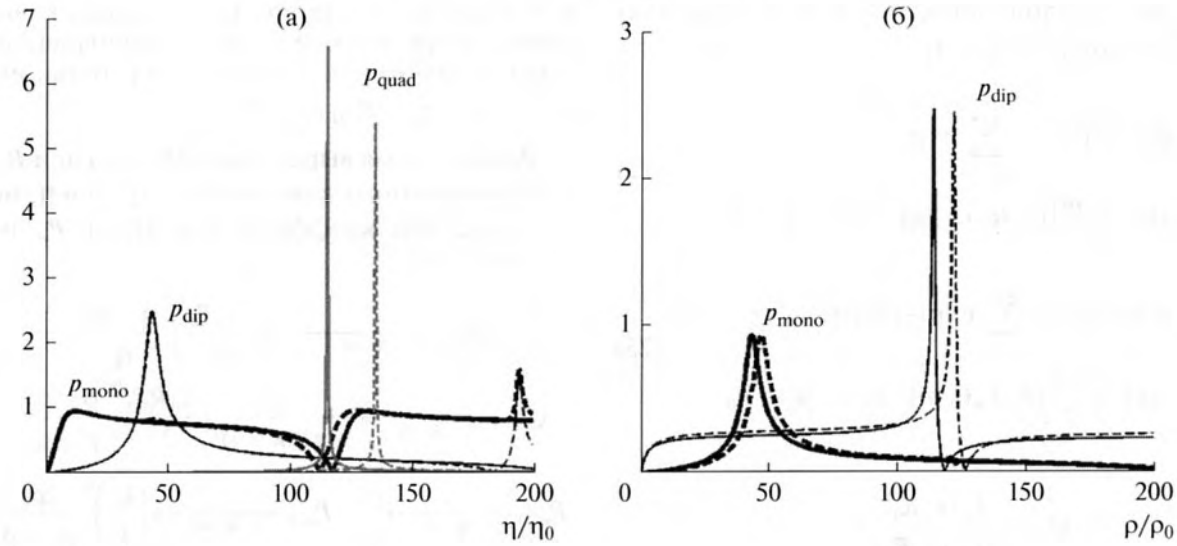

Рис. 1. Характерные амплитуды компонент рассеянного поля различной мультипольности, вычисленные для (а) разной сжимаемости и (б) разной плотности среды внутри неоднородности малого волнового размера. Сплошные линии соответствуют неоднородности в виде круга, пунктирные линии – в виде квадрата той же площади. Толстая черная, тонкая черная и тонкая серая линии определяют амплитудные зависимости соответственно монопольной p_{mono}, дипольной p_{dip} и квадрупольной p_{quad} компонент рассеянного поля от характеристик среды внутри неоднородности. В исследованном диапазоне значений плотности величина p_{quad} существенно меньше, чем p_{mono} и p_{dip}, поэтому на рисунке (б) она не обозначена. Единичное значение на вертикальной оси соответствует амплитуде падающей плоской волны.

лено на расстояниях, существенно превышающих размер рассеивателя R_0, в основном монопольной и дипольной компонентами, т.е. описывается членом суммы (13) с $m = 1$, как обсуждалось выше. При этом члены суммы (13), содержащие компоненты более высокого порядка мультипольности, имеют амплитуду, пропорциональную $(k_0R_0)^{m-1}$. На меньших расстояниях от рассеивателя ($k_0R_0 \ll k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0| \ll 1$) их амплитуда растет как $\left(R_0/|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0|\right)^{m-1}$, согласно (18). На расстояниях же, сравнимых с размерами рассеивателя, как показывает численное моделирование, компоненты квадрупольного и более высоких порядков мультипольности малы по сравнению с монопольной и дипольной компонентами.

3. РАССЕЯНИЕ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ МАЛОГО ВОЛНОВОГО РАДИУСА

Для иллюстрации полученных результатов, а также для проверки соотношений (15) была рассмотрена двумерная задача рассеяния плоской монохроматической волны на бесконечном цилиндре радиуса R_0, имеющем постоянные значения плотности ρ и сжимаемости η, отличные от фоновых значений ρ_0 и η_0. Подобный прием использовался в [1, 9]. Центр цилиндра расположен в начале координат; вводится волновое число внутри цилиндра $k = \omega\sqrt{\rho\eta}$. Падающая монохроматическая запаздывающая волна распространяется вдоль оси OX и в произвольной точке $\mathbf{z} = \{z_{(1)}, z_{(2)}\}$ задается в виде вектор-столбца $\left|u_0^+(\mathbf{z})\right\rangle = \left|\begin{matrix} \mathrm{v}_{0\,(1)}^+(\mathbf{z}) \\ \mathrm{v}_{0\,(2)}^+(\mathbf{z}) \\ p_0^+(\mathbf{z}) \end{matrix}\right\rangle = \exp(ik_0z_{(1)})\left|\begin{matrix} ik_0 \\ 0 \\ i\omega\rho_0 \end{matrix}\right\rangle$, содержащего (в качестве своих элементов) проекции колебательной скорости $\mathbf{v}_0^+(\mathbf{z}) = \{\mathrm{v}_{0\,(1)}^+(\mathbf{z}), \mathrm{v}_{0\,(2)}^+(\mathbf{z})\}$ на оси декартовой системы координат и давление $p_0^+(\mathbf{z})$. Амплитуда потенциала колебательной скорости данной волны $\varphi_0^+(\mathbf{z}) = \exp(ik_0z_{(1)})$ принимается равной единице. Такая прямая задача рассеяния допускает точное аналитическое решение, которое можно получить, решая уравнение Гельмгольца вместе с соответствующими граничными условиями. Потенциал рассеянного цилиндром поля $\varphi_{\text{sc}}^+(\mathbf{z}) \equiv \varphi^+(\mathbf{z}) - \varphi_0^+(\mathbf{z})$ и полного поля $\varphi^+(\mathbf{z})$, рассматриваемые соответственно вне и внутри

цилиндра, в цилиндрической системе координат $\mathbf{z} = \{|\mathbf{z}|, \alpha\}$ имеют вид [10]

$$\varphi_{\text{sc}}^{+}(|\mathbf{z}|,\alpha) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\alpha)(-1)^m \times \times \exp\left(-i\frac{\pi m}{2}\right) Q_m H_m^{+}(k_0|\mathbf{z}|) \quad \text{при} \quad |\mathbf{z}| > R_0, \tag{22}$$

$$\varphi^{+}(|\mathbf{z}|,\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-im\alpha)(-1)^m \times \times \exp\left(-i\frac{\pi m}{2}\right) P_m J_m(k|\mathbf{z}|) \quad \text{при} \quad |\mathbf{z}| < R_0, \tag{23}$$

где

$$Q_m = \frac{J_m(k_0R_0)}{H_m^{(1)}(k_0R_0)} \times \times \frac{\ln' J_m(kR_0) - \frac{k_0}{k}\frac{\rho}{\rho_0}\ln' J_m(k_0R_0)}{\ln' J_m(kR_0) - \frac{k_0}{k}\frac{\rho}{\rho_0}\ln' H_m^{(1)}(k_0R_0)}, \quad Q_{-m} = Q_m, \tag{24}$$

$$P_m = \frac{J_m(k_0R_0)}{J_m(kR_0)} \times \times \frac{\ln' H_m^{(1)}(k_0R_0) - \ln' J_m(k_0R_0)}{\frac{\rho}{\rho_0}\ln' H_m^{(1)}(k_0R_0) - \frac{k}{k_0}\ln' J_m(kR_0)}, \quad P_{-m} = P_m. \tag{25}$$

Здесь $k = \omega/c = \omega\sqrt{\rho\eta}$, $k_0 = \omega/c_0 = \omega\sqrt{\rho_0\eta_0}$, $H_m^{(1)}$ и J_m – функции Ханкеля первого рода и функции Бесселя m-го порядка; штрихом обозначены производные этих функций:

$$\ln'\zeta_m(\xi) = \frac{\zeta_m'(\xi)}{\zeta_m(\xi)} = \frac{|m|}{\xi} - \frac{\zeta_{|m|+1}(\xi)}{\zeta_{|m|}(\xi)},$$

$$\text{где} \quad \zeta_m = H_m^{+} \quad \text{или} \quad \zeta_m = J_m.$$

Следует отметить, что выражение (22) является, вообще говоря, общим решением уравнения Гельмгольца вне неоднородности в цилиндрической системе координат, справедливым для любой неоднородности конечных размеров. При этом в качестве Q_m в него войдут некоторые коэффициенты Q_m^{inhom}, которые определяются параметрами неоднородности и не удовлетворяют (24) в общем случае. Выражение (22) представляет собой разложение потенциала рассеянного поля по различным порядкам мультипольности, которые задаются номером m. Здесь $m = 0$ соответствует рассеянию монопольного типа, $m = \pm 1$ – дипольного, $m = \pm 2$ – квадрупольного и т. д. Фактически неоднородность может быть полностью охарактеризована совокупностью коэффициентов Q_m^{inhom}. В том случае, когда она имеет малый волновой размер и при этом не является резонансной, как было показано в п. 2 настоящей работы, играют роль лишь Q_0^{inhom} и $Q_{\pm 1}^{\text{inhom}}$.

Рассматривая выражения (24), (25) при $R_0 \to 0$ и фиксированных значениях ρ_0, η_0, ρ и η, можно показать, что коэффициенты Q_m и P_m имеют асимптотику

$$Q_{m=0} \xrightarrow[R_0\to 0]{} -i\pi\left(\frac{k_0R_0}{2}\right)^2 \frac{\eta - \eta_0}{\eta_0}, \quad Q_{m>0} \xrightarrow[R_0\to 0]{} -\frac{i\pi}{m!(m-1)!}\left(\frac{k_0R_0}{2}\right)^{2m} \frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0}, \tag{26}$$

$$P_{m=0} \xrightarrow[R_0\to 0]{} \frac{\rho_0}{\rho}, \quad P_{m>0} \xrightarrow[R_0\to 0]{} \left(\frac{k_0}{k}\right)^m \frac{2\rho_0}{\rho_0 + \rho}. \tag{27}$$

Таким образом, монопольные и дипольные компоненты рассеянного поля вне цилиндра пропорциональны площади его сечения в "волновых единицах" $S_{\text{w}} \equiv \pi(k_0R_0)^2$. Компоненты более высокой мультипольности m имеют зависимость $\sim S_{\text{w}}^m$, и в случае цилиндра с малыми волновыми размерами $k_0R_0 \ll 1$ их можно не учитывать.

В то же время компоненты поля внутри цилиндра определяются только его плотностью и сжимаемостью и не зависят от радиуса. Действительно, для поля внутри цилиндра, с учетом асимптотики функций Бесселя при $k|\mathbf{z}| \ll 1$

$$J_m(k|\mathbf{z}|) = \frac{1}{m!}\left(\frac{k|\mathbf{z}|}{2}\right)^m, \quad J_{-m}(k|\mathbf{z}|) = (-1)^m J_m(k|\mathbf{z}|), \quad m \geq 0,$$

выражения (23), (25) могут быть записаны с точностью до членов первого порядка по $k_0|\mathbf{z}| \ll 1$ как

$$\varphi^{+}(|\mathbf{z}|,\alpha) \approx \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{2\rho_0\cos\alpha}{\rho_0 + \rho} ik_0|\mathbf{z}| = \frac{\rho_0}{\rho} + + \frac{2\rho_0}{\rho_0 + \rho} ik_0 z_{(1)} \approx \frac{\rho_0(\rho_0 - \rho)}{\rho(\rho_0 + \rho)} + \frac{2\rho_0}{\rho_0 + \rho}\exp(ik_0 z_{(1)}) \quad \text{при} \quad |\mathbf{z}| < R_0.$$

Обращает на себя внимание некоторое расхождение результатов, полученных ранее в работах [2, 7], а также в п. 2 настоящей работы, и асимптотики коэффициентов Q_m в (26). Действительно, как было установлено, при рассмотрении квазиточечной нерезонансной неоднородности сколь угодно малого размера можно подобрать такие значения плотности и сжимаемости среды внутри нее, что коэффициенты рассеяния достигают определенных предельных значений. Монопольная и дипольная компоненты рассеянного неоднородностью поля также достигают при этом

предельной мощности, не зависящей в такой постановке задачи от размера неоднородности. Амплитуда квадрупольной компоненты для нерезонансной неоднородности согласно (13) или (18) зависит от размера неоднородности как $\sim k_0 R_0$. В то же время из (26) следует, что монопольная и дипольная компоненты рассеянного поля пропорциональны площади, а квадрупольная – квадрату площади неоднородности (в двумерном случае). Это обстоятельство связано с тем, что в первом случае предполагается произвольное изменение пространственных распределений плотности и сжимаемости внутри неоднородности. В частности, плотность и сжимаемость могут стремиться к бесконечности, формируя квазиточечный (в пределе δ-образный) рассеиватель. В то же время предельный переход (26) осуществляется при фиксированных характеристиках среды ρ и η внутри цилиндра.

Далее выполняется переход от полных полей колебательной скорости и давления $\left|u^+(\mathbf{z})\right\rangle$ в присутствии рассеивателя к рассеянным полям $\left|u^+_{sc}(\mathbf{z})\right\rangle \equiv \left|u^+(\mathbf{z})\right\rangle - \left|u^+_0(\mathbf{z})\right\rangle$ в декартовых координатах $z_{(1)} = |\mathbf{z}|\cos\alpha$, $z_{(2)} = |\mathbf{z}|\sin\alpha$, причем

$$\left|u^+_{sc}(\mathbf{z})\right\rangle = \frac{1}{i\omega\rho(\mathbf{z})}\left|\begin{matrix}\partial p^+_{sc}(\mathbf{z})/\partial z_{(1)}\\ \partial p^+_{sc}(\mathbf{z})/\partial z_{(2)}\\ i\omega\rho(\mathbf{z})p^+_{sc}(\mathbf{z})\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\text{где}\quad \rho(\mathbf{z}) = \begin{cases}\rho_0, & |\mathbf{z}| > R\\ \rho, & |\mathbf{z}| < R\end{cases}.$$

Ограничиваясь для цилиндра малого волнового размера членами ряда с $m = 0$ и $m = \pm 1$, выражение (22) для поля вне цилиндра можно привести к следующему виду:

$$\left|u^+_{sc}(\mathbf{z})\right\rangle \approx \sum_{m=0;\pm1}\left|u^+_{sc\,(m)}(\mathbf{z})\right\rangle = \\ = \hat{G}^+_{0,\,D=2}(\mathbf{z},\mathbf{0})\begin{pmatrix}\frac{-8Q_1}{\omega\eta_0} & 0 & 0\\ 0 & \frac{-8Q_1}{\omega\eta_0} & 0\\ 0 & 0 & \frac{-4Q_0}{\omega\rho_0}\end{pmatrix}\left|u^+_0(\mathbf{0})\right\rangle, \tag{28}$$

где используется матричная функция Грина однородной среды в двумерном случае (11).

Для нерезонансного рассеивателя с малыми волновыми размерами и центром в точке $\mathbf{r}_0$ при произвольном падающем поле $\left|u^+_0(\mathbf{z})\right\rangle$ имеет место соотношение типа (16), полученное в предположении $k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}_0| \gg 1$:

$$\left|u^+_{sc}(\mathbf{z})\right\rangle \equiv \left|u^+(\mathbf{z})\right\rangle - \left|u^+_0(\mathbf{z})\right\rangle = \\ = \hat{G}^+_{0,\,D=2}(\mathbf{z},\mathbf{r}_0)\hat{\beta}^+\left|u^+_0(\mathbf{r}_0)\right\rangle. \tag{29}$$

Поскольку для цилиндрически симметричного рассеивателя матрицы $\hat{\beta}^+$ имеют диагональный вид [2], то сравнение выражения (28) при рассматриваемом падающем запаздывающем поле плоской волны и выражения (29) при $\mathbf{r}_0 = 0$ (центр цилиндра находится в начале координат) дает:

$$\hat{\beta}^+ \equiv \begin{pmatrix}\beta^+_1 & 0 & 0\\ 0 & \beta^+_1 & 0\\ 0 & 0 & \beta^+_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-8Q_1}{\omega\eta_0} & 0 & 0\\ 0 & \frac{-8Q_1}{\omega\eta_0} & 0\\ 0 & 0 & \frac{-4Q_0}{\omega\rho_0}\end{pmatrix}, \\ \text{т.е. } \beta^+_0 = -\frac{4Q_0}{\omega\rho_0},\ \beta^+_1 = -\frac{8Q_1}{\omega\eta_0}. \tag{30}$$

Тогда согласно второму соотношению в (15) значения

$$\beta^-_0 = -\left\{\beta^+_0\right\}^* \text{ и } \beta^-_1 = -\left\{\beta^+_1\right\}^* \tag{31}$$

также известны. Первое же соотношение в (15), с учетом явного вида матрицы

$$\hat{C}_{D=2} = -\frac{\omega}{4}\begin{pmatrix}\eta_0 & 0 & 0\\ 0 & \eta_0 & 0\\ 0 & 0 & 2\rho_0\end{pmatrix} \tag{32}$$

в рассматриваемом двумерном случае, сводится к выполнению равенства

$$1/Q_m + 1/Q^*_m = 2 \quad (\text{т.е. } \operatorname{Re} Q_m = |Q_m|^2) \\ \text{при } m = 0;\ \pm 1. \tag{33}$$

Можно показать, что для коэффициентов Q_m, определяемых согласно (24), данное равенство оказывается выполнено строго, причем в случае цилиндра *любого* радиуса R_0, а не только в пределе при $R_0 \to 0$. Таким образом, увеличение радиуса цилиндра не приводит к нарушению условий (15), а сводится к появлению рассеянного поля более высоких порядков мультипольности, описываемых полным разложением (13).

Кроме того, равенство (33) справедливо и при $m \geq 2$; тем самым, можно предположить существование для этих порядков условий, аналогичных (15). Численный расчет, выполненный по формулам (24), показывает, что для любого фиксированного радиуса цилиндра R_0 и заданного порядка мультипольности m удается подобрать такие плотность ρ и сжимаемость η, что коэффи-

циент Q_m становится близким к единице. При этом наблюдаются резонансы, как, например, представленные на рисунке. Данный факт свидетельствует о существовании неоднородностей, имеющих сколь угодно малый размер и одновременно создающих заметное рассеянное поле высших порядков мультипольности. Численный расчет показывает, что с увеличением m и уменьшением R_0 это достигается во все более узком диапазоне значений ρ и η, что означает резонансный характер рассеяния в таких системах. В рассмотренной двумерной задаче такие значения ρ и η могут оказаться физически нереализуемыми. Однако в трехмерном случае переход к цилиндрам с конечной длиной будет приводить к появлению дополнительной степени свободы, которую можно использовать для создания требуемых резонансов при физически реализуемых ρ и η.

4. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛИППМАНА–ШВИНГЕРА

Из анализа поля, рассеянного цилиндрической неоднородностью, в дополнение получаются интересные результаты, важные на этапе численного моделирования волновых процессов в среде с помощью матричного уравнения типа Липпмана–Швингера. Действительно, пусть неоднородность разбита на отдельные элементарные участки $\Re_i$. Они выбираются так, чтобы в пределах каждого элементарного участка можно было считать как параметры неоднородности, так и акустические поля примерно постоянными и равными их средним значениям внутри участков, центры которых характеризуются радиус-векторами $\mathbf{r}_i$. Тем самым, предполагается, что каждый из участков не является резонансным. Это позволяет дискретизовать матричное уравнение типа Липпмана–Швингера (7) следующим образом:

$$\left|u^{\pm}(\mathbf{z})\right\rangle = \left|u_0^{\pm}(\mathbf{z})\right\rangle + \sum_i \left(\int_{\Re_i} \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{z}')d\mathbf{z}' \right) \hat{A}_1(\mathbf{r}_i)\left|u^{\pm}(\mathbf{r}_i)\right\rangle, \tag{34}$$

$\mathbf{z}$ – произвольная фиксированная точка пространства. Для нахождения из (34) значений акустических полей $\left|u^{\pm}(\mathbf{z})\right\rangle$ в произвольной точке $\mathbf{z}$ нужно определить значения $\left|u^{\pm}(\mathbf{r}_i)\right\rangle$ внутри каждого элементарного участка неоднородности, для чего требуется решить систему линейных уравнений

$$\left|u^{\pm}(\mathbf{r}_j)\right\rangle = \left|u_0^{\pm}(\mathbf{r}_j)\right\rangle + \sum_i \hat{G}_{ji}^{\pm}\hat{A}_1(\mathbf{r}_i)\left|u^{\pm}(\mathbf{r}_i)\right\rangle, \quad \text{где } \hat{G}_{ji}^{\pm} \equiv \int_{\Re_i} \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{r}_j,\mathbf{z}')d\mathbf{z}'. \tag{35}$$

Система (35) получается из (34) при $\mathbf{z} = \mathbf{r}_j$. При $i \neq j$ коэффициенты $\hat{G}_{ji}^{\pm}$ можно найти либо приближенно как $\hat{G}_{ji}^{\pm} \approx \hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{r}_j,\mathbf{r}_i)S_i$, где S_i – площадь (в трехмерном случае – объем) i-го элементарного участка, либо непосредственно выполнив интегрирование. При $i = j$ определить этим методом соответствующее значение $\hat{G}_{jj}^{\pm}$ можно только в одномерном случае, где матричная функция Грина не имеет особенности. В двумерном и трехмерном пространствах при расчете $\hat{G}_{jj}^{\pm}$ для фиксированного j результат интегрирования диагональных матричных элементов (кроме элемента $g_{D,D;D}^{\pm}$, стоящего в самом правом нижнем углу), расходится, причем именно за счет мнимой части матричной функции Грина. Остальные интегралы имеют конечные значения. Например, в случае центрально-симметричной формы элементарного участка они оказываются либо равны нулю за счет симметрии области интегрирования, либо стремятся к нулю при уменьшении размера данного участка. Это можно проверить непосредственно, имея в виду явный вид матричной функции Грина (11). Следует отметить, что упомянутая неинтегрируемая особенность проявляется только при использовании матричного уравнения типа Липпмана–Швингера, но не при решении классического скалярного уравнения Липпмана–Швингера (2). Это связано с тем, что два данных метода по-разному учитывают неоднородность по плотности, о чем упоминалось в начале п. 2. Так, в классическом подходе возникает сложность с расчетом функции рассеивателя (1), если в задаче присутствуют границы сред с разными плотностями. В матричном же подходе требуется решить проблему интегрирования при определении значений $\hat{G}_{jj}^{\pm}$. Однако если рассматриваемая область пространства заполнена средой, однородной по плотности, то в операторе $\hat{A}_1(\mathbf{z})$ согласно (5) равны нулю все матричные элементы, кроме правого нижнего. Тем самым матричная система уравнений (7) или аналогичная система, содержащая произвольные поля вместо функций Грина неоднородной среды, сводится к единственному скалярному уравнению Липпмана–Швингера классического типа.

Решить возникшую проблему определения матричных элементов $\hat{G}_{jj}^{\pm}$ с точки зрения только матричного уравнения типа Липпмана–Швингера или путем разбиения элементарного участка среды на более мелкие участки представляется затруднительным. С другой стороны, все входящие в (35) величины, за исключением $\hat{G}_{jj}^{\pm}$, являются конечными. Действительно, $\left|u^{\pm}(\mathbf{r}_j)\right\rangle$ и $\left|u_0^{\pm}(\mathbf{r}_j)\right\rangle$

представляют собой физические волновые поля в среде; $\hat{A}_1(\mathbf{r}_i)$ характеризует свойства среды (5). Поэтому предлагается положить значение $\hat{G}^{\pm}_{jj}$ по определению таким, чтобы было справедливо соотношение

$$\hat{G}^{\pm}_{jj}\hat{A}_1(\mathbf{r}_j)\left|u^{\pm}(\mathbf{r}_j)\right\rangle = \left|u^{\pm}(\mathbf{r}_j)\right\rangle - \left|u^{\pm}_1(\mathbf{r}_j)\right\rangle, \tag{36}$$

где $\left|u^{\pm}_1(\mathbf{r}_j)\right\rangle \equiv \left|u^{\pm}_0(\mathbf{r}_j)\right\rangle + \sum_{i(i\neq j)}\hat{G}^{\pm}_{ji}\hat{A}_1(\mathbf{r}_i)\left|u^{\pm}(\mathbf{r}_i)\right\rangle$ – падающее на j-й элементарный участок поле, которое представляет собой сумму первичного поля $\left|u^{\pm}_0(\mathbf{r}_j)\right\rangle$ и полей, рассеянных всеми другими участками неоднородности ($i \neq j$). Уравнение (36) похоже по форме на уравнение Липпмана–Швингера (2), но отличается от него тем, что падающее поле $\left|u^{\pm}_1(\mathbf{r}_j)\right\rangle$ определяется полями, рассеянными всеми участками среды, кроме j-го, а эти поля в свою очередь зависят от поля $\left|u^{\pm}(\mathbf{r}_j)\right\rangle$.

Теперь требуется установить связь между падающим на элементарный j-й участок $\Re_j$ полем $\left|u^{\pm}_1(\mathbf{r}_j)\right\rangle$ от всех внешних по отношению к этому участку источников и порождаемому этим полем вторичному источнику в центре участка $\Re_j$. С этой целью можно воспользоваться соотношением (14). Умножение соотношения (14) при $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_j$ справа на вектор первичных источников акустического поля, т.е. переход от матричных функций Грина $\hat{G}^{\pm}_0$ и $\hat{G}^{\pm}$ к полям $\left|u^{\pm}_0(\mathbf{r}_j)\right\rangle$ и $\left|u^{\pm}(\mathbf{r}_j)\right\rangle$ дает $\int_{\Re}\hat{A}_1(\mathbf{z}')\left|u^{\pm}(\mathbf{z}')\right\rangle d\mathbf{z}' = \hat{\beta}^{\pm}\left|u^{\pm}_0(\mathbf{r}_j)\right\rangle$. Однако в контексте рассматриваемой проблемы данное уравнение будет использоваться только для элементарного участка $\Re_j$. Тогда область $\Re$ заменяется на $\Re_j$; первичное поле $\left|u^{\pm}_0(\mathbf{r}_j)\right\rangle$ заменяется на поле $\left|u^{\pm}_1(\mathbf{r}_j)\right\rangle$, падающее на j-й элементарный участок и включающее в себя также поля, рассеянные на других участках неоднородности; матричные коэффициенты рассеяния $\hat{\beta}^{\pm}$ заменяются на коэффициенты $\hat{\beta}^{\pm}_j$, характеризующие рассеяние на j-м элементарном участке:

$$\int_{\Re_j}\hat{A}_1(\mathbf{z}')\left|u^{\pm}(\mathbf{z}')\right\rangle d\mathbf{z}' = \hat{\beta}^{\pm}_j\left|u^{\pm}_1(\mathbf{r}_j)\right\rangle. \tag{37}$$

Рассуждения, приведенные в п. 2 и 3 настоящей работы, свидетельствуют о том, что рассеянное элементарным нерезонансным участком поле является монопольно-дипольным на расстояниях порядка размера области $\Re_j$ и больше. Тем самым, именно рассмотрение такого отдельного элементарного участка позволяет ограничиться в соотношении (13) только членом (14) в форме (37), описывающим процесс рассеяния монопольно-дипольного типа. Выполнение интегрирования в левой части (37) с учетом постоянства $\hat{A}_1$ приводит к выражению

$$\hat{A}_1(\mathbf{r}_j)\left|u^{\pm}(\mathbf{r}_j)\right\rangle S_j = \hat{\beta}^{\pm}_j\left|u^{\pm}_1(\mathbf{r}_j)\right\rangle. \tag{38}$$

Теперь (36) следует умножить слева на $\hat{A}_1(\mathbf{r}_j)S_j$ и принять во внимание выражение (38). С учетом произвольности полей $\left|u^{\pm}_1(\mathbf{r}_j)\right\rangle$ получается связь между матричными коэффициентами рассеяния $\hat{\beta}^{\pm}_j$ и оператором $\hat{A}_1(\mathbf{r}_j)$, характеризующим параметры j-го элементарного участка неоднородности:

$$\hat{\beta}^{\pm}_j = \hat{A}_1(\mathbf{r}_j)S_j + \hat{A}_1(\mathbf{r}_j)\hat{G}^{\pm}_{jj}\hat{\beta}^{\pm}_j. \tag{39}$$

Это соотношение не включает в себя поля $\left|u^{\pm}_1(\mathbf{r}_j)\right\rangle$.

Пусть элементарный участок $\Re_j$ имеет цилиндрическую форму, а плотность и сжимаемость среды внутри него равны соответственно ρ_{cyl} и η_{cyl}. В этом случае известен явный вид (30) и (31) матричных коэффициентов рассеяния $\hat{\beta}^{\pm}$ (этот вид не изменяется при переносе центра цилиндра из точки $\mathbf{r}_0 = 0$ в точку $\mathbf{r}_j$), а также вид (5) оператора $\hat{A}_1(\mathbf{z} = \mathbf{r}_j)$:

$$\hat{A}_1(\mathbf{r}_j) = \begin{pmatrix} i\omega(\rho_{\text{cyl}}(\mathbf{r}_j) - \rho_0) & 0 & 0 \\ 0 & i\omega(\rho_{\text{cyl}}(\mathbf{r}_j) - \rho_0) & 0 \\ 0 & 0 & i\omega(\eta_{\text{cyl}}(\mathbf{r}_j) - \eta_0) \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Это позволяет записать, используя (39), выражения для $\hat{G}_{jj}^{\pm}$:

$$\hat{G}_{jj}^{+} = S_j \begin{pmatrix} \frac{\omega\eta_0}{8Q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega\eta_0}{8Q_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega\rho_0}{4Q_0} \end{pmatrix} -$$

$$- i \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega(\rho_{\text{cyl}} - \rho_0)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega(\rho_{\text{cyl}} - \rho_0)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega(\eta_{\text{cyl}} - \eta_0)} \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$\hat{G}_{jj}^{-} = -\left\{\hat{G}_{jj}^{+}\right\}^{*}.$$

Далее, асимптотическое разложение комплексных коэффициентов Q_0 и Q_1 (24) при стремлении радиуса цилиндра R_0 к нулю (причем, в отличие от (26), сейчас учитывается действительная часть коэффициентов, имеющая более высокий порядок малости по k_0R_0)

$$Q_0 \to -\frac{ik_0^2(\eta_{\text{cyl}} - \eta_0)}{4\eta_0} S_j - \left(\frac{ik_0^2(\eta_{\text{cyl}} - \eta_0)}{4\eta_0} S_j\right)^2 + \ldots,$$

$$Q_1 \to -\frac{ik_0^2(\rho_{\text{cyl}} - \rho_0)}{4(\rho_{\text{cyl}} + \rho_0)} S_j - \left(\frac{ik_0^2(\rho_{\text{cyl}} - \rho_0)}{4(\rho_{\text{cyl}} + \rho_0)} S_j\right)^2 + \ldots$$

приводит (41) к окончательному виду:

$$\hat{G}_{jj}^{\pm} = \pm S_j \cdot \frac{\omega}{8} \begin{pmatrix} \eta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho_0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2\rho_0\omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Важно, что полученное в итоге соотношение для $\hat{G}_{jj}^{\pm}$ (42) не содержит параметров среды внутри элементарного участка. Это обстоятельство согласуется с физическим смыслом значений $\hat{G}_{jj}^{\pm}$, определяющих эффективные значения матричных функций Грина однородной фоновой среды при совпадающих дискретных пространственных аргументах.

На практике элементарный участок имеет форму, отличную от цилиндрической, поскольку невозможно разбить плоскость на участки круговой формы без зазоров или пересечений. Однако элементарному участку можно сопоставить цилиндр с теми же $\hat{A}_1(\mathbf{r}_j)$ и S_j. При этом, согласно (38), коэффициенты рассеяния $\hat{\beta}_j^{\pm}$ у исходного элементарного участка и такого цилиндра совпадут, и следовательно, выражение (39) останется правомерным. Этим объясняется то, что для нерезонансных неоднородностей различной формы, характеризующихся одинаковыми значениями параметров среды и площади, рассеянные поля совпадают, что хорошо видно на рисунке. Тем самым, значения (42) также правомерно использовать при численном моделировании.

Из соотношения (39) следует, что $\hat{\beta}_j^{\pm} = S_j\left(\hat{E} - \hat{A}_1(\mathbf{r}_j)\hat{G}_{jj}^{\pm}\right)^{-1}\hat{A}_1(\mathbf{r}_j)$. Данное соотношение позволяет определять коэффициенты рассеяния j-го элементарного участка неоднородности $\hat{\beta}_j^{\pm}$ на основе значений $\hat{A}_1(\mathbf{r}_j)$ и уже известного выражения (42) для $\hat{G}_{jj}^{\pm}$. Тогда ввиду диагональности матриц $\hat{A}_1$ и $\hat{G}_{jj}^{\pm}$ уравнения (15) эквивалентны системе

$$\hat{G}_{jj}^{-} - \hat{G}_{jj}^{+} = \hat{C}_D S_j; \quad \hat{G}_{jj}^{-} = -\left\{\hat{G}_{jj}^{+}\right\}^{*}, \quad (43)$$

т.е. из (15), (39) и (42) вытекает (43) и, наоборот, из (43), (39) и (42) вытекает (15). При этом первое соотношение в (43) согласуется с определением матрицы $\hat{C}_D \equiv \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{r}_0} \times \left(\hat{G}_0^{-}(\mathbf{r}_0,\mathbf{x}) - \hat{G}_0^{+}(\mathbf{r}_0,\mathbf{x})\right)$ через предельный переход [2]. Легко видеть, что полученные значения $\hat{G}_{jj}^{\pm}$ (42) удовлетворяют (43) при $D = 2$. Важно также, что в (42) не входят параметры рассеивателя $\hat{A}_1$. Таким образом, процессы многократного рассеяния внутри одного элемента среды могут быть учтены "универсальным" образом за счет введения в рассмотрение единственной матрицы $\hat{G}_{jj}^{\pm}$. При этом на этапе численного моделирования установленная в [1, 2, 7] связь между фазой и амплитудой рассеянного элементом среды акустического поля автоматически выполняется.

Выражение (42) позволяет "доопределить" дискретизованное матричное уравнение типа Липпмана–Швингера (35), после чего оно сводится к решению системы линейных уравнений относительно $\left|u^{\pm}(\mathbf{r}_j)\right\rangle$. Следует обратить внимание на следующие особенности матрицы $\hat{G}_{jj}^{\pm}$, которая является диагональной.

Во-первых, матрица $\hat{G}_{jj}^{\pm}$ содержит как действительную, так и мнимую части. Кроме того, можно по аналогии с коэффициентами $\hat{\beta}^{\pm}$ условно выделить "монопольную" часть этой матрицы (включающую нижний правый элемент) и "дипольную" часть (включающую остальные диагональные элементы). Их физический смысл проявляется, если рассмотреть среду, неоднородную только по сжимаемости или только по плотности. Ввиду того, что в (35) входит произведение $\hat{G}_{jj}^{\pm}\hat{A}_1$, в первом случае

будет играть роль только "монопольная", а во втором – только "дипольная" часть матрицы $\hat{G}_{jj}^{\pm}$.

Во-вторых, $\mathrm{Re}\,\hat{G}_{jj}^{\pm}$ пропорциональна площади элемента дискретизации S_j, и при достаточно мелком разбиении величина элементов этой матрицы может быть существенно меньше величины соответствующих элементов матрицы $\mathrm{Im}\hat{G}_{jj}^{\pm}$. Однако пренебрегать матрицей $\mathrm{Re}\,\hat{G}_{jj}^{\pm}$ можно далеко не всегда, поскольку именно она отвечает за выполнение первых соотношений (43) и, следовательно, (15).

В-третьих, "монопольная" часть матрицы $\hat{G}_{jj}^{\pm}$ является чисто действительной и при этом, как отмечено, стремится к нулю с уменьшением шага дискретизации. Данное обстоятельство позволяет в ряде задач, где рассматривается среда с неоднородностями чисто рефракционного, но не плотностного типа, положить $\hat{G}_{jj}^{\pm}$ равной нулю либо, более точно, $\hat{G}_{jj}^{\pm} = \mathrm{Re}\,\hat{G}_{jj}^{\pm} \equiv \int_{\Re_j} \mathrm{Re}\,\hat{G}_0^{\pm}(\mathbf{r}_j, \mathbf{z}')d\mathbf{z}'$, – здесь результат интегрирования является конечной величиной. Задачи именно этого класса, когда играет роль только нижний правый матричный элемент функции Грина $\hat{G}_{jj}^{\pm}$, описываются классическим уравнением Липпмана–Швингера (2) с функцией рассеивателя $v(\mathbf{z},\omega) \equiv \omega^2\left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{z})}\right)$ [4]. При этом из области неоднородности $\Re$, внутри которой ведется интегрирование, можно исключить точку "наблюдения" $\mathbf{z} \in \Re$: $V(\mathbf{z},\omega) = V_0(\mathbf{z},\omega) + \int_{\Re, \mathbf{z}' \neq \mathbf{z}} G_0(\mathbf{z}-\mathbf{z}')v(\mathbf{z}',\omega)V(\mathbf{z}',\omega)d\mathbf{z}'$. Следовательно, проблема сингулярности "классической" функции Грина в нуле в этих задачах не возникает. Ситуация меняется, когда среда содержит неоднородности плотности, на которых происходит рассеяние дипольного типа. Мнимые компоненты элементов "дипольной" части матрицы $\hat{G}_{jj}^{\pm}$ не равны нулю и не зависят от размера рассеивателя. Следовательно, в уравнении типа Липпмана–Швингера принципиально необходимо учитывать все точки рассеивателя, включая точку наблюдения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, можно отметить следующее. Рассеяние акустических волн на неоднородности малого волнового размера приводит в общем случае к наличию мультипольных компонент рассеянного поля всех порядков. Однако, если оно не сопровождается резонансом, который проявляется в сильной неоднородности поля внутри рассеивателя, то при уменьшении размера R_0 неоднородности существенными (на расстояниях от ее центра порядка R_0 и больше) являются лишь монопольная и дипольная компоненты. Согласно (13) и (18), оценки для квадрупольной компоненты и компонент более высокого порядка мультипольности убывают при $R_0 \to 0$ не медленнее, чем $(k_0R_0)^{m-1}$, где $m = 2$ для квадрупольной компоненты. Это может нарушаться лишь в отдельных узких полосах частот, соответствующих резонансам. Если рассеяние носит преимущественно монопольно-дипольный характер, т.е. компоненты высших порядков мультипольности малы, то справедливо представление (16), где коэффициенты рассеяния $\hat{\beta}^{\pm}$ удовлетворяют соотношениям (15). Данные соотношения выражают принципиальную необходимость учитывать процессы многократного рассеяния внутри неоднородности, которые существенны, даже если она имеет малый волновой размер и не является резонансной [2].

В двумерном случае данные выводы подтверждаются анализом поля, рассеянного цилиндром малого радиуса, плотность и сжимаемость которого отличаются от фоновых. При этом оказывается, что соотношения (15), учитывающие вклад только монопольной и дипольной компонент, остаются справедливыми независимо от радиуса цилиндра. Увеличение радиуса приводит лишь к появлению компонент рассеянного поля более высокого порядка мультипольности.

Задача определения поля, рассеянного нерезонансной неоднородностью малых волновых размеров, тесно связана с решением дискретизованного уравнения типа Липпмана–Швингера, в процессе которого требуется учитывать процессы многократного рассеяния внутри каждого элемента дискретизации. Это вызывает проблемы в том случае, когда среда является неоднородной по плотности, которые не удается снять с помощью, например, выбора более мелкого шага дискретизации. Поэтому вводится матрица $\hat{G}_{jj}^{\pm}$, учитывающая влияние поля, рассеянного каждым нерезонансным элементом дискретизации (элементарным участком) внутри самого себя. Действительная часть этой матрицы пропорциональна площади (объему) элемента дискретизации и может быть мала по сравнению с мнимой. Однако именно она отвечает за выполнение соотношений (15), поэтому в ряде задач пренебрегать ею нельзя. Мнимая компонента матрицы не зависит от элемента дискретизации. При этом ее "монопольная" часть равна нулю, благодаря чему подобных проблем при решении классического уравнения Липпмана–Швингера не возникает. Полученный явный вид (42) матрицы $\hat{G}_{jj}^{\pm}$ позво-

ляет свести решение матричного уравнения типа Липпмана–Швингера к системе линейных алгебраических уравнений, т.е. позволяет решать прямую задачу рассеяния в среде с произвольным пространственным распределением плотности и сжимаемости.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-22-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буров В.А., Морозов С.А.* Связь между амплитудой и фазой сигнала, рассеянного "точечной" акустической неоднородностью // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 6. С. 751–756.
2. *Дмитриев К.В.* Матричные функции Грина и их использование при анализе рассеяния на неоднородности плотности и скорости звука // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 6. С. 656–668.
3. *Bergmann P.G.* The wave equation in a medium with a variable index of refraction // J. Acoust. Soc. Am. 1946. V. 17. № 4. P. 329–333.
4. *Горюнов А.А., Сасковец А.В.* Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989. 152 с.
5. *Буров В.А., Дмитриев К.В., Сергеев С.Н.* Акустические "дважды отрицательные" среды // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 3. С. 292–306.
6. *Бархатов А.Н., Горская Н.В., Горюнов А.А., Гурбатов С.Н., Можаев В.Г., Руденко О.В.* Акустика в задачах. М.: Наука. Физматлит, 1996. 336 с.
7. *Дмитриев К.В.* Максимальная мощность, рассеиваемая точечной неоднородностью в случаях разной пространственной размерности // Известия РАН. Серия Физическая. 2015. Т. 79. № 12. С. 1700–1704.
8. *Бобровницкий Ю.И.* Импедансная теория рассеяния и поглощения звука: условно лучший поглотитель и предельные возможности пассивных рассеивателей и поглотителей // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 1. С. 113–118.
9. *Руденко О.В., Собисевич Л.Е., Собисевич А.Л., Хедберг К.М.* Нелинейный отклик слоя на импульсное воздействие в задачах диагностики малых неоднородностей // Доклады Академии наук. 2000. Т. 374. № 2. С. 194–197.
10. *Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г., Натансон Г.И., Риз П.М., Слободецкий Л.Н., Смирнов М.М.* Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964. 368 с.