

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ  
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534-14

ИЗЛУЧАТЕЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ  
НЕОГРАНИЧЕННОГО СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ

© 2018 г. М. В. Калашник

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН  
109017 Москва, Пыжевский пер. 3

ФГБУ НПО “Тайфун”

249038 г. Обнинск Калужской обл., ул. Победы 4

e-mail: kalashnik-obn@mail.ru

Поступила в редакцию 14.04.2017 г.

Рассмотрена задача о линейной динамике возмущений неограниченного струйного течения с кусочно-линейным профилем скорости. Устойчивые возмущения течения в несжимаемой среде – это так называемые волны потока, локализованные у скачка завихренности. В работе показано, что за счет акустического излучения в сжимаемой среде амплитуда этих волн медленно нарастает, т.е. возникает неустойчивость. Асимптотическое решение задачи при малых числах Маха представлено в терминах функций Эйри. Получено аналитическое выражение для инкремента нарастания возмущений.

*Ключевые слова:* акустическое излучение, излучательная неустойчивость, струйное течение, акустические и внутренние гравитационные волны

DOI: 10.7868/S0320791918020089

ВВЕДЕНИЕ

В классической теории гидродинамической устойчивости рассматриваются возмущения вихревых течений идеальной несжимаемой среды. Важная особенность динамики возмущений в сжимаемой среде состоит в излучении акустических волн, уносящих энергию на бесконечность [1, 2]. Такое излучение может приводить к дестабилизации устойчивых вихревых течений, т.е. к росту энергии возмущений. Для спиральных возмущений вихря Рэнкина этот факт был впервые установлен в работе [3], а в работе [4] дана физическая интерпретация неустойчивости. Согласно этой интерпретации, возмущения вихря представляют собой волны отрицательной энергии, для которых сток энергии за счет акустического излучения приводит к росту энергии возмущений.

В существующих работах по акустической или излучательной неустойчивости, как правило, рассматриваются возмущения осесимметричных или эллиптических локализованных вихрей [5–7]. В настоящей работе рассмотрена задача о динамике возмущений неограниченного струйного течения с кусочно-линейным профилем скорости. Устойчивые возмущения этого течения в несжимаемой среде представляют собой так называемые волны потока, локализованные у скачка завихренности течения [8, 9]. Как показано в работе, при учете сжимаемости и малых значениях числа Маха ам-

плитуда этих волн медленно нарастает за счет акустического излучения. Таким образом, течение, которое часто называют устойчивой струей (stable jet) [9], в сжимаемой среде оказывается неустойчивым.

Отметим, что интерес к рассмотренной задаче стимулирован поиском динамических механизмов, обеспечивающих непрерывную (спонтанную) генерацию волн. В последние годы активно исследовался один из таких механизмов – механизм генерации волн (произвольной природы) вихревыми возмущениями в сдвиговых течениях [10–12]. Излучательная неустойчивость дополняет этот механизм. С указанными механизмами, видимо, можно связать наблюдаемые волновые проявления от атмосферных фронтов и струйных течений [12].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЕ  
ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

Двумерные изэнтропические движения идеального газа описываются уравнениями [13]:

$$\begin{aligned} \rho \, d\mathbf{u}/dt &= -\nabla P, \quad \partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \\ P/P_0 &= (\rho/\rho_0)^\kappa, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{u} = (u, v)$  – вектор скорости,  $\rho$  – плотность,  $P$  – давление,  $\rho_0, P_0$  – фоновые значения  $\rho, P$ ;

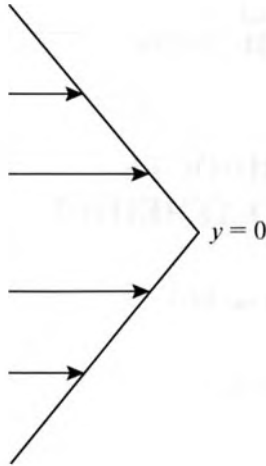


Рис. 1. Профиль скорости неограниченного струйного течения.

$\kappa = c_p/c_v$  – отношение теплоемкостей при постоянных давлении и объеме соответственно (для воздуха  $\kappa = 7/5$ );  $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u}, \nabla)$  – оператор полной производной. Важным следствием системы уравнений (1) является уравнение переноса потенциальной завихренности

$$d\Omega/dt = 0, \quad \Omega = \rho^{-1}(v_x - u_y), \quad (2)$$

отражающее интегральный вариант теоремы Кельвина о циркуляции для баротропных жидкостей [9].

Точное решение системы (1),  $\mathbf{u} = (U_*(y), 0)$ ,  $p = P_0$ ,  $\rho = \rho_0$ , описывает плоскопараллельное течение с горизонтальным сдвигом. Полагая  $U_*(y) = U_0 U(y/L)$ , для описания линейной динамики возмущений течения из (1) получим систему (безразмерная форма)

$$\begin{aligned} Du/Dt + U'(y)v + p_x = 0, \quad Dv/Dt + p_y = 0, \\ \varepsilon^2 Dp/Dt + u_x + v_y = 0, \\ D/Dt = \partial/\partial t + U(y)\partial/\partial x. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь в качестве масштабов координат, скорости и времени приняты соответственно  $L$ ,  $U_0$ ,  $L/U_0$ , масштаб давления  $\rho_0 U_0^2$ . В систему (3) входит безразмерный параметр (число Маха)  $\varepsilon = U_0/c_*$ , где скорость звука  $c_* = \sqrt{\kappa P_0/\rho_0}$ . Из системы (3) следует уравнение для потенциальной завихренности возмущений

$$Dq/Dt = U''(y)v, \quad q = v_x - u_y + \varepsilon^2 U'(y)p, \quad (4)$$

представляющее собой линейризованную форму уравнения (2). Величина  $q$  есть сумма вертикального компонента вихря  $v_x - u_y$  и поправки за счет сжимаемости.

Далее будем рассматривать кусочно-линейный профиль скорости

$$U(y) = 1 - |y|, \quad (5)$$

описывающий неограниченное струйное течение с разрывом завихренности при  $y = 0$  (рис. 1). Для этого профиля  $U'(y) = -H(y)$ ,  $U''(y) = -2\delta(y)$ , где  $H(y)$ ,  $\delta(y)$  – функция Хэвисайда и дельта-функция соответственно. С учетом второго равенства уравнению (4) удовлетворяют возмущения с нулевой потенциальной завихренностью

$$v_x - u_y + \varepsilon^2 U'(y)p = 0, \quad y \neq 0. \quad (6)$$

Для таких возмущений система уравнений (3) сводится к одному уравнению относительно тангенциального компонента скорости:

$$\varepsilon^2 D^2 u/Dt^2 = u_{xx} + u_{yy}. \quad (7)$$

Это уравнение получается применением оператора  $D/Dt$  к первому уравнению системы с последующим использованием (6). Подчеркнем, что уравнение справедливо всюду вне линии разрыва  $y = 0$ .

Прежде чем переходить к дальнейшему анализу, обсудим динамику возмущений течения (5) в модели несжимаемой среды. В этой модели  $\varepsilon = 0$ , и введением функции тока  $v = \psi_x$ ,  $u = -\psi_y$ , уравнение (4) сводится к замкнутому уравнению:

$$Dq/Dt = -2\delta(y)\psi_x, \quad q = \psi_{xx} + \psi_{yy}. \quad (8)$$

Отыскивая решения (8) в форме нормальных мод  $\psi = \tilde{\psi}(y)e^{ik(x-ct)}$ , получим уравнение

$$(U - c)(\tilde{\psi}_{yy} - k^2\tilde{\psi}) = -2\delta(y)\tilde{\psi}, \quad (9)$$

где  $k$  – волновое число,  $c$  – комплексная фазовая скорость. Из (9) следует, что всюду вне линии разрыва  $\tilde{\psi}_{yy} - k^2\tilde{\psi} = 0$ , откуда  $\tilde{\psi} = a \exp(-k|y|)$  и  $\tilde{\psi}_y = -aH(y)k \exp(-k|y|)$ ,  $a$  – произвольная постоянная. Для определения фазовой скорости используется принципиально важное условие на разрыве, которое получается интегрированием (9) по малой окрестности точки  $y = 0$ :

$$(1 - c)(\tilde{\psi}_y(+0) - \tilde{\psi}_y(-0)) = -2\tilde{\psi}(0). \quad (10)$$

С учетом  $\tilde{\psi}(0) = a$ ,  $\tilde{\psi}_y(\pm 0) = \mp ak$  из (10) следует известное выражение для фазовой скорости [9]:

$$c = 1 - k^{-1}, \quad (11)$$

свидетельствующее об устойчивости струйного течения (5) в несжимаемой среде. Функция тока возмущения

$$\psi = a \exp(-k|y|) \exp ik(x - ct) \quad (12)$$

описывает прижатую к скачку завихренности и распространяющуюся с фазовой скоростью  $c$  как

называемую волну потока. Ниже будет показано, что за счет акустического излучения амплитуда таких волн в сжимаемой среде медленно нарастает, т.е. возникает неустойчивость. В математическом плане эта неустойчивость обусловлена появлением комплексной поправки к скорости (11) с положительной мнимой частью.

Обратим внимание, что для возмущения (12) на линии разрыва тангенциальный компонент скорости  $u = -\psi_y$  терпит скачок, а его нормальная производная  $u_y$  непрерывна. Эта особенность сохраняется и в модели сжимаемой среды.

### 3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ. УСЛОВИЯ НА РАЗРЫВЕ И УСЛОВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Возмущения течения (5) в сжимаемой среде будем представлять в форме нормальных мод:

$$(u, v, p) = (\tilde{u}(y), \tilde{v}(y), \tilde{p}(y)) e^{ik(x-ct)}, \quad (13)$$

где в круглых скобках правой части стоят амплитуды, зависящие только от  $y$ . Для определения амплитуд из (3), (6) следует система уравнений

$$\begin{aligned} ik(U-c)\tilde{u} + U\tilde{v} + ik\tilde{p} &= 0, \quad ik(U-c)\tilde{v} + \tilde{p}_y = 0, \\ ik(U-c)\tilde{p} + ik\tilde{u} + \tilde{v}_y &= 0, \quad ik\tilde{v} - \tilde{u}_y + \varepsilon^2 U\tilde{p} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Последнее уравнение системы (14) есть амплитудная форма (6) для возмущений с  $q = 0$ . Это уравнение можно использовать вместо любого из первых трех уравнений. Подчеркнем, что в однородной системе (14) фазовая скорость  $c$  играет роль спектрального параметра, обеспечивающего существование нетривиальных решений. Решение задач теории гидродинамической неустойчивости состоит в нахождении этого параметра.

Система (14) сводится к одному уравнению относительно амплитуды тангенциального компонента скорости. Так, рассматривая первое и последнее уравнения (14) как систему алгебраических уравнений относительно  $\tilde{v}, \tilde{p}$ , получим диагностические (поляризационные) соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= -ik\Delta^{-1}(\tilde{u}_y + \varepsilon^2 U(U-c)\tilde{u}), \\ \tilde{p} &= \Delta^{-1}(U\tilde{u}_y - k^2(U-c)\tilde{u}), \quad \Delta = k^2 + \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (15)$$

где, напомним,  $U(y) = -H(y)$ . Подстановка (15) во второе уравнение (14) приводит к уравнению

$$\tilde{u}_{yy} + k^2(\varepsilon^2(U-c)^2 - 1)\tilde{u} = 0. \quad (16)$$

Данное уравнение можно получить и непосредственно из уравнения (7), выше представлен вывод из системы амплитудных уравнений.

С учетом выражения (5) для профиля скорости далее будем записывать (16) в виде

$$\tilde{u}_{yy} + k^2(\varepsilon^2(|y| - \tilde{c})^2 - 1)\tilde{u} = 0, \quad \tilde{c} = 1 - c. \quad (17)$$

Здесь  $\tilde{c}$  есть разность осевой скорости течения  $U(0) = 1$  и фазовой скорости  $c$ .

При построении решения однородного уравнения (17) к нему нужно присоединить условия на разрыве  $y = 0$  и условия на бесконечности. Условия на разрыве завихренности сводятся к непрерывности нормальной компоненты скорости и давления при переходе через разрыв. С использованием первого уравнения (14) эти условия записываются в виде

$$\begin{aligned} \tilde{v}(+0) &= \tilde{v}(-0), \quad ik\tilde{c}\tilde{u}(+0) - \tilde{v}(+0) = \\ &= ik\tilde{c}\tilde{u}(-0) + \tilde{v}(-0), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\tilde{c}$  определено (17). Данные условия можно представить в терминах амплитуды  $\tilde{u}$ , используя выражения

$$\tilde{v}(\pm 0) = -ik\Delta^{-1}(\tilde{u}_y(\pm 0) \mp \varepsilon^2 \tilde{c}\tilde{u}(\pm 0)), \quad (19)$$

вытекающие из первого соотношения (15). Подстановка (19) в (18) приводит условия на разрыве к виду

$$\tilde{u}_y(+0) - \tilde{u}_y(-0) = \varepsilon^2 \tilde{c}(\tilde{u}(+0) + \tilde{u}(-0)), \quad (20)$$

$$\tilde{u}_y(+0) + \tilde{u}_y(-0) = -\tilde{c}k^2(\tilde{u}(+0) - \tilde{u}(-0)). \quad (21)$$

Обратим внимание, что, согласно (20), из непрерывности нормальной производной  $\tilde{u}_y$  следует наличие скачка у самой функции.

Наряду с условиями на разрыве, принципиально важную роль играет условие на бесконечности – условие излучения. Оно состоит в том, что поток волновой энергии  $\Pi = \langle vp \rangle$  (в системе координат, связанной с течением) должен быть направлен от линии разрыва, т.е. быть положительным при  $y \rightarrow +\infty$  и отрицательным при  $y \rightarrow -\infty$ . Здесь угловыми скобками отмечена операция горизонтального осреднения  $\langle \varphi \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \varphi dx$ .

Для математической формулировки этого условия представим  $c = c_r + ic_i$  и учтем, что вещественная часть решения для нормальной моды записывается в виде  $p = e^{kc_r t} (\tilde{p} e^{i\theta} + \tilde{p}^* e^{-i\theta})$ ,  $\theta = k(x - c_r t)$ , где звездочкой обозначено комплексное сопряжение (аналогично для остальных переменных). При этом  $\langle vp \rangle = e^{2kc_r t} (\tilde{p}\tilde{v}^* + \tilde{p}^*\tilde{v}) = 2e^{2kc_r t} \text{Re}(\tilde{p}^*\tilde{v})$ , где символами  $\text{Re}$  и  $\text{Im}$  далее обозначаются действительная и мнимая части выражений. Используя соотношения (15), легко показать, что  $\text{Re}(\tilde{p}^*\tilde{v}) = k\Delta^{-1} \text{Re}(i(\tilde{c} - |y|)\tilde{u}^*\tilde{u}_y)$ . Учитывая, что

$\text{Re}(iz) = \text{Im}(z^*)$ , для потока энергии на бесконечности отсюда асимптотически получим

$$\Pi = \langle v p \rangle = -2k\Delta^{-1}|y|e^{2kc|t|}W, \quad W = \text{Im}\left(\tilde{u}\tilde{u}_y^*\right), \quad (22)$$

$$|y| \rightarrow \infty.$$

Непосредственно из (22) следует, что условию излучения удовлетворяют комплексные решения уравнения (17), для которых  $W < 0$  при  $y \rightarrow +\infty$  и  $W > 0$  при  $y \rightarrow -\infty$ . Обратим внимание: при  $|y| \rightarrow \infty$  в уравнении (17) можно пренебречь  $\tilde{c}$ , и величина  $W$  играет роль вронскиана уравнения с вещественными коэффициентами. Согласно общей теории [14], для таких уравнений  $W = \text{const}$ .

Для симметричного профиля течения (5) уравнение (17) инвариантно относительно замены  $y \rightarrow -y$ . Этот факт, вместе с условиями в нуле и на бесконечности, позволяет ограничиться нахождением решений (17) на положительной полуоси  $y > 0$ . Действительно, обозначим решения (17) в областях  $y > 0$ ,  $y < 0$  через  $\tilde{u}_+(y)$ ,  $u_-(y)$  и используем правило сопряжения решений  $\tilde{u}_-(y) = -\tilde{u}_+(-y)$ . При этом условие (20) автоматически удовлетворяется, а условие (21) сводится к условию

$$\tilde{u}_y(+0) = -\tilde{c}k^2\tilde{u}(+0). \quad (23)$$

Если условие излучения  $W < 0$  выполнено при  $y \rightarrow +\infty$ , то с учетом правила сопряжения оно автоматически выполняется при  $y \rightarrow -\infty$  ( $W > 0$ ). Таким образом приходим к следующей граничной (спектральной) задаче – на полуоси  $y > 0$  найти значения параметра  $\tilde{c} = 1 - c$ , при котором существуют нетривиальные решения уравнения (17), удовлетворяющие условию (23) и условию излучения. Асимптотическое решение этой задачи получено в следующем разделе.

#### 4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ МАХА

Замена переменной  $\xi = \epsilon y$  приводит уравнение (17) к виду

$$\tilde{u}_{\xi\xi} + \lambda^2 \left( (|\xi| - \epsilon\tilde{c})^2 - 1 \right) \tilde{u} = 0, \quad \lambda^2 = (k/\epsilon)^2. \quad (24)$$

Асимптотическая форма (24) при  $\epsilon \ll 1$  сводится к уравнению

$$\tilde{u}_{\xi\xi} + \lambda^2 (\xi^2 - 1) \tilde{u} = 0, \quad (25)$$

которое не содержит спектральный параметр  $\tilde{c}$ . Этот факт существенно упрощает решение сформулированной граничной задачи – после нахождения решения уравнения (25), удовлетворяющего условию излучения, параметр  $\tilde{c}$  находится из граничного условия (23):

$$u_\xi(+0) = -\tilde{c}k\lambda u(+0). \quad (26)$$

На полуоси  $\xi > 0$  уравнение (25) содержит точку поворота  $\xi = 1$ , при переходе через которую монотонный (экспоненциальный) характер решения сменяется осциллирующим поведением, характерным для акустических волн. Методы построения асимптотических решений уравнений с точкой поворота в случае  $\lambda \gg 1$  (большой параметр) описаны в [14, 15]. Соответствующие решения выражаются в терминах функций Эйри  $\text{Ai}(z)$ ,  $\text{Bi}(z)$ . Для уравнения (25) в качестве линейно-независимых решений удобно использовать функции

$$\Phi_1(z) = \text{Bi}(z) + i\text{Ai}(z),$$

$$\Phi_2(z) = \Phi_1^*(z) = \text{Bi}(z) - i\text{Ai}(z).$$

Функция  $\Phi_1(z)$  имеет асимптотические представления при  $z \rightarrow +\infty$ :

$$\Phi_1(-z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp i \left( \frac{2}{3} z^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \left( \exp \left( \frac{2}{3} z^{3/2} \right) + \frac{i}{2} \exp \left( -\frac{2}{3} z^{3/2} \right) \right). \quad (27)$$

Представления (27) вытекают из известных асимптотических представлений для функций Эйри [15].

Асимптотическое разложение решения уравнения (25), равномерно пригодное для всех  $\xi > 0$ , включая точку поворота  $\xi = 1$ , дается выражением [15]

$$\tilde{u}(\xi) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s'(\xi)}} \left( C_1 \Phi_1 \left[ -\lambda^{-2/3} s(\xi) \right] + C_2 \Phi_2 \left[ -\lambda^{-2/3} s(\xi) \right] \right),$$

$$\xi \geq 1: \frac{2}{3} [s(\xi)]^{3/2} = \int_1^\xi \sqrt{\tau^2 - 1} d\tau, \quad (28)$$

$$\xi \leq 1: \frac{2}{3} [-s(\xi)]^{3/2} = \int_\xi^1 \sqrt{1 - \tau^2} d\tau,$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные. Чтобы удовлетворить условию излучения, в этом выражении следует положить  $C_2 = 0$  (см. ниже). Используя асимптотические представления (27), в области  $\xi > 1$  из (28) получим асимптотическое решение

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{ae^{i\pi/4}}{\sqrt[4]{\xi^2 - 1}} \exp(i\lambda\alpha(\xi)), \quad a = \frac{C_1}{\pi^{1/2}\lambda^{1/6}},$$

$$\alpha(\xi) = \int_1^\xi \sqrt{\tau^2 - 1} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \xi\sqrt{\xi^2 - 1} - \ln \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \right). \quad (29)$$

Оно совпадает со стандартным ВКБ-решением уравнений, содержащих большой параметр [15]. Из (29) следует асимптотика при  $\xi \rightarrow \infty$ :

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{ae^{i\pi/4}}{\sqrt{\xi}} \exp\left(i\lambda \frac{\xi^2}{2}\right). \quad (30)$$

Для решения (30) вронскиан  $W = \text{Im}(\tilde{u}\tilde{u}_\xi^*) = -\lambda|a|^2 < 0$ , т.е. выполнено условие излучения на бесконечности. Для решения, отвечающего  $C_2 \neq 0$ , вронскиан  $W > 0$ . По этой причине выше было положено  $C_2 = 0$ .

С учетом (27), (28) асимптотика решения в области  $\xi < 1$  имеет вид

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{a}{\sqrt[4]{1-\xi^2}} \left( \exp(\lambda\beta(\xi)) + \frac{i}{2} \exp(-\lambda\beta(\xi)) \right), \quad (31)$$

$$\beta(\xi) = \int_\xi^1 \sqrt{1-\tau^2} d\tau = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left( \arcsin \xi + \xi \sqrt{1-\xi^2} \right).$$

Разложение  $\beta(\xi)$  по степеням  $\xi$  дает асимптотику при  $\xi \rightarrow 0 + 0$ :

$$\tilde{u}(\xi) = ae^{\lambda\pi/4} \left( e^{-\lambda\xi} + \frac{i}{2} e^{-\lambda\pi/2} e^{\lambda\xi} \right). \quad (32)$$

Определяя отсюда  $\tilde{u}(+0)$ ,  $\tilde{u}_\xi(+0)$  и подставляя в условие (26), найдем значение спектрального параметра:

$$\tilde{c} = k^{-1} \frac{1 - (i/2)e^{-\lambda\pi/2}}{1 + (i/2)e^{-\lambda\pi/2}} \equiv k^{-1} \frac{1 - m - ie^{-\lambda\pi/2}}{1 + m}, \quad (33)$$

где  $m = \exp(-\lambda\pi)/4$ . Соответственно, для фазовой скорости  $c = 1 - \tilde{c}$  асимптотически получим

$$c = c_r + ic_i = 1 - k^{-1} + ik^{-1}e^{-\lambda\pi/2}. \quad (34)$$

Поскольку  $c_i = k^{-1}e^{-\lambda\pi/2} > 0$ , имеет место неустойчивость с экспоненциально малым инкрементом нарастания  $\gamma = kc_i = e^{-\lambda\pi/2}$ . При  $U_0 = 30$  м/с,  $L = 300$  м,  $\lambda = 10$  ( $k = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ) характерное время нарастания возмущения в  $e$  раз  $T = (L/U_0)\gamma^{-1}$  практически на шесть порядков превышает адвективный временной масштаб  $L/U_0 = 1$  мин. Таким образом, излучательная неустойчивость при малых числах Маха развивается крайне медленно. Отметим, что качественно аналогичный результат был получен в работе [16] для ограниченного струйного течения (с экспоненциальным профилем) во вращающемся слое мелкой воды. Было показано, что время нарастания возмущений многократно превышает период вращения системы.

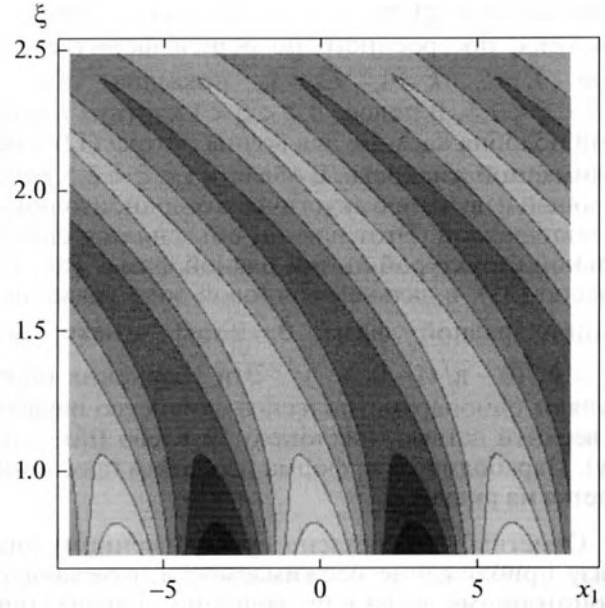


Рис. 2. Теневая картина изолиний поля тангенциальной компоненты скорости в движущейся системе координат.

Остановимся на некоторых особенностях излучаемого волнового поля в дальней волновой зоне  $\xi \rightarrow +\infty$  (на больших расстояниях от линии разрыва). С учетом (32) и вытекающих из (15) асимптотических соотношений  $\tilde{v} = \xi\tilde{u}$ ,  $\tilde{p} = \varepsilon^{-1}\xi\tilde{u}$  после выделения вещественной части (13) для этого поля получим

$$u = \frac{ae^{\gamma t}}{\sqrt{\xi}} \cos \tilde{\theta}, \quad v = a\sqrt{\xi}e^{\gamma t} \cos \tilde{\theta}, \quad (35)$$

$$p = \varepsilon^{-1}v, \quad \tilde{\theta} = k(x - c_r t) + \lambda \frac{\xi^2}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Согласно (35), осцилляции поля по координате  $\xi$  носят негармонический характер – локальная длина волны по этой координате стремится к нулю при  $\xi \rightarrow +\infty$ . В произвольный момент времени с ростом  $\xi$  тангенциальный компонент скорости  $u$  затухает как  $1/\sqrt{\xi}$ , а касательный компонент  $v$  (вместе с возмущением давления) нарастает по корневому закону. Этот рост обеспечивает постоянство плотности потока импульса  $I = \langle uv \rangle$ . Для этого потока справедливо точное выражение  $I = -k\Delta^{-1}e^{2\gamma t} (W + \varepsilon^2|\tilde{u}|^2 c_i)$ , следующее из выражений для амплитуд. С учетом  $W = -\lambda|a|^2 < 0$ , при  $\varepsilon \ll 1$  отсюда асимптотически получим  $I = \varepsilon^{-1}e^{2\gamma t}|a|^2$ .

На рис. 2 показана теневая картина изолиний компонента скорости  $u$  в движущейся системе

координат  $(x_1, \xi)$ , где  $x_1 = x - ct$ . Для наглядности рисунка, построенного по общей формуле (28) при  $\lambda = 5$ ,  $k = 1$ ,  $C_1 = 1$ , показана область  $0.7 < \xi < 2.5$ . В полосе  $0.7 < \xi < 1$  картина изолиний подобна картине для волны потока (12) в несжимаемой жидкости. В области  $1 < \xi < 2.5$ , отвечающей излучению акустических волн, изолинии имеют наклон. Этот наклон объясняется специальной структурой линий равной фазы. Так, согласно (35), в дальней волновой зоне уравнения линий равной фазы  $\bar{\theta} = \text{const}$  имеют вид  $x_1 = k^{-1}(\bar{\theta} - \pi/4) - 0.5\epsilon^{-1}y^2$ . Эти уравнения определяют однопараметрическое семейство парабол с верхней ветвью, наклоненной влево (по потоку). Параболическая форма изолиний прослеживается на рисунке.

Отметим, что согласно представленному анализу приближение несжимаемости, отвечающее монотонному характеру решений, справедливо при  $\xi \ll 1$ , или на расстояниях от линии разрыва  $|y| \ll cL/U_0$  (размерная форма). Нетрудно показать, что точка поворота есть уровень, для которого частота акустической волны с учетом доплеровской поправки совпадает с частотой волны потока в несжимаемой среде.

## 5. ИЗЛУЧЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В НЕСЖИМАЕМОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

Возмущения вихревых течений в несжимаемой стратифицированной среде представляют собой внутренние гравитационные волны (ВГВ), обусловленные действием сил плавучести. Эти волны повсеместно распространены в атмосфере и океане и активно изучаются [17–19]. Покажем, что задача об излучении длинных ВГВ сводится к задаче об излучении акустических волн.

Рассмотрим течение  $\mathbf{u} = (U_*(y), 0, 0)$  в бесконечном горизонтальном слое  $0 \leq z \leq H$  стратифицированной жидкости с постоянной частотой плавучести  $N$ . В приближении Буссинеска и гидростатическом (длинноволновом приближении) динамика возмущений течения описывается системой уравнений [9, 12]

$$\begin{aligned} Du/Dt + U'_*(y)v + p_x &= 0, \quad Dv/Dt + p_y = 0, \\ p_z &= \sigma, \quad D\sigma/Dt + N^2w = 0, \quad u_x + v_y + w_z = 0, \\ D/Dt &= \partial/\partial t + U_*(y)\partial/\partial t. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь  $p, \sigma$  – нормированные возмущения давления и плавучести,  $u, v, w$  – компоненты скорости вдоль горизонтальных осей  $x, y$  и вертикальной

оси  $z$  соответственно. Из системы (36) следует уравнение

$$Dq/Dt = U''_*(y)v, \quad q = N^2(v_x - u_y) - U'_*(y)\sigma_z, \quad (37)$$

представляющее собой линейризованную форму уравнения для потенциальной завихренности [9, 12].

При задании условия  $w = 0$  на твердых границах слоя  $z = 0, H$  система (37) допускает разделение переменных – решение можно искать в виде ряда по собственным функциям (модам) оператора  $d^2/dz^2$ :

$$\begin{aligned} (u, v, p) &= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n, v_n, p_n) \cos \frac{n\pi}{H} z, \\ (w, \sigma) &= \sum_{n=1}^{\infty} (w_n, \sigma_n) \sin \frac{n\pi}{H} z. \end{aligned}$$

Подставляя этот ряд в (36) и исключая  $w_n, \sigma_n$ , для каждой вертикальной моды получим систему уравнений (нижний индекс для краткости опускаем)

$$\begin{aligned} Du/Dt + U'_*(y)v + p_x &= 0, \quad Dv/Dt + p_y = 0, \\ c^2 Dp/Dt + u_x + v_y &= 0, \end{aligned} \quad (38)$$

где  $c = c_n = HN/\pi n$  – фазовая скорость  $n$ -й моды внутренних волн [9, 12]. Представляя  $U_*(y) = U_0 U(y/L)$  и используя ранее введенные масштабы, из (38) получим безразмерную систему (3), где теперь число Маха  $\epsilon = U_0/c_n$ . Таким образом, динамика акустических волн и длинных ВГВ описывается одной и той же системой уравнений. Отсюда, в частности, следует излучательная неустойчивость струйного течения (5) в стратифицированной несжимаемой среде при  $\epsilon \ll 1$ . Отметим, что при характерном для океана значении  $N = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$  и  $H = 5 \text{ км}$  фазовая скорость первой моды ВГВ  $c_1 = 1.6 \text{ м/с}$ . Поскольку  $c_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , в задачах о ВГВ физически содержателен также предельный случай  $\epsilon \gg 1$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-17-00806).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лямшев Л.М., Скворцов А.Т. Излучение звука локализованными вихрями в слабосжимаемой среде (обзор) // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 15. С. 769–790.
2. Howe M.S. Theory of Vortex Sound. Cambridge University Press, 2003. 216 p.
3. Broadbend E., Moore D. Acoustic destabilization of vortices // Phil. Trans. Roy. Soc. 1979. V. A290. P. 353–371.

4. *Копьев В.Ф., Леонтьев Е.А.* Об акустической неустойчивости аксиального вихря // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 192–198.
5. *Цейтли В.Ю.* Об акустическом излучении распределенных вихревых структур // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 2. С. 321–326.
6. *Гряник В.М.* Излучение звука вихрями, акустическая неустойчивость и акустический коллапс // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 5. С. 513–519.
7. *Zeitlin V.* On the backreaction of acoustic radiation for distributed two-dimensional vortex structures // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. № 6. P. 1677–1680.
8. *Степаняц Ю.А., Фабрикант А.Л.* Распространение волн в сдвиговых потоках. М.: Наука, 1996. 240 с.
9. *Vallis G.K.* Atmospheric and oceanic fluid dynamics: fundamentals and large-scale circulation. Cambridge University Press, 2006. 738 p.
10. *Калашиник М.В.* Генерация акустических волн волной завихренности в сдвиговом потоке // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 4. С. 119–129.
11. *Lott F., Plougonven R., Vanneste J.* Gravity waves generated by sheared potential-vorticity anomalies // J. Atmos. Sci. 2010. V. 67. P. 157–170.
12. *Kalashnik M.V., Chkhetiani O.G.* Generation of gravity waves by singular potential-vorticity disturbances in shear flows // J. Atmos. Sci. 2017. V. 74. P. 293–307.
13. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны, М.: Мир, 1977. 622 с.
14. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1984. 344 с.
15. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
16. *Dritshel D.G., Vanneste J.* Instability of a shallow-water potential-vorticity front // J. Fluid Mech. 2006. V. 561. P. 237–254.
17. *Lindzen R.S.* Dynamics in atmospheric physics. Cambridge University Press, 1990. 309 p.
18. *Свиркунов П.Н., Калашиник М.В.* Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // УФН. 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.
19. *Калашиник М.В.* Генерация внутренних гравитационных волн вихревыми возмущениями в сдвиговых потоках // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 6. С. 723–732.