АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2018, том 64, № 2, с. 162–173

ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 532.529:534.2

ОСОБЕННОСТИ ОТРАЖЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ОТ ГРАНИЦЫ ИЛИ СЛОЯ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

© 2018 г. Д. А. Губайдуллин*, Ю. В. Федоров**

Институт механики и машиностроения Казанского НЦ РАН
420111 Казань, ул. Лобачевского 2/31
**e-mail: gubaidullin@imm.knc.ru*
***e-mail: kopperfildd@yandex.ru*

Поступила в редакцию 24.01.2017 г.

Представлена математическая модель, определяющая наклонное падение акустической волны на границу, а также слой газокапельной смеси или пузырьковой жидкости конечной толщины. Для случая падения низкочастотной акустической волны на границу раздела между чистым газом и газовзвесью, а также на границу между чистой и пузырьковой жидкостью установлены основные закономерности отражения и прохождения волны. Установлен диапазон изменения объемных содержаний капель, в котором возможно нулевое значение коэффициента отражения на низких частотах при наклонном падении волны. Показано, что при углах падения волны выше 24.5° со стороны газокапельной смеси на границу чистого газа коэффициент отражения никогда не будет равняться нулю, однако, если волна падает со стороны чистого газа на границу газовзвеси, нулевое значение коэффициента отражения возможно для ненулевых углов падения и объемного содержания включений. Представлены результаты расчетов отражения акустической волны от слоя двухфазной среды конечной толщины. Установлено, что для границы или слоя газокапельной смеси возможно появление минимума коэффициента отражения в зависимости от частоты возмущений и в определенном интервале углов падения волны, связанного в основном с различием плотностей газокапельной смеси и чистого газа.

Ключевые слова: акустические волны, газокапельная смесь или газовзвесь, пузырьковая жидкость, граница раздела, коэффициент отражения и прохождения, двухслойная среда

DOI: 10.7868/S0320791918020053

ВВЕДЕНИЕ

Исследование распространения волн в слоистых средах, содержащих слои пузырьковой жидкости или газовзвеси, актуально. Связано это как с природными явлениями (например, придонные слои, содержащие газовые пузырьки в морях, озерах либо вблизи поверхности [1–3], слои тумана, запыленного газа, содержащиеся в атмосфере [4–9]), так и с технологическими процессами [10, 11]. Описание конструкции и характеристик комбинированной панели, состоящей из двух стекол или поликарбонатов, пространство между которыми заполнено пузырьковой жидкостью, приведено в [11]; указанная панель используется для защиты информации одновременно по акустическому, оптическому и электромагнитному техническим каналам.

Среди экспериментальных исследований отметим работу [12], в которой рассмотрена двухслойная среда "вода–вода с пузырьками воздуха–воздух" и экспериментально определен коэффициент отражения в случае нормального падения акустической волны со стороны воды. В [13] рассмотрена среда "вода–вода с пузырьками воздуха–вода" и получены экспериментальные оценки коэффициента прохождения через пузырьковый экран. В [14] экспериментально исследовано распространение импульсного возмущения через трехслойный образец, находящийся в жидкости и состоящий из слоя пузырькового геля, ограниченного слоями поликарбоната. Сравнение теории с полученными экспериментальными результатами [12–14] проведено в работах [15, 16] и получено хорошее соответствие. Описание экспериментальных исследований преломления волн в газовзвеси в литературе практически отсутствует.

С основными подходами к исследованию акустики пузырьковых жидкостей и газовзвесей можно ознакомиться в известных монографиях [17–20], а с некоторыми публикациями – в обзоре [21].

В настоящей работе представлено исследование закономерностей отражения и прохождения акустических волн через границу или слой двухфазной среды.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на плоский слой толщины s (рис. 1) падает под некоторым углом θ_1 плоская акустическая волна. Среде, из которой падает волна, слою и среде, в которую проходит волна, соответственно присвоены номера 1, 2 и 3. Эти среды предполагаются однородными и неподвижными. С учетом выбранной системы координат запишем потенциалы падающей, отраженных и прошедших волн:

$$\varphi_1 = \exp[i(\omega t - K_1 z\cos\theta_1 + K_1 x\sin\theta_1)],$$

$$\varphi_R = R\exp[i(\omega t + K_1 z\cos\theta_1 + K_1 x\sin\theta_1)],$$

$$\varphi_B = B\exp[i(\omega t - K_2 z\cos\theta_2 + K_2 x\sin\theta_2)],$$

$$\varphi_F = F\exp[i(\omega t + K_2 z\cos\theta_2 + K_2 x\sin\theta_2)],$$

$$\varphi_T = T\exp[i(\omega t - K_3 z\cos\theta_3 + K_3 x\sin\theta_3)].$$

Здесь i – мнимая единица; ω – частота возмущений; t – время; K – волновое число; R, B, F, T – амплитуды волн. В [22] показано, что горизонтальная компонента волнового вектора одинакова по всей слоистой среде, отсюда имеем следующие соотношения: $K_1\sin\theta_1 = K_2\sin\theta_2 = K_3\sin\theta_3$. В дальнейших рассуждениях данный факт позволяет опустить множитель, дающий зависимость от горизонтальной координаты в экспоненте. На границах раздела запишем условия непрерывности давления и нормальной скорости:

$$z = 0\colon\ p_1 + p_R = p_B + p_F,\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_R}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_B}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_F}{\partial z},$$

$$z = s\colon\ p_T = p_B + p_F,\ \frac{\partial\varphi_T}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_B}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_F}{\partial z}.$$

Давление определяется как $p = -\rho\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$. В итоге имеем замкнутую систему из четырех уравнений и с четырьмя неизвестными R, B, F, T:

$$\rho_1(1 + R) = \rho_2(B + F),$$

$$-K_1\cos\theta_1 + RK_1\cos\theta_1 = \\ = -BK_2\cos\theta_2 + FK_2\cos\theta_2,$$

$$\rho_3 T\exp[-i\psi_3] = \rho_2 B\exp[-i\psi_2] + \rho_2 F\exp[i\psi_2],$$

$$\psi_j = K_j s\cos\theta_j,$$

$$-TK_3\cos\theta_3\exp[-i\psi_3] = \\ = -BK_2\cos\theta_2\exp[-i\psi_2] + FK_2\cos\theta_2\exp[i\psi_2].$$

Решив систему уравнений, находим выражения для коэффициентов отражения R и прохождения T в виде [22]

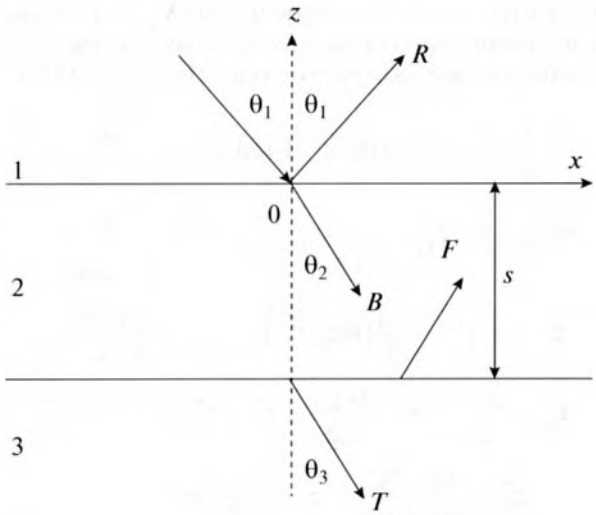

Рис. 1. Схема среды.

$$R = \frac{Z_2^{in} - Z_1}{Z_2^{in} + Z_1},\quad Z_2^{in} = \frac{Z_3 - iZ_2\mathrm{tg}\psi_2}{Z_2 - iZ_3\mathrm{tg}\psi_2}Z_2,$$
$$Z_j = \frac{\rho_j C_j}{\cos\theta_j},\quad C_j = \frac{\omega}{K_j}, \tag{1}$$

$$T = \frac{2Z_3}{Z_3 + Z_2}\exp[i\psi_3]\frac{Z_2^{in} + Z_2}{Z_2^{in} + Z_1}\exp[i\psi_2], \tag{2}$$

$$\sin\theta_j = \frac{K_1}{K_j}\sin\theta_1,\quad \psi_j = K_j s\cos\theta_j, \\ j = 1, 2, 3. \tag{3}$$

В случае падения волны на границу раздела двух сред $s \to 0$, коэффициенты отражения и прохождения приобретают вид

$$R = \frac{Z_3 - Z_1}{Z_3 + Z_1},\quad T = \frac{2Z_3}{Z_3 + Z_1},\quad T - R = 1. \tag{4}$$

Таким образом, чтобы определить искомые коэффициенты, необходимо знать скорость звука в этих средах и их плотность. В данной работе будут рассмотрены неоднородные и поглощающие среды, такие как смеси газа с каплями жидкости и жидкости с пузырьками газа, для которых характерна дисперсия скорости звука, когда скорость распространения волны зависит от частоты возмущений.

Скорость распространения волны в газовзвеси определяется следующей формулой:

$$C_{gl} = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(K_{gl})}, \tag{5}$$

где комплексное волновое число K_{gl} определяется из дисперсионного соотношения в предположении, что все включения одного размера [19]:

$$\left(\frac{C_1 K_{gl}}{\omega}\right)^2 = V(\omega)D(\omega),\quad V(\omega) = 1 + \frac{m}{1 - i\omega\tau_\nu^*},$$
$$D(\omega) = 1 + (\gamma_1 - 1)\frac{t_d}{1 + t_d},\quad t_d = \frac{mc_{p_2}}{c_{p_1}}\frac{1}{1 - i\omega\tau_T^*},$$
$$\tau_\nu^* = \tau_\nu\left(1 + \frac{1-i}{\sqrt{2}}(\omega\tau_{\mu_1})^{1/2}\right)^{-1},\quad \tau_\nu = \frac{2}{9}\frac{\rho_2 a^2}{\mu_1},$$
$$\tau_{\mu_1} = \frac{\rho_1 a^2}{\mu_1},\quad m = \frac{\alpha_2\rho_2}{\alpha_1\rho_1},\quad \tau_T^* = \tau_{T_2}^* + \frac{mc_{p_2}}{c_{p_1}}\tau_{T_1}^*, \tag{6}$$
$$\tau_{T_1}^* = \frac{\alpha_1}{3\alpha_2}\frac{\tau_{\lambda_1}}{1 + z_1},\quad z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}(\omega\tau_{\lambda_1})^{1/2},$$
$$\tau_{T_2}^* = \frac{\tau_{\lambda_2}}{3}\frac{3z_2 - (3 + z_2^2)\mathrm{th}z_2}{z_2^2(\mathrm{th}z_2 - z_2)},\quad z_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}(\omega\tau_{\lambda_2})^{1/2},$$
$$\tau_{\lambda_j} = \frac{a^2}{\kappa_j},\quad \kappa_j = \frac{\lambda_j}{\rho_j c_{p_j}},\quad j = 1, 2.$$

Переменные с индексом 1 относятся к несущей фазе (газ), с индексом 2 – к дисперсной (твердые или жидкие частицы); a – радиус включений, m – массовое содержание, α – объемное содержание, ρ – плотность, λ – коэффициент теплопроводности, c_p – теплоемкость, ω – частота возмущений, μ_1 – динамическая вязкость, C_1 – скорость звука в газе.

Аналогичным образом определим скорость распространения волны в пузырьковой жидкости:

$$C_{pg} = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(K_{pg})}, \tag{7}$$

где K_{pg} найдем из дисперсионного соотношения в предположении, что все пузырьки одного размера и одного сорта [23]:

$$\left(\frac{K_{pg}}{\omega}\right)^2 = \frac{1}{C_f^2} + \frac{3\alpha_2\alpha_1\rho_1 Q}{3\gamma_2 p_1 - QS},\quad Q = 1 + \varphi,$$
$$\varphi = 3(\gamma_2 - 1)\frac{y\mathrm{cth}y - 1}{y^2},\quad y = \left(-\frac{i\omega a^2}{\kappa_2}\right)^{1/2}, \tag{8}$$
$$S = \frac{i\omega a^2 h\rho_1}{1 + ht},\quad h = \frac{4\nu_1}{a^2} - i\omega,\quad t = \frac{a}{C_1\alpha_2^{1/6}},$$
$$C_f = \frac{C_1}{\alpha_1}.$$

Переменные с индексом 1 относятся к несущей фазе (жидкость), с индексом 2 – к дисперсной (пузырьки газа); a – радиус пузырьков, α – объемное содержание, κ – коэффициент температуропроводности газа, γ – показатель адиабаты, ν – кинематическая вязкость жидкости, p – давление, C_1 – скорость звука в жидкости.

Приведенные выше математические модели, описывающие динамику акустических волн в двухфазных средах, справедливы при следующих основных предположениях. Длина акустической волны намного больше среднего расстояния между включениями и гораздо больше размеров самих включений. Объемное содержание включений мало, $\alpha_2 \ll 1$. Отметим, что в работе [24] выполнено исследование, позволяющее аналитически описать поведение газового пузырька на малом, сопоставимом с его размером расстоянии от границы межфазной поверхности.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим смеси воздуха с каплями воды и воды с пузырьками воздуха и рассчитаем фазовую скорость в этих смесях по формулам (5) и (7) соответственно. На рис. 2 представлены результаты сравнения зависимостей фазовой скорости от частоты возмущений $f = \omega/(2\pi)$ при различных значениях объемного содержания (а) капель и (б) пузырьков. Как для газовзвеси, так и для пузырьковой жидкости в большом диапазоне низких частот фазовая скорость не изменяется и принимает некоторое равновесное значение, которое зависит от объемного содержания включений. При этом с увеличением объемного содержания включений данное равновесное значение уменьшается. На высоких же частотах фазовая скорость для этих двух сред стремится к скорости звука в несущей фазе. Аналитические выражения равновесной скорости для газовзвеси и пузырьковой жидкости получаются при предельном переходе частоты возмущений ω к нулю в формулах (5), (7) и записываются в виде ([19] и [25, 26] соответственно):

$$C_{gl}^e = C_1\left(\frac{\gamma_e}{\alpha_1(1 + m)\gamma_1}\right)^{1/2},\quad \gamma_e = \frac{c_{p_1} + mc_{p_2}}{c_{p_1}/\gamma_1 + mc_{p_2}},$$
$$m = \frac{\alpha_2\rho_2}{\alpha_1\rho_1},\quad C_{pg}^e = \left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{\rho_1\alpha_2\alpha_1}{p_1}\right)^{-1/2}.$$

Рассмотрим падение низкочастотной акустической волны под разными углами на границу раздела между чистым воздухом и смесью воздуха с каплями воды со стороны воздуха, когда скорость звука в газокапельной среде принимает равновесное значение C_{gl}^e. С учетом формулы (4) коэффициент отражения в этом случае примет вид

$$R = \frac{Z_{gl} - Z_1}{Z_{gl} + Z_1} = \frac{\dfrac{\rho_{gl} C_{gl}^e}{\cos\theta_{gl}} - \dfrac{\rho_1 C_1}{\cos\theta_1}}{\dfrac{\rho_{gl} C_{gl}^e}{\cos\theta_{gl}} + \dfrac{\rho_1 C_1}{\cos\theta_1}} = \frac{1 - \dfrac{\rho_1 C_1}{\rho_{gl} C_{gl}^e}\dfrac{\cos\theta_{gl}}{\cos\theta_1}}{1 + \dfrac{\rho_1 C_1}{\rho_{gl} C_{gl}^e}\dfrac{\cos\theta_{gl}}{\cos\theta_1}}, \tag{9}$$

где $\theta_{gl} = \arcsin\left(\dfrac{C_{gl}^e}{C_1}\sin\theta_1\right)$, $\rho_{gl} = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2$.

Параллельно рассмотрим аналогичную задачу падения низкочастотной акустической волны под разными углами на границу раздела между чистой водой и смесью воды с пузырьками воздуха со стороны воды, когда скорость звука в пузырьковой среде принимает равновесное значение C_{pg}^e. В этом случае коэффициент отражения имеет вид

$$R = \frac{Z_{pg} - Z_1}{Z_{pg} + Z_1} = \frac{\dfrac{\rho_{pg} C_{pg}^e}{\cos\theta_{pg}} - \dfrac{\rho_1 C_1}{\cos\theta_1}}{\dfrac{\rho_{pg} C_{pg}^e}{\cos\theta_{pg}} + \dfrac{\rho_1 C_1}{\cos\theta_1}} = \frac{1 - \dfrac{\rho_1 C_1}{\rho_{pg} C_{pg}^e}\dfrac{\cos\theta_{pg}}{\cos\theta_1}}{1 + \dfrac{\rho_1 C_1}{\rho_{pg} C_{pg}^e}\dfrac{\cos\theta_{pg}}{\cos\theta_1}}, \tag{10}$$

где $\theta_{pg} = \arcsin\left(\dfrac{C_{pg}^e}{C_1}\sin\theta_1\right)$, $\rho_{pg} = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2$.

Для того чтобы не было неопределенности, условимся о том, что когда рассматривается пузырьковая жидкость, индекс 1 относится к жидкости, 2 – к пузырькам, а в случае газокапельной среды индекс 1 относится к газу, 2 – к каплям жидкости.

На рис. 3 представлены результаты расчетов коэффициента отражения в зависимости от объемного содержания (а) капель воды и (в) пузырьков, а также (б, г) угла падения акустической волны. Обратим внимание на то, что при значении угла $\theta_1 = 0$ зависимость коэффициента отражения от объемного содержания капель (рис. 3а) является монотонной, причем акустическая волна начинает отражаться лишь при значениях объемного содержания капель $\alpha_2 > 10^{-3}$. Однако, если увеличить угол падения, то зависимость $|R(\alpha_2)|$ становится немонотонной, при этом волна начинает отражаться от границы уже при $\alpha_2 < 10^{-3}$. Еще один важный вывод заключается в том, что при некоторых значениях угла падения и объемного содержания капель коэффициент отражения принимает нулевые значения (рис. 3а, 3б). В этом случае волна проходит полностью (без отражения) через границу раздела. Для того чтобы определить, при каких углах возможна данная ситуация, возьмем производную от выражения коэффициента отражения (9) по углу θ_1:

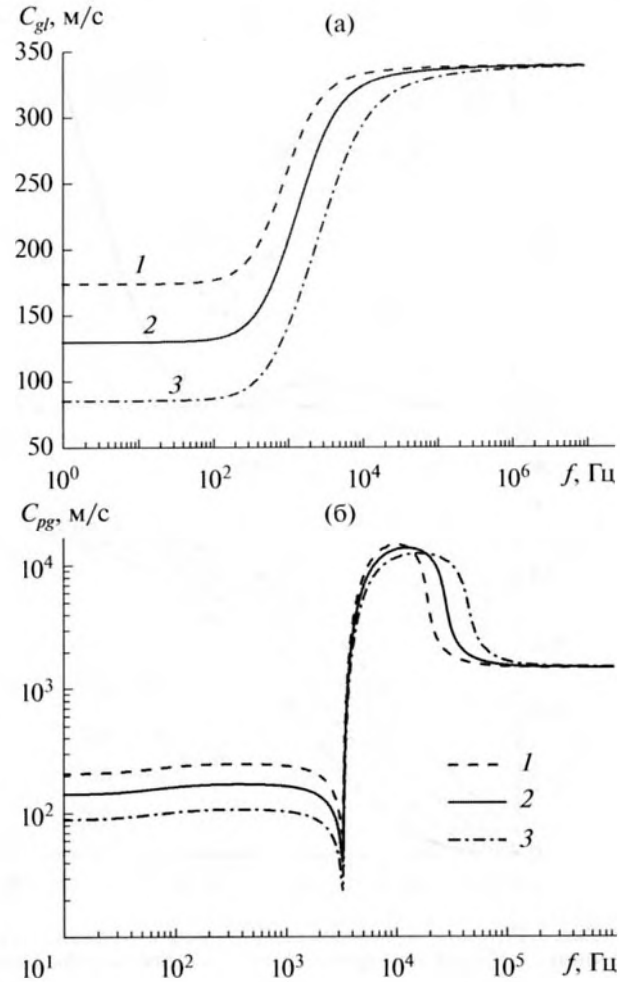

Рис. 2. Зависимости фазовой скорости от частоты возмущений для (а) смеси воздуха с каплями воды и (б) воды с пузырьками воздуха при различных объемных содержаниях включений: *1* – 0.0023, *2* – 0.005, *3* – 0.013; радиус капель 5×10^{-6} м, радиус пузырьков 10^{-3} м.

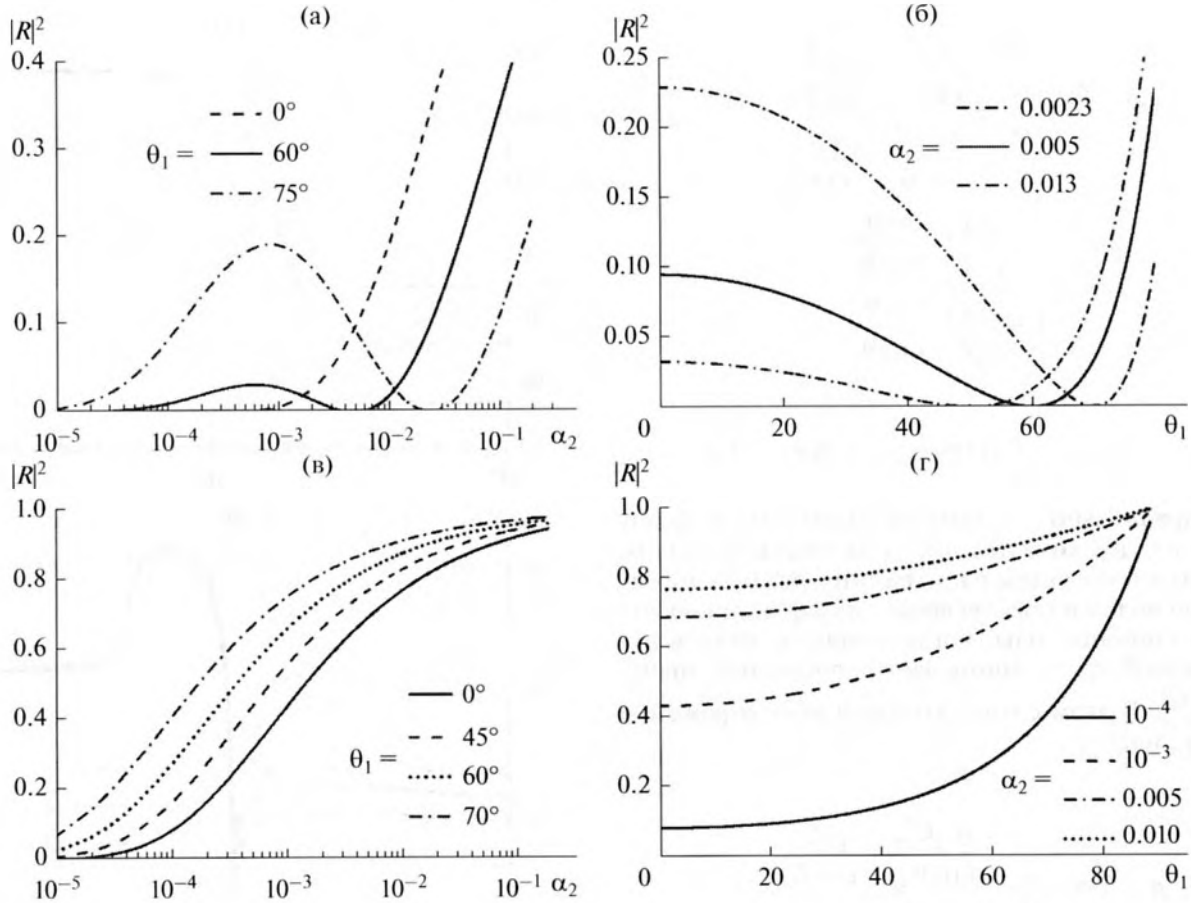

Рис. 3. Результаты расчетов коэффициента отражения: (а, б) – падение акустической волны со стороны воздуха на границу газокапельной среды, (в, г) – со стороны воды на границу пузырьковой жидкости.

$$\left(R^2\right)'_{\theta_1} = \frac{4\sin\theta_1 C_{gl}^e\left[(C_{gl}^e)^2 - C_1^2\right]\rho_1\rho_{gl}\left(\rho_{gl}C_{gl}^e\cos\theta_1 - \rho_1 C_1\cos\theta^*\right)}{C_1\cos\theta^*\left(\rho_1 C_1\cos\theta^* + \rho_{gl}C_{gl}\cos\theta_1\right)^3},$$

где $\cos\theta^* = \sqrt{1-\left(\frac{C_{gl}^e}{C_1}\right)^2\sin^2\theta_1}$, приравняем к нулю и определим угол полной прозрачности границы, который имеет вид [22, 27]

$$\theta_1^* = \arcsin\sqrt{\frac{\left(\rho_{gl}C_{gl}^e\right)^2 - \rho_1^2 C_1^2}{\left(C_{gl}^e\right)^2\left(\rho_{gl}^2 - \rho_1^2\right)}}. \quad (11)$$

Подставим несколько значений объемного содержания в формулу (11) и проверим полученные значения на рис. 3а и 3б. Если $\alpha_2 = 0.013$, $\rho_{gl} = 14.25$ кг/м^3, $C_{gl}^e = 86.05$ м/с, то $\theta_1^* \approx 70°$; $\alpha_2 = 0.005$, $\rho_{gl} = 6.263$ кг/м^3, $C_{gl}^e = 130.45$ м/с, $\theta_1^* \approx 60.1°$; $\alpha_2 = 0.0023$, $\rho_{gl} = 3.56$ кг/м^3, $C_{gl}^e = 174.37$ м/с, $\theta_1^* \approx 50.4°$. Как видно, значения совпадают.

Для границы между водой и смесью воды с пузырьками воздуха коэффициент отражения монотонно возрастает с увеличением объемного содержания воздуха и угла падения акустической волны (рис. 3в, 3г). Для данной пузырьковой смеси не характерно полное прохождение акустической волны через границу раздела в рассматриваемом диапазоне частот. Выпишем аналог формулы (11) для этой среды:

$$\sin\theta_1^* = \sqrt{\frac{\left(\rho_{pg}C_{pg}^e\right)^2 - \rho_1^2 C_1^2}{\left(C_{pg}^e\right)^2\left(\rho_{pg}^2 - \rho_1^2\right)}}. \quad (12)$$

Поскольку плотность пузырьковой жидкости ρ_{pg} близка к плотности чистой жидкости ρ_1, знамена-

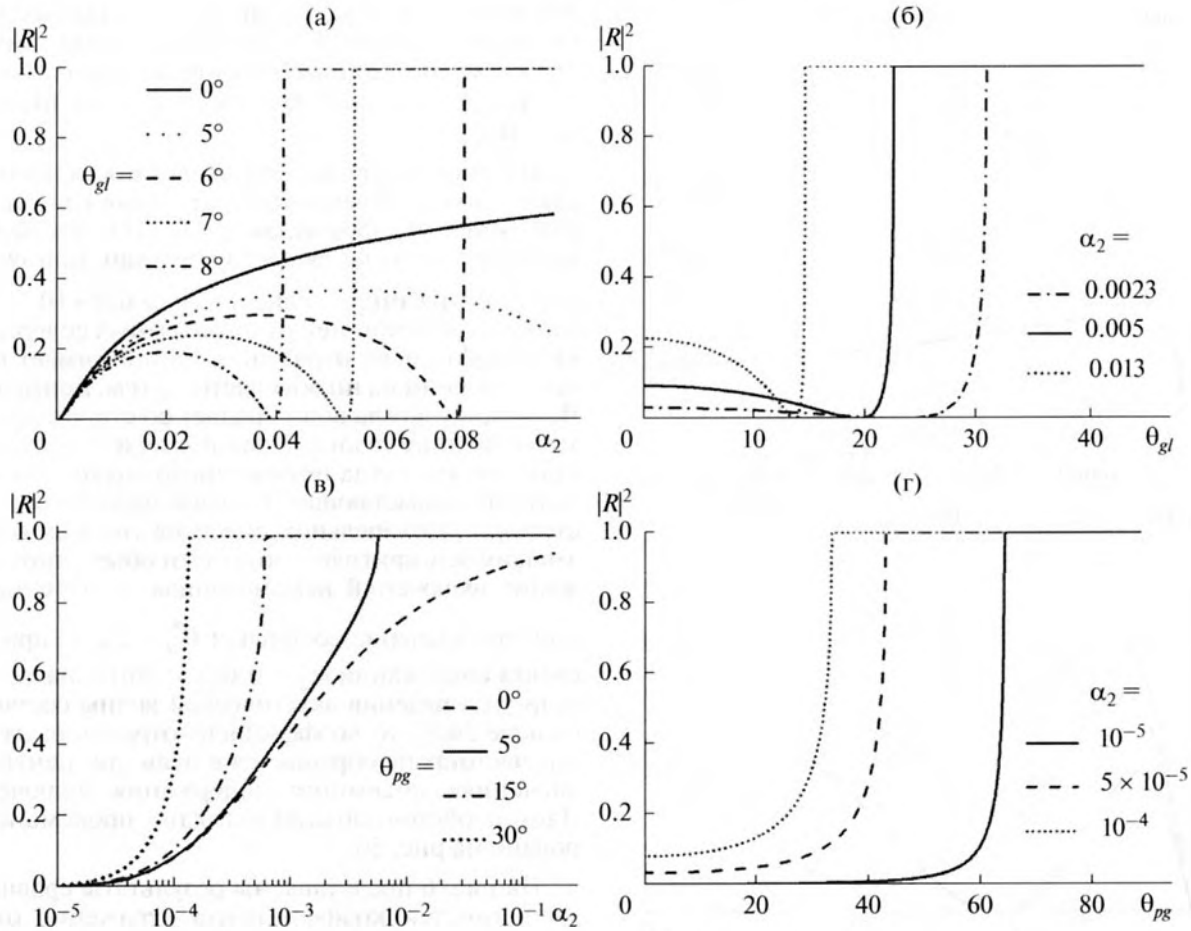

Рис. 4. Результаты расчетов коэффициента отражения; (а, б) – падение акустической волны со стороны газокапельной среды на границу воздуха, (в, г) – со стороны пузырьковой жидкости на границу воды.

тель формулы (12) стремится к нулю и, следовательно, правая часть этой формулы стремится к бесконечности. Функция $\sin\theta_1^*$ – ограниченная функция, поэтому уравнение (12) не имеет решения ни при каких значениях объемного содержания пузырьков воздуха.

Рассмотрим теперь обратную ситуацию, когда акустическая волна падает на границу раздела со стороны газокапельной смеси. Коэффициент отражения в этом случае имеет вид

$$R = \frac{Z_1 - Z_{gl}}{Z_1 + Z_{gl}} = \frac{\dfrac{\rho_1 C_1}{\cos\theta_1} - \dfrac{\rho_{gl} C_{gl}^e}{\cos\theta_{gl}}}{\dfrac{\rho_1 C_1}{\cos\theta_1} + \dfrac{\rho_{gl} C_{gl}^e}{\cos\theta_{gl}}} = \frac{1 - \dfrac{\rho_{gl} C_{gl}^e}{\rho_1 C_1}\dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_{gl}}}{1 + \dfrac{\rho_{gl} C_{gl}^e}{\rho_1 C_1}\dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_{gl}}}, \tag{13}$$

где $\theta_1 = \arcsin\left(\dfrac{C_1}{C_{gl}^e}\sin\theta_{gl}\right)$, $\rho_{gl} = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2$.

Рассмотрим также падение акустической волны со стороны смеси воды с пузырьками воздуха на границу с чистой водой. Коэффициент отражения в этом случае имеет вид (13) при замене индекса *gl* на *pg*.

На рис. 4 приведены результаты расчетов данных коэффициентов отражения. При нормальном падении волны коэффициент отражения монотонно возрастает с увеличением объемного содержания включений (рис. 4а). Так же, как и в предыдущей задаче, для газокапельной среды существуют критические значения объемного содержания и угла падения волны, при которых коэффициент отражения принимает нулевые значения. Отличие состоит в том, что выше этих критических значений коэффициент отражения достигает единицы, то есть происходит полное внутреннее отражение. Аналитическое выражение для угла полной прозрачности в этом случае имеет вид [22, 27]

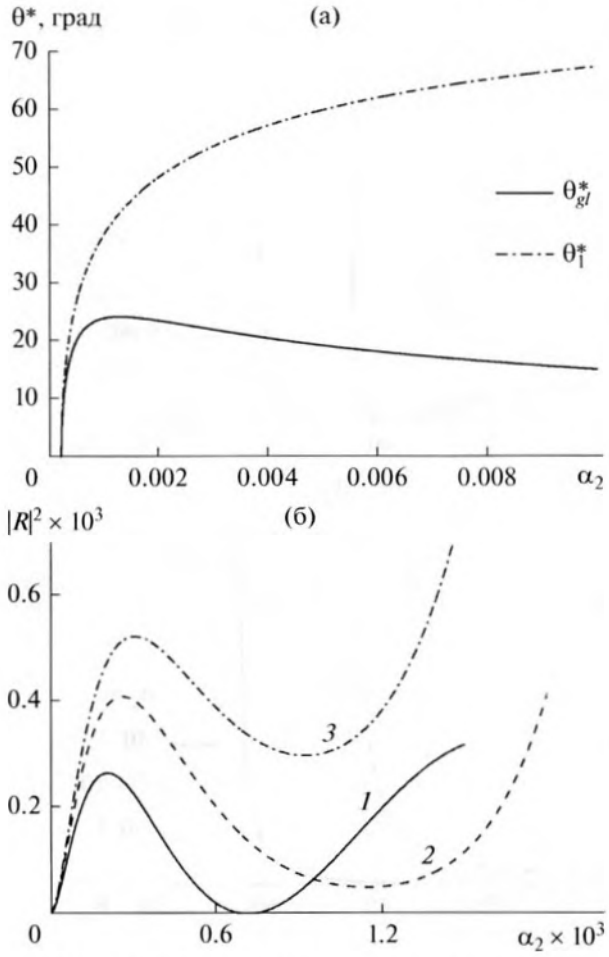

Рис. 5. Зависимости (а) критического угла падения волны и (б) коэффициента отражения от объемного содержания капель: *1* – $\theta_{gl} = 23°$, *2* – 25°, *3* – 26°.

$$\theta_{gl}^{*} = \arcsin\sqrt{\frac{\left(\rho_{gl}C_{gl}^{e}\right)^{2} - \rho_1^2 C_1^2}{C_1^2(\rho_{gl}^2 - \rho_1^2)}}. \qquad (14)$$

Рассчитаем по формуле (14) значения критического угла и сравним со значениями на рис. 4б. Если $\alpha_2 = 0.013$, $\rho_{gl} = 14.25$ кг/м^3, $C_{gl}^e = 86.05$ м/с, то $\theta_{gl}^* \approx 13.76°$; $\alpha_2 = 0.005$, $\rho_{gl} = 6.263$ кг/м^3, $C_{gl}^e = 130.45$ м/с, $\theta_{gl}^* \approx 19.4°$; $\alpha_2 = 0.0023$, $\rho_{gl} = 3.56$ кг/м^3, $C_{gl}^e = 174.37$ м/с, $\theta_{gl}^* \approx 23.2°$. Значения совпадают.

Из рис. 4в, 4г видно, что для границы между смесью воды с пузырьками воздуха и чистой водой коэффициент отражения монотонно возрастает с увеличением объемного содержания пузырьков и угла падения акустической волны. Существуют значения объемного содержания и угла падения, выше которых коэффициент отражения достигает единицы, т.е. происходит полное внутреннее отражение. Коэффициент отражения попрежнему не принимает нулевых значений, поскольку уравнение (14) в этом случае не имеет решений.

На рис. 5а приведены зависимости критических углов от объемного содержания капель, рассчитанные по формулам (11), (14). Во-первых, критические углы существуют лишь при объемных содержаниях капель $\alpha_2 > 0.2\times10^{-3}$. Это означает, что при меньших объемных содержаниях коэффициент отражения не принимает нулевых значений на низких частотах (см. пример [8]). Во-вторых, когда волна падает со стороны воздуха на границу газокапельной смеси, зависимость критического угла от объемного содержания монотонно возрастающая. В случае падения волны со стороны газокапельной смеси на границу воздуха зависимость критического угла от объемного содержания включений немонотонная, причем максимальное значение составляет $\theta_{gl}^* \approx 24.4°$ при объемном содержании $\alpha_2 = 0.0013$. Это означает, что если угол падения акустической волны составляет больше 24.5°, то коэффициент отражения на низких частотах не обращается в нуль при ненулевых значениях объемного содержания включений. Данное обстоятельство наглядно продемонстрировано на рис. 5б.

На рис. 6 представлены результаты сравнения зависимостей коэффициента отражения от частоты возмущений $f = \omega/(2\pi)$. Кривая *1* построена для среды "воздух – газокапельная смесь" с помощью формул (4), (6). Приведено сравнение этой кривой с теоретическими данными (кривая *4*) [18]. Кривые *2*, *3* соответствуют средам "воздух–газокапельная смесь–воздух" и "воздух–газокапельная смесь–вода" и построены с помощью формул (1), (6). Радиус *a* капель воды составлял 5×10^{-6} м, объемное содержание $\alpha_2 = 0.005$, акустическая волна падала со стороны воздуха под углом $\theta_1 = 0$, толщина слоя газокапельной смеси $s = 0.3$ м. Характер кривой *1* коэффициента отражения соответствует характеру кривой скорости звука в газокапельной смеси (рис. 2а). На частотах до 200 и выше 20000 Гц коэффициент отражения, как и скорость звука, не меняет своего равновесного значения и составляет приблизительно 0.1 и 0.44 соответственно. Значение 0.1 на низких частотах можно определить по формуле (9) или из рис. 3б в случае нормального падения волны, а значение 0.44 из следующих соображений. Поскольку фазовая скорость C_{gl} при высоких частотах стремится к скорости звука в чистом газе C_1, то формула (9) упрощается и приобретает вид

$$R = \frac{1 - \rho_1/\rho_{gl}}{1 + \rho_1/\rho_{gl}}. \qquad (15)$$

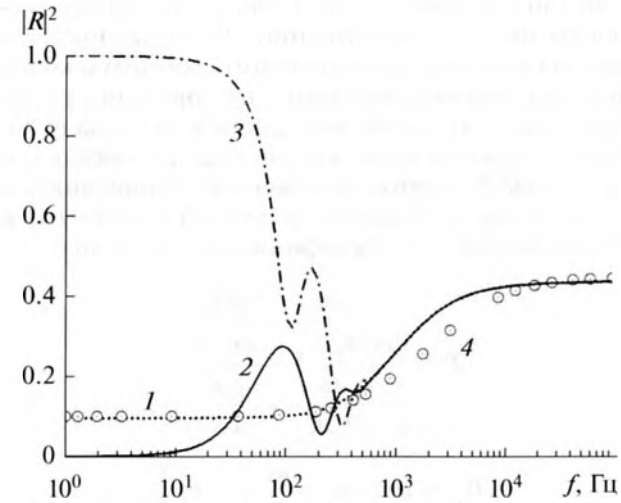

Рис. 6. Результаты расчетов коэффициента отражения для сред: *1* – "воздух–газовзвесь", *2* – "воздух–газовзвесь–воздух", *3* – "воздух–газовзвесь–вода", *4* – теоретические данные [18].

Учитывая $\rho_1 = 1.27$ кг/м^3, $\rho_{gl} = 6.26$ кг/м^3, находим $R^2 \approx 0.44$. В диапазоне от 200 до 20000 Гц наблюдается рост коэффициента отражения. В целом, кривая *1* удовлетворительно согласуется с теоретическими результатами (кривая *4*) [18]. Для плоского слоя газокапельной смеси конечной толщины (кривые *2*, *3*) наблюдается немонотонный характер коэффициента отражения. При низких частотах f, близких к нулю, из формулы (1) следует, что входной импеданс Z_2^{in} практически совпадает с импедансом крайней среды Z_3. В этом случае на низких частотах коэффициент отражения равняется нулю (кривая *2*), так же как и на границе воздух–воздух, и близок к единице (кривая *3*), как на границе воздух–вода. Видно, что у приведенных кривых *2*, *3* при некоторых параметрах смеси и на определенных частотах имеется несколько локальных экстремумов. Для выяснения причины запишем выражение коэффициента отражения (1) с учетом определения входного импеданса Z_2^{in} и рассмотрим величину $|R|^2$:

$$|R|^2 = \frac{Z_2^2(Z_3 - Z_1)^2 + (Z_2^2 - Z_1Z_3)\text{tg}^2\psi}{Z_2^2(Z_3 + Z_1)^2 + (Z_2^2 + Z_1Z_3)\text{tg}^2\psi}.$$

Это выражение после алгебраических преобразований примет вид

$$|R|^2 = \frac{-D\sin^2\psi + A}{-D\sin^2\psi + B} = \frac{F_1(\psi)}{F_2(\psi)},$$

$$D = Z_2^2 - Z_1^2, \quad A = \frac{Z_2^2(Z_1 - Z_3)^2}{Z_3^2 - Z_2^2}, \qquad (16)$$

$$B = \frac{Z_2^2(Z_1 + Z_3)^2}{Z_3^2 - Z_2^2}.$$

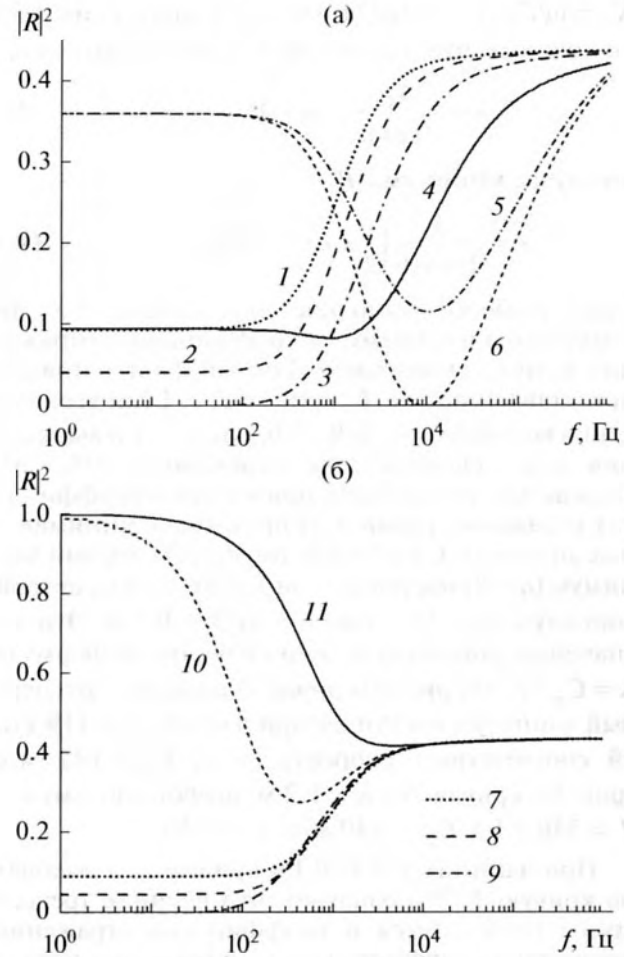

Рис. 7. Зависимости коэффициента отражения от частоты возмущений при различных значениях угла падения волны для границы среды "воздух–газовзвесь", когда волна падает со стороны (а) воздуха и (б) газовзвеси: кривые *1–5* – $\theta_1 = 0°, 39°, 60°, 75°, 83°$; кривая *6* – $|\text{Re}(R)|^2$ при 83°; кривые *7–11* – $\theta_{gl} = 0°, 13°, 19°, 25°, 35°$.

Пусть $Z_1 < Z_2 < Z_3$, тогда $D > 0$, $A > 0$, $B > 0$. Числитель и знаменатель (16) осциллируют при изменении ψ. Для нахождения экстремальных значений возьмем производную от выражения (16) и приравняем ее к нулю. Отметим, что $F_1'(\psi) = F_2'(\psi) = -2D\sin\psi\cos\psi$, $F_1''(\psi) = -2D(\cos^2\psi - \sin^2\psi)$. Если $\sin\psi = 0$, $\cos\psi = 1$, $F_1''(\psi) < 0$, то значения $\psi = \pi n$, $n = 1, 2, \ldots$ соответствуют максимумам коэффициента отражения; при $\sin\psi = 1$, $\cos\psi = 0$, $F_1''(\psi) > 0$ значения $\psi = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, \ldots$ отвечают минимумам коэффициента отражения. Учитывая $\psi = K_2 s\cos\theta_2$,

$K_2 = \omega/C_2$, $C_2 = \omega\lambda/2\pi$, где λ – длина волны, легко показать, что в случае $|R| = \max$ толщина слоя

$$s = \frac{\lambda n}{2\cos\theta_2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

а в случае минимума $|R|$

$$s = \frac{\lambda}{2\cos\theta_2}\left(\frac{1}{2} + n\right), \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{18}$$

Если, наоборот, выполняется условие $Z_2 > Z_3$, то максимумы и минимумы коэффициента отражения меняются местами. Данный факт наглядно представлен на рис. 6, кривые *2*, *3*. Если угол падения волны $\theta_1 = 0$, то $\theta_2 = 0$, $\cos\theta_2 = 1$ и выражения для толщины слоя упрощаются [15, 28]. Определим длины волн, при которых коэффициент отражения (кривая *3*) принимает минимальные значения. С учетом формулы (18) первый минимум ($n = 0$) наступает при $\lambda = 4s = 1.2$ м, второй минимум ($n = 1$) – при $\lambda = 4s/3 = 0.4$ м. Эти же значения длин волн можно получить по формуле $\lambda = C_{gl}/f$. Из рис. 6 (кривая *3*) находим, что первый минимум наступает при частоте $f = 119$ Гц, ей соответствует скорость звука $C_{gl} = 142$ м/с (рис. 2а, кривая *2*) и $\lambda = 1.2$ м, второй минимум – $f = 346.5$ Гц, $C_{gl} = 140$ м/с, $\lambda = 0.4$ м.

При частотах $f > 600$ Гц кривые *2*, *3* выходят на кривую *1*. Это означает, что влияние третьей среды уменьшается и коэффициент отражения носит такой характер, как если бы волна падала на границу раздела между воздухом и газокапельной смесью.

На примере границы среды "воздух–газовзвесь" на рис. 7а, 7б показано влияние угла падения волны на зависимости коэффициента отражения от частоты возмущений, вычисленных по формулам (4), (6). Параметры газовзвеси те же, что и на рис. 6. На частотах до 200 Гц, где скорость звука C_{gl} принимает равновесное значение C_{gl}^e (рис. 2а), характер коэффициента отражения на рис. 7а, 7б соответствует характеру коэффициента на рис. 3б и 4б соответственно. Видно, что при некоторых углах падения волны наблюдается немонотонная зависимость коэффициента отражения от частоты возмущений. Расчеты показали (кривая *6* на рис. 7а), что оценить минимум коэффициента отражения можно, не прибегая к решению задачи на экстремум (решить эту задачу довольно сложно), а достаточно выделить реальную часть коэффициента отражения и приравнять к нулю. В случае падения волны со стороны газа данное выражение коэффициента имеет вид

$$R = \frac{\dfrac{\rho_{gl}\omega}{\cos\theta_{gl}K_{gl}} - \dfrac{\rho_1 C_1}{\cos\theta_1}}{\dfrac{\rho_{gl}\omega}{\cos\theta_{gl}K_{gl}} + \dfrac{\rho_1 C_1}{\cos\theta_1}},$$

$$\theta_{gl} = \arcsin\left(\frac{\omega}{C_1 K_{gl}}\sin\theta_1\right).$$

В итоге, выделив $\mathrm{Re}(R)$ и приравняв к нулю, приходим к следующей формуле:

$$\sin^2\theta_1 = \frac{(\sigma^2 - 1)n^2 + m^4}{m^4 - 1} - \frac{\sqrt{(m^4(1+\sigma^2)^2 - 4\sigma^2)n^4 + 2m^4(\sigma^2 - 1)n^2 + m^4}}{m^4 - 1}, \tag{19}$$

где $\sigma = \dfrac{\mathrm{Im}(K_{gl})}{\mathrm{Re}(K_{gl})}$ – декремент затухания, $n = \dfrac{C_1}{C_{gl}}$, $m = \dfrac{\rho_{gl}}{\rho_1}$. Однако следует заметить, что данное условие $\mathrm{Re}(R) = 0$ не является необходимым для появления минимума у коэффициента отражения, а только достаточным. Если в формуле (19) устремить частоту возмущений ω к нулю, то в этом случае $\sigma \to 0$, $n \to \dfrac{C_1}{C_{gl}^e}$, и полученная формула приобретает вид (11), а если $\omega \to \infty$, то $\sigma \to 0$, $n \to 1$ и $\theta_1 \to \pi/2$. Таким образом, угол $\theta_1 \in \left(\theta_1^*, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Когда волна падает со стороны газовзвеси на границу среды "воздух–газовзвесь", аналогично имеет место следующая формула:

$$\sin^2\theta_{gl} = \frac{m^4 + n^2(\sigma^2 - 1)/(\sigma^2 + 1)^2}{m^4 - 1} + \frac{\sqrt{(m^4 + (\sigma^2 - 1)/(\sigma^2 + 1)^2 n^2)^2 - (m^4 - 1)(m^4 - n^4/(\sigma^2 + 1)^2)}}{m^4 - 1}, \tag{20}$$

$$\theta_{gl} \in (\theta_{gl}^*, \pi/2),$$

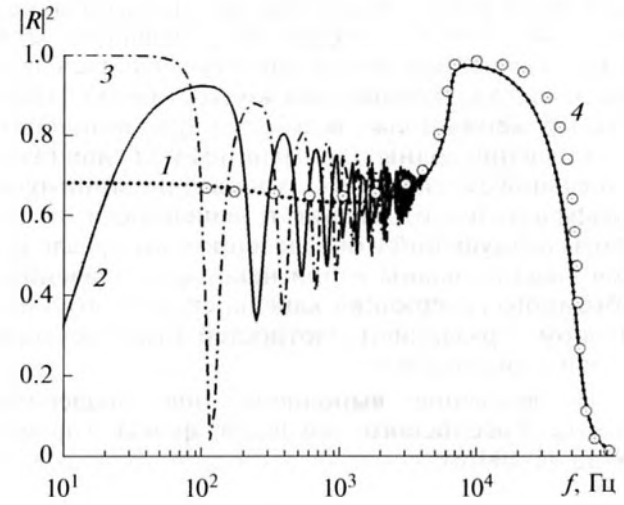

Рис. 8. Результаты расчетов коэффициента отражения для сред: *1* – "вода–пузырьковая жидкость", *2* – "вода–пузырьковая жидкость–вода", *3* – "вода–пузырьковая жидкость–воздух", *4* – теоретические данные [18].

$$\text{где } \sigma = \frac{\mathrm{Im}(K_{gl})}{\mathrm{Re}(K_{gl})},\ n = \frac{C_{gl}}{C_1},\ m = \frac{\rho_1}{\rho_{gl}}.$$

Таким образом, немонотонная зависимость коэффициента отражения от частоты возмущений возможна, когда углы падения волны находятся в интервалах $\theta_1 \in (\overset{*}{\theta}_1, \pi/2)$, $\theta_{gl} \in (\overset{*}{\theta}_{gl}, \pi/2)$, и связана как с дисперсией, так и с диссипацией акустической волны, а также с различием плотностей газокапельной смеси и чистого газа.

На рис. 8 представлены результаты сравнения зависимостей коэффициента отражения от частоты возмущений. Кривая *1* построена для среды вода–смесь воды с пузырьками воздуха с помощью формул (4), (8). Приведено сравнение этой кривой *1* с теоретическими данными [18]. Кривые *2*, *3* соответствуют средам "вода–пузырьковая жидкость–вода" и "вода–пузырьковая жидкость–воздух" соответственно и построены с помощью формул (1), (8). Радиус a пузырьков воздуха составлял 5×10^{-4} м, объемное содержание $\alpha_2 = 0.005$, акустическая волна падала со стороны воды под углом $\theta_1 = 0$, толщина слоя пузырьковой жидкости $s = 0.3$ м. В случае, когда акустическая волна падает на границу раздела между жидкостью и пузырьковой жидкостью на низких частотах, коэффициент отражения также принимает равновесное значение, приближенно равное 0.68. Данное значение 0.68 на низких частотах можно определить по формуле (10) или из рис. 3г в случае нормального падения волны. Поскольку фазовая скорость C_{pg} при высоких частотах стремится к скорости звука в чистой жидкости C_1, а плотность пузырьковой жидкости ρ_{pg} близка к плотности чистой жидкости ρ_1, то с учетом формулы (10) коэффициент отражения на высоких частотах стремится к нулю. В целом кривая *1* удовлетворительно согласуется с теоретическими результатами другого автора [18]. Наличие пузырькового слоя конечной толщины приводит к немонотонному характеру коэффициента отражения. Так же, как и в предыдущем примере, имеются минимумы и максимумы коэффициента, вызванные связью между длиной волны и толщиной слоя (17), (18). Пузырьковый слой конечной толщины существенно влияет лишь на частотах,

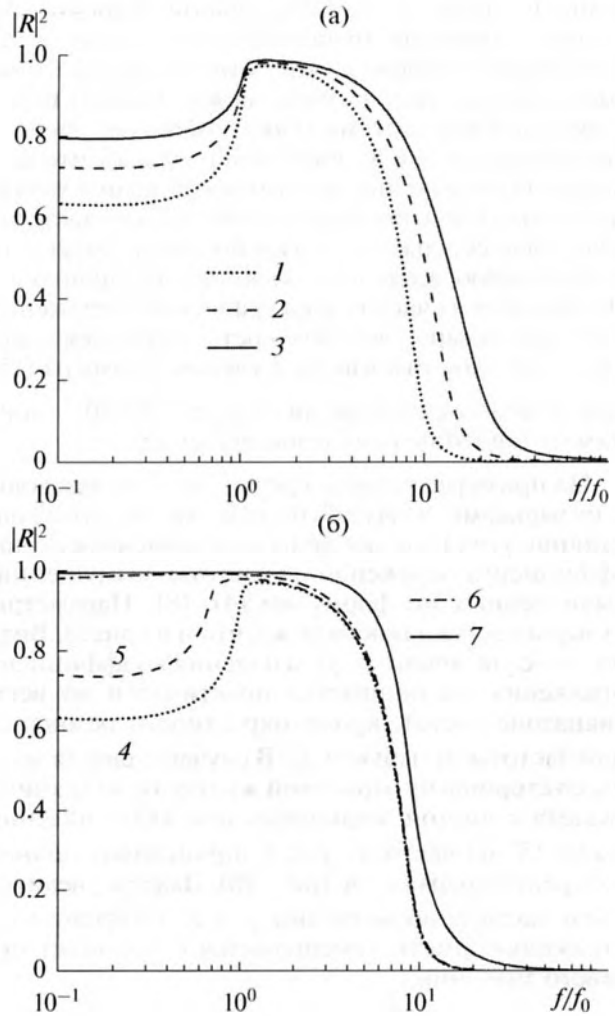

Рис. 9. Зависимости коэффициента отражения от безразмерной частоты возмущений при различных значениях угла падения волны для границы среды "жидкость–пузырьковая жидкость", когда волна падает со стороны (а) жидкости и (б) пузырьковой жидкости; f_0 = 6524 Гц; кривые *1–3* – θ_1 = 0°, 45°, 60°; кривые *4–7* – θ_{pg} = 0°, 5°, 15°, 60°.

меньших частоты 6580 Гц, равной резонансной частоте пузырьков. Выше этой частоты кривые *2*, *3* выходят на кривую *1*, что соответствует падению волны на границу раздела между чистой и пузырьковой жидкостями. Таким образом, проанализировав рис. 6 и 8, приходим к выводу, что при нормальном падении акустической волны характер коэффициента отражения на низких частотах для слоев, содержащих газокапельную смесь или пузырьковую жидкость, качественно одинаков. Но на высоких частотах коэффициент отражения для слоя пузырьковой жидкости стремится к нулю, а для слоя газовзвеси с учетом формулы (15) при объемных содержаниях $\alpha_2 > 0.2\times10^{-3}$ принимает конечное ненулевое значение.

На примере границы среды "вода–смесь воды с пузырьками воздуха" на рис. 9а, 9б показано влияние угла падения волны на зависимости коэффициента отражения от частоты возмущений, вычисленных по формулам (4), (8). Параметры пузырьковой жидкости те же, что и на рис. 8. Видно, что с увеличением угла падения коэффициент отражения увеличивается практически во всем диапазоне частот, кроме окрестности резонансной частоты пузырьков f_0. В случае падения волны со стороны пузырьковой жидкости на границу раздела с чистой жидкостью при углах падения выше 15° на частотах $f < f_0$ происходит полное внутреннее отражение (рис. 9б). Далее с увеличением частоты возмущений $f > f_0$ коэффициент отражения заметно уменьшается и достигает нулевого значения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача об отражении и прохождении акустической волны через границу или слой конечной толщины, содержащий газокапельную смесь или пузырьковую жидкость. Установлено, что при углах падения волны со стороны газокапельной смеси на границу чистого газа выше 24.5° коэффициент отражения никогда не будет равняться нулю, однако если волна падает со стороны чистого газа на границу газовзвеси, нулевое значение коэффициента отражения возможно для ненулевых углов падения и объемного содержания включений. При нормальном падении акустической волны характер коэффициента отражения на низких частотах для слоев, содержащих газокапельную смесь или пузырьковую жидкость, качественно одинаков, однако на высоких частотах коэффициент отражения для слоя пузырьковой жидкости стремится к нулю, а для слоя газовзвеси при объемных содержаниях включений $\alpha_2 > 0.2\times10^{-3}$ принимает конечное ненулевое значение. При наклонном падении акустической волны различие проявляется уже на низких частотах, а именно коэффициент отражения для границы или слоя газокапельной смеси может как увеличиваться, так и уменьшаться, в то время как для пузырьковой жидкости коэффициент отражения только возрастает при увеличении угла падения волны. Для границы или слоя газокапельной смеси возможно появление минимума коэффициента отражения в зависимости от частоты возмущений в определенном интервале углов падения волны и при некоторых значениях объемного содержания капель, связанного в основном с различием плотностей газокапельной смеси и чистого газа.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-10016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гусев В.А., Руденко О.В.* Нелинейный звук в слое газонасыщенных осадков // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 169–181.
2. *Григорьев В.А., Луньков А.А., Петников В.Г.* Затухание звука в мелководных акваториях с газонасыщенным дном // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 90–100.
3. *Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В.* Особенности преломления и отражения звука на границе пузырьковой жидкости // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 40–48.
4. *Cole J.E., Dobbins R.A.* Measurements of attenuation of sound by a warm air fog // J. Atmos. Sci. 1971. V. 28. № 2. P. 202–209.
5. *Davidson G.A.* Sound propagation in fogs // J. Atmos. Sci. 1975. V. 32. № 11. P. 2201–2205.
6. *Губайдуллин Д.А., Ивандаев А.И.* Влияние фазовых превращений на распространение звука в туманах. Сопоставление теории с экспериментом // ПМТФ. 1990. № 6. С. 27–34.
7. *Ishii R., Matsuhisa H.* Steady reflection, absorption and transmission of small disturbances by a screen of dusty gas // J. Fluid Mech. 1983. V. 130. P. 259–277.
8. *Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В.* Особенности преломления звука в атмосфере при тумане // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 6. С. 683–691.
9. *Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В.* Особенности отражения и преломления акустических волн на границе раздела между газом и дисперсной системой // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 5. С. 119–129.
10. *Leroy V., Strybulevych A., Lanoy M., Lemoult F., Tourin A., Page J.H.* Superabsorption of acoustic waves with bubble metascreens // Phys. Rev. B. 2015. V. 91. P. 020301.
11. *Зельманский О.Б., Петров С.Н., Казека А.А.* Воздушно-пузырьковая панель для защиты информации от утечки по техническим каналам // Доклады БГУИР. 2013. Т. 78. № 8. С. 30–34.
12. *Lee K., Choi B.K., Yoon S.W.* Acoustic pressure reflection coefficients of a subsurface bubble layer in water // Journal of the Korean Physical Society. 2002. V. 40. № 2. P. 256–263.

13. *Tien T.M.* Sound propagation through a bubble screen at finite gas–volume fraction. Master Thesis. Tainan, Taiwan: National Cheng Kung University, 2001. 71 p.

14. *Leroy V., Strybulevych A., Page J.H., Scanlon M.G.* Sound velocity and attenuation in bubbly gels measured by transmission experiments // J. Acoust. Soc. Am. 2008. V. 123. № 4. P. 1931–1940.

15. *Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В.* Падение акустической волны на многослойную среду, содержащую слой пузырьковой жидкости // Известия РАН. МЖГ. 2017. № 1. С. 109–116.

16. *Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А.* Динамика импульсных волн в пузырьковых жидкостях. Сравнение теории с экспериментом // Доклады РАН. 2014. Т. 456. № 6. С. 662–664.

17. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.

18. *Temkin S.* Suspension acoustics: an introduction to the physics of suspensions. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 398 p.

19. *Губайдуллин Д.А.* Динамика двухфазных парогазокапельных сред. Казань: изд-во Каз. мат. общ-ва, 1998. 153 с.

20. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.

21. *Вараксин А.Ю.* Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения // ТВТ. 2013. Т. 51. № 3. С. 421–455.

22. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.

23. *Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В.* Звуковые волны в двухфракционных полидисперсных пузырьковых средах // ПММ. 2013. Т. 77. № 5. С. 743–753.

24. *Максимов А.О., Половинка Ю.А.* Пульсации газового включения вблизи межфазной поверхности // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 1. С. 30–37.

25. *Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В.* Звуковые волны в жидкости с полидисперсными парогазовыми пузырьками // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 2. С. 178–186.

26. *Prosperetti A.* Vapor bubbles // Ann. Rev. Fluid Mech. 2017. V. 49. P. 221–248.

27. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.

28. *Гурбатов С.Н., Руденко О.В.* Акустика в задачах. М.: Наука. Физматлит, 1996. 336 с.