АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2018, том 64, № 3, с. 275–282

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.2

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ИМПУЛЬСОВ НА СФЕРЕ В ПЛОСКОСЛОИСТОМ ВОЛНОВОДЕ С ГРАДИЕНТНЫМ СЛОЕМ

© 2018 г. Н. С. Григорьева[a], *, С. Г. Кадыров[b], М. С. Куприянов[a]

[a]Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В.И. Ульянова
197376 Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова 5

[b]Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
190008 Санкт-Петербург, ул. Лоцманская 3

*e-mail: nsgrig@natalie.spb.su

Поступила в редакцию 24.05.2017 г.

Учет вертикального распределения скорости звука в задачах распространения звука в волноводах и в задачах рассеяния имеет исключительно важное значение. В статье моделируется импульсный эхо-сигнал, отраженный от сферического рассеивателя, находящегося в волноводе, скорость звука в котором возрастает с глубиной. Рассматривается простейшая модель среды, когда рассеиватель, а также источник/приемник находятся в слое с постоянной скоростью звука. Ниже этого слоя скорость звука возрастает с глубиной, причем квадрат показателя преломления меняется по линейному закону. Для вычисления коэффициентов рассеяния сферы используется метод нормальных волн. Число нормальных волн, формирующих эхо-сигнал, определяется заданной направленностью источника. Моделирование проведено в диапазоне частот 70–90 кГц при расстояниях между рассеивателем и источником/приемником 500–1000 м. Излученный сигнал представляет собой импульс с косинусоидальной огибающей и центральной частотой 80 кГц.

Ключевые слова: рассеяние акустических волн, эхо-сигнал, сферический рассеиватель, волновод, возрастание скорости звука с глубиной, метод нормальных волн, импульс с косинусоидальной огибающей, поверхностные волны типа Франца

DOI: 10.7868/S0320791918030061

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] рассматривалась задача моделирования рассеяния звука сферической упругой оболочкой, расположенной в однородном волноводе с песчаным дном. В [3, 4] однородный океан предполагался покрытым льдом. Однако в реальных условиях имеет место вертикальное распределение скорости звука. Этот случай рассматривался, например, в статьях [5–8]. В данной работе мы рассматриваем простейшую модель среды, когда сферический рассеиватель, а также источник/приемник находятся в слое с постоянной скоростью звука c_0. Начало координат совпадает с центром сферы, радиус которой равен a. Ось Oz направлена вертикально вверх, как это показано на рис. 1. Границы однородного слоя: $z = d$ и $z = -H$. При $z < -H$ скорость звука $c = c(z)$ монотонно возрастает, причем квадрат показателя преломления $n^2(z)$ меняется по линейному закону:

$$n^2(z) = 1 + \gamma(z + H), \quad z < -H, \quad \gamma > 0. \qquad (1)$$

Будем предполагать, что $d + H = 40$ м. Глубина моря 200 м. Дно моря абсолютно жесткое. Параметр γ в формуле (1) примем равным 2.4633×10^{-5} м$^{-1}$, что соответствует типичному градиенту скорости звука в Баренцевом море 0.018 с$^{-1}$ [9, 10], $c_0 = 1461.45$ м/с. Частота сигнала точечного источника, расположенного в точке M, меняется в диапазоне 70–90 кГц. Приемник также находится в точке M. Излучатель предполагается направленным. Угловой раскрыв конуса излучения равен 4.5° на частоте 80 кГц (это ширина характеристики направленности на уровне –3 дБ). Приемник имеет такую же направленность, как источник.

Декартовыми и сферическими координатами точки M являются $(0, y, z)$, $(r, \theta, 0)$ и, соответственно, $y \geq 0$, $z = 0.5$ м. Будем предполагать, что $0.3 \leq a \leq 0.5$ м, $500 \leq r \leq 1000$ м, $d = 39$ м, $a < z < d$. Тогда при рассматриваемом угловом раскрыве конуса излучения сфера не будет засвечиваться лучами, отраженными от верхней границы раздела $z = d$. Это позволяет при моделировании рассматривать границу воздух/вода, а не лед/вода, хотя наличие слоя $-H \leq z \leq d$ с постоянной скоростью звука соответствует водной среде, покрытой льдом.

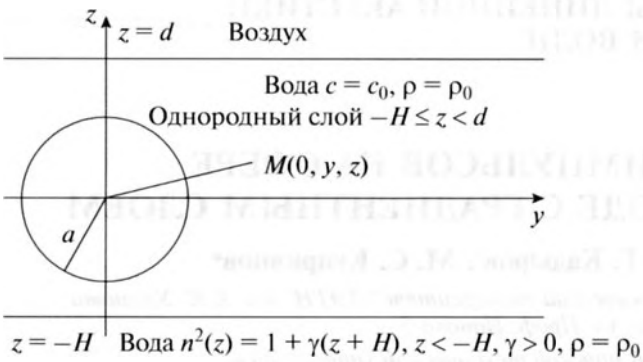

Рис. 1. Сферический рассеиватель, помещенный в волновод, скорость звука в котором при $z < -H$ монотонно возрастает с глубиной.

При $z < -H$ лучи распространяются по дуге, и при $500 \le r \le 1000$ м эти лучи не достигают дна, что позволяет рассматривать модель с бесконечным полупространством, скорость звука в котором меняется по закону (1). Плотность жидкости постоянна.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАССЕЯНИЯ СФЕРЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН

Для вычисления эхо-сигнала от сферического рассеивателя используем метод, предложенный в [11]. Согласно этому методу эхо-сигнал от рассеивателя, находящегося в однородном слое $-H \le z \le d$, может быть представлен в виде

$$\Phi(\omega) = -\frac{i}{k_0}\sum_{l=0}^{\infty} T_l \sum_{m=0}^{l} A_{ml}(r) C_{ml}(r). \qquad (2)$$

При этом потенциал падающей волны в начале координат в отсутствие рассеивателя дается формулой $\Phi_{Inc} = \exp(ik_0 r)/(4\pi r)$. В (2) $k_0 = \omega/c_0$ – волновое число в однородном водном слое, T_l – элементы диагональной T-матрицы сферы, которые находятся из граничных условий на поверхности сферы, помещенной в свободное водное пространство. Для акустически жесткой сферы

$$T_l = -\frac{j_l'(k_0 a)}{h_l^{(1)\prime}(k_0 a)}. \qquad (3)$$

В формуле (3) $h_l(x) = \sqrt{\pi/(2x)}H_{l+1/2}^{(1)}(x)$ – сферическая функция Ханкеля 1-го рода, $j_l(x) = \sqrt{\pi/(2x)}J_{l+1/2}^{(1)}(x)$ – сферическая функция Бесселя. Штрихи у сферических функций обозначают производную по всему аргументу. Коэффициенты рассеяния сферы $A_{ml}(r)$ имеют вид

$$A_{ml}(r) = i^{l-m+1}\sqrt{\frac{\varepsilon_m}{2\pi}}\int_0^{\infty}\frac{qdq}{h}J_m(qy)\times$$
$$\times\frac{\Pi_l^m\left(\frac{h}{k_0}\right)\left[e^{ih(z-d)} + Ue^{-ih(z+d)}\right]}{1 - UV\exp[2ih(d+H)]}\times \qquad (4)$$
$$\times\left[(-1)^{l+m}e^{ihd} + Ve^{ih(2H+d)}\right].$$

В выражении (4) $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_m = 2$ при $m \ge 1$, J_m – функция Бесселя m-го порядка, q и $h(q) = \sqrt{k_0^2 - q^2}$ – горизонтальная и вертикальная компоненты волнового вектора в однородном слое, $\Pi_l^m(x)$ – нормированная присоединенная функция Лежандра, которая сводится к присоединенной функции Лежандра $P_l^m(x)$ порядка l и ранга m соотношением [12]

$$\Pi_l^m(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(x), \qquad (5)$$

где $U = -1$ – коэффициент отражения от верхней границы раздела вода/воздух, V – коэффициент отражения от нижней границы раздела: однородный водный слой–неоднородное полупространство. Как показано в [13],

$$V = -\frac{Ai'(t_0) - i\sqrt{-t_0}Ai(t_0)}{Ai'(t_0) + i\sqrt{-t_0}Ai(t_0)}, \qquad (6)$$

где $Ai(x)$ – функция Эйри (см, например, [14, 15]),

$$-t_0 = \delta^2 k_0^2\cos^2\theta_0, \quad \delta = \left(\gamma k_0^2\right)^{-1/3}, \qquad (7)$$

(см. (1)), θ_0 – угол падения плоской волны из однородного слоя на границу полупространства $z < -H$.

В приближении однократного рассеяния, которое используется ниже, $C_{ml}(r) = A_{ml}(r)$. Количество слагаемых, которые надо просуммировать в (2), определяется тем, что коэффициенты T_l начинают экспоненциально убывать при $l > k_0 a \gg 1$. В [16] для упругих оболочек была получена формула

$$\max l = l_{\max} = \left[k_0 a + 4.05(k_0 a)^{1/3}\right] + 3, \qquad (8)$$

где $[x]$ – целая часть x. Проведенные вычисления показали, что в случае акустически жесткой сферы правило (8) также применимо. Таким образом, на частоте 80 кГц при $c_0 = 1461.45$ м/с для моделирования акустического потенциала сферического рассеивателя радиуса $a = 0.3$ м необходимо вычислить более 7500 коэффициентов рассеяния сферы, которые представляют собой интегралы от быстро осциллирующих, медленно

убывающих функций по бесконечному промежутку интегрирования; $l_{\max} = 139$.

Если эхо-сигнал от отражателя вычисляется с учетом многократного рассеяния, то коэффициенты $C_{ml}(r)$ в уравнении (2) находятся из линейной системы алгебраических уравнений [11]:

$$C_{ml}(r) = A_{ml}(r) + \sum_{n=m}^{n_{\max}} R_{\ln}^{m} T_n C_{mn}(r),$$

где $n_{\max} = l_{\max}$, $l_{\max} + 1$ – число слагаемых в (2), которые надо просуммировать, $0 \le m \le \min(l, n)$, $R_{\ln}^{m}$ – коэффициенты преобразования первой сферической гармоники в гармонику с номером n (см. [11]). В действительности, чтобы найти коэффициенты $C_{ml}(r)$, надо на каждой фиксированной частоте решить систему $l_{\max} + 1$ уравнений с $l_{\max} + 1$ неизвестными для $m = 0$, систему $l_{\max}$ уравнений с $l_{\max}$ неизвестными для $m = 1$ и т.д., и наконец, уравнение с одним неизвестным $C_{l_{\max} l_{\max}}$ при $m = l_{\max}$. Причем коэффициенты $R_{\ln}^{m}$ являются интегралами с быстро осциллирующими подынтегральными функциями:

$$R_{\ln}^{m} = \frac{2i^{l+n+1}(-1)^{m+1}}{k_0} \int_0^{+\infty} \frac{qdq}{h} \frac{\Pi_l^m\left(\frac{h}{k_0}\right)\Pi_n^m\left(\frac{h}{k_0}\right)}{1 - UVe^{2ih(H+d))}} \times$$
$$\times \left[\left(UVe^{2ih(H+d))}\left((-1)^{m+l} + (-1)^{m+n}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + Ve^{2ihd} + U(-1)^{n+l} e^{2ihH}\right].$$

Сравнение эхо-сигналов от упругой сферической оболочки, вычисленных при $0 < k_0 a \le 5.5$ и небольших расстояниях между источником и сферой с учетом многократного рассеяния и в приближении однократного рассеяния, было проведено в [17]. В этой работе водная среда предполагалась полупространством, а оболочка, наполненная воздухом, располагалась у песчаного дна.

Для упрощения вычисления интеграла (4) преобразуем его в интеграл по контуру в комплексной плоскости, который затем представим в виде суммы слагаемых, отвечающих нормальным модам однородного водного слоя $-H \le z \le d$. Сделаем в интеграле (4) замену $q = k_0\xi$, т.е. $\xi = \sin\theta_0$, и деформируем контур интегрирования в контур L, который идет из начала координат несколько ниже вещественной оси на бесконечность. Стандартные преобразования, аналогичные тем, которые были использованы в [1], дают

$$A_{ml}(r) = -i^{l-m} k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{2\pi}} \int_L H_m^{(1)}(k_0 y\xi)\xi G_{ml}\left(z, \xi^2\right) d\xi, \quad (9)$$

где $L = L_1 + L_2$, и L_2 – это контур $L_1 \exp(i\pi)$ с противоположной ориентацией, $H_m^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода,

$$G_{ml}\left(z, \xi^2\right) = \frac{2i\Pi_l^m(\mu_0)}{\mu_0 \Delta\left(\xi^2\right)} \sin k_0\mu_0(z - d) \times$$
$$\times \left[(-1)^{l+m} e^{ik_0\mu_0 d} + Ve^{-k_0\mu_0 d} e^{2i\chi}\right]. \quad (10)$$

Здесь

$$\Delta\left(\xi^2\right) = 1 + V\exp[(2i\chi), \quad \mu_0 = \sqrt{1 - \xi^2},$$
$$\chi = k_0\mu_0(d + H). \quad (11)$$

Замкнем теперь контур L полуокружностью L_R радиуса R в верхней полуплоскости. В пределе при $R \to \infty$ интеграл по L_R стремится к нулю. Особенности подынтегральной функции порождаются знаменателем $\Delta\left(\xi^2\right)$ функции (10), которая имеет полюса в точках $\pm\xi_j$, $j = 1, 2, \ldots$, где

$$\Delta\left(\xi_j^2\right) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, ξ_j – это собственные значения однородного волновода $-H < z < d$ со свободной верхней границей $z = d$. Снизу этот волновод граничит с водным полупространством, квадрат коэффициента преломления которого меняется с глубиной по закону (1).

Выражение $\Delta\left(\xi^2\right)$ может быть переписано в виде

$$\Delta\left(\xi^2\right) = 1 - e^{2i\chi} \frac{Ai'(t_0) - i\sqrt{-t_0}Ai(t_0)}{Ai'(t_0) + i\sqrt{-t_0}Ai(t_0)}.$$

Таким образом, полюса $\pm\xi_j$ находятся из дисперсионного уравнения

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\sqrt{-t_0}Ai(t_0)}{Ai'(t_0)}. \quad (13)$$

Интеграл (9) сводится к сумме вычетов в полюсах ξ_j, расположенных в первом квадранте плоскости ξ:

$$A_{ml}(r) = -i^{l-m+1} k_0 \sqrt{2\pi\varepsilon_m} \times$$
$$\times \sum_j H_m^{(1)}(k_0 y\xi_j)\xi_j \operatorname{Re} sG_{ml}\left(z, \xi_j^2\right).$$

При вычислении $\operatorname{Re} sG_{ml}\left(z, \xi_j^2\right)$ примем во внимание, что

$$\frac{d}{d\xi}\Delta\left(z, \xi^2\right)\Big|_{\xi=\xi_j} = \left(-2i\frac{d\chi}{d\xi} - \frac{1}{V}\frac{dV}{d\xi}\right)\Big|_{\xi=\xi_j} = \frac{2i\xi}{\mu_0 N^2}\Big|_{\xi=\xi_j},$$

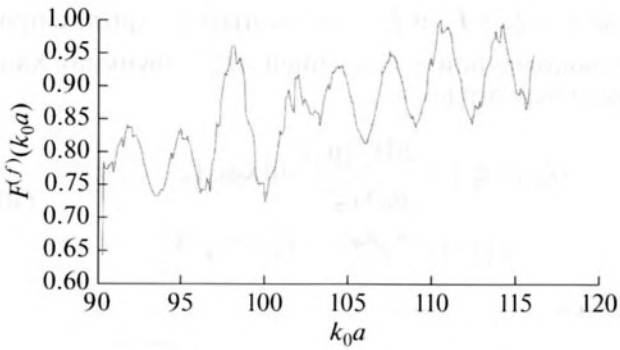

Рис. 2. Нормированная к единице функция формы для эхо-сигнала, отраженного от акустически жесткой сферы радиуса $a = 0.3$ м, помещенной в волновод; $r = 500$ м.

где

$$\left.\frac{1}{N^2}\right|_{\xi=\xi_j} = k_0(d+H) - \frac{\delta^2\mu_0\left[-2t_0^2\left(Ai(t_0)\right)^2 + Ai'(t_0)\,Ai(t_0) + 2t_0\left(Ai'(t_0)\right)^2\right]}{\sqrt{-t_0}\left[\left(Ai'(t_0)\right)^2 - t_0\left(Ai(t_0)\right)^2\right]}. \quad (14)$$

Таким образом, для коэффициента рассеяния сферы $A_{ml}(r)$ получаем выражение

$$A_{ml}(r) = i^{l-m}k_0\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_m}{2}}\sum_j H_m^{(1)}(k_0y\xi_j)\times \times\sin[k_0\mu_0(d-z)]\,N^2M_{ml}(\mu_0)\Big|_{\xi=\xi_j}. \quad (15)$$

Здесь функция $M_{ml}(\mu_0)$ задается формулой

$$M_{ml}(\mu_0) = 2\Pi_l^m \times \times(\mu_0)\begin{cases}-\cos(k_0\mu_0 d), & \text{если } m+l - \text{нечетное},\\ i\sin(k_0\mu_0 d), & \text{если } m+l - \text{четное}.\end{cases} \quad (16)$$

В рассматриваемой задаче исследуется эхо-сигнал от направленного источника с угловым раскрывом конуса излучения 4.5° на частоте 80 кГц. Поскольку каждую нормальную волну волновода можно представить в виде суперпозиции бегущих плоских волн с определенными углами наклона их фронтов (см. например, [13]), то должно выполняться неравенство $\xi_j \geq \cos 2.25° = 0.999229$ на частоте 80 кГц. При изменении частоты угол раскрыва конуса излучения меняется обратно пропорционально частоте, так как размер источника фиксирован. Разность между двумя соседними волновыми числами нормальных волн с ростом частоты также меняется обратно пропорционально частоте. Оба эти фактора приводят к тому, что количество нормальных волн, которое должно быть принято во внимание при заданной ширине характеристики направленности на уровне −3 дБ, практически не зависит от частоты. Ниже это число было взято равным количеству ξ_j, удовлетворяющих неравенству $\xi_j \geq \cos 2.25°$ на частоте 80 кГц. Вычисление корней обсуждается в приложении А.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для исследования зависимости эхо-сигнала от частоты рассмотрим функцию формы акустического рассеяния, которая определяется как

$$F(f) = \frac{2}{a}\left|\Phi(f)/\Phi_{\text{inc}}(f)\right| = \frac{8\pi r^2}{a}\left|\Phi(f)\right|, \quad (17)$$

где $\Phi(f)$ – акустический потенциал эхо-сигнала в точке приема (2), а $\Phi_{\text{inc}}(f) = \exp(ik_0r)/(4\pi r)$ – потенциал падающей волны в начале координат в отсутствие рассеивателя. Определение термина "функция формы" (в литературе на русском языке используется также термин "форм-функция" [18]) обсуждается в [19].

На рис. 2 показана зависимость функции формы от k_0a в случае, когда расстояние от источника/приемника до центра сферы равно 500 м. Рассеиватель предполагается акустически жестким, $a = 0.3$ м.

Для сравнения на рис. 3 показана зависимость функции формы $F^{(f)}(k_0a)$ от k_0a для эхо-сигнала, отраженного от акустически жесткой сферы радиуса $a = 0.3$ м, расположенной в изотропном водном пространстве, $r = 500$ м. В этом случае акустический потенциал эхо-сигнала $\Phi^{(f)}$ дается формулой (см., например, [20])

$$\Phi^{(f)} = \frac{ik_0}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)T_l\left[h_l^{(1)}(k_0r)\right]^2, \quad (18)$$

$$F^{(f)}(f) = \frac{8\pi r^2}{a}\left|\Phi^{(f)}(f)\right|. \quad (19)$$

В случае акустически жесткого сферического рассеивателя эхо-сигнал состоит из двух составляющих: зеркального отражения и ползущей волны Франца, которая возбуждается на границе между освещенной и теневой частями сферы. Разность времен прихода этих двух волн в точке наблюдения M равна

$$\Delta T = \left[\left(2\sqrt{r^2-a^2}+\pi a\right) - 2(r-a)\right]\Big/c_0 \approx \approx a\left(\pi + 2 - \frac{a}{r}\right)\Big/c_0,$$

что дает период осцилляций

$$\Delta f = \frac{1}{\Delta T} \approx \frac{c_0}{a\left(\pi + 2 - \frac{a}{r}\right)}.$$

Выражая период осцилляций через k_0a, получаем

$$\Delta_{k_0a}f = \frac{2\pi a\Delta f}{c_0} \approx \frac{2\pi}{\pi + 2 - \dfrac{a}{r}},$$

что для $r = 500$ м и $a = 0.3$ м дает $\Delta_{k_0a}f = 1.2217$. На рис. 3 период осцилляций равен 1.2084.

Перейдем к рассмотрению рассеяния импульсов.

Пусть источник излучает сигнал с косинусоидальной огибающей длительностью $2\Delta t = 10$ мс и частотой заполнения $\omega_c = 16\pi\times10^4$ с$^{-1}$:

$$Y(t) = \begin{cases} 0, & t < -\Delta t, \\ \dfrac{1}{2}\left[1 + \cos\dfrac{\pi t}{\Delta t}\right]e^{-i\omega_c t}, & -\Delta t < t < \Delta t, \\ 0, & t > \Delta t. \end{cases}$$

Его спектральная плотность равна

$$S(\omega) = \int_{-\Delta t}^{\Delta t} Y(t)e^{i\omega t}dt = \frac{\pi^2 \sin(\Delta t(\omega - \omega_c))}{\left[\pi^2 - (\Delta t)^2(\omega - \omega_c)^2\right](\omega - \omega_c)}. \quad (20)$$

Во временной области мы будем сравнивать сигналы, полученные в точке наблюдения M в свободном пространстве:

$$\hat{\Phi}^{(f)}(t) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left\{\int_{\omega_c-\Delta_\omega}^{\omega_c+\Delta_\omega} \Phi^{(f)}(\omega)S(\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega\right\}, \quad (21)$$

где $\Delta_f = 10$ кГц, $\Delta_\omega = 2\pi\Delta_f$, $\Phi^{(f)}(\omega)$ задается формулой (18), и в случае, когда рассеиватель находится в волноводе,

$$\hat{\Phi}(t) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left\{\int_{\omega_c-\Delta_\omega}^{\omega_c+\Delta_\omega} \Phi(\omega)S(\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega\right\}. \quad (22)$$

Рисунки 4 и 5 показывают нормированный к единице эхо-сигнал в свободном водном пространстве

$$\hat{F}^{(f)}(t) = \frac{8\pi r^2}{a}\hat{\Phi}^{(f)}(t), \quad (23)$$

отраженный от акустически жесткой сферы радиуса $a = 0.3$ м, $r = 500$ м, и в волноводе.

В свободном водном пространстве время прихода геометро-оптического эха (прямого импульса подсветки) равно $2(r-a)/c_0 \approx 0.6838$ с, а время прихода первой волны Франца $\left(2\sqrt{r^2 - a^2} + \pi a\right)/c_0 \approx a\left(\pi + 2\dfrac{r}{a} - \dfrac{a}{r}\right)/c_0 \approx 0.6849$ с. Таким образом, волна Франца приходит через 1 мс после геометро-оптического эха, интерферируя с ним. Амплитуда волны Франца составляет не более 0.025 амплитуды волны геометрического эха. Поэтому импульс, рассеянный акустически жесткой сферой в изотропном водном

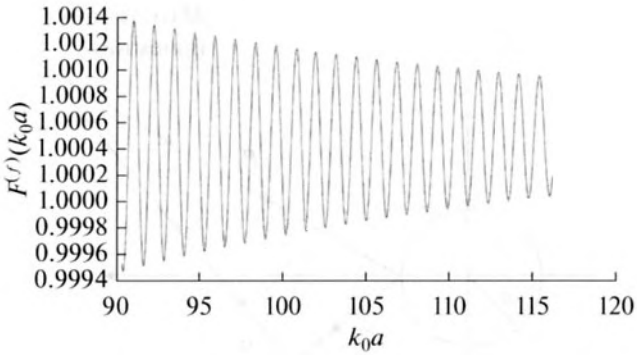

Рис. 3. Функция формы для эхо-сигнала, отраженного от акустически жесткой сферы радиуса $a = 0.3$ м, расположенной в изотропном водном пространстве; $r = 500$ м.

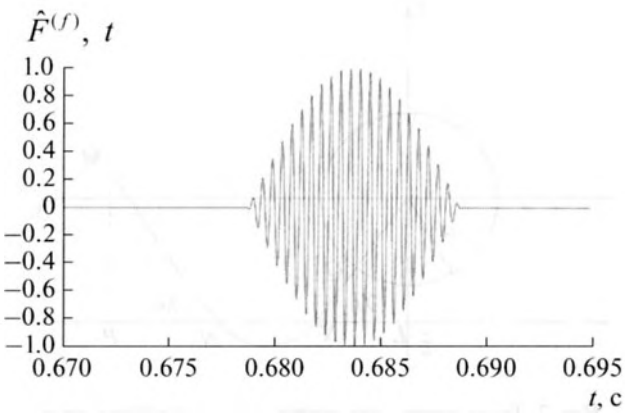

Рис. 4. Нормированный к единице эхо-сигнал, отраженный от акустически жесткой сферы радиуса $a = 0.3$ м в случае свободного водного пространства; $r = 500$ м.

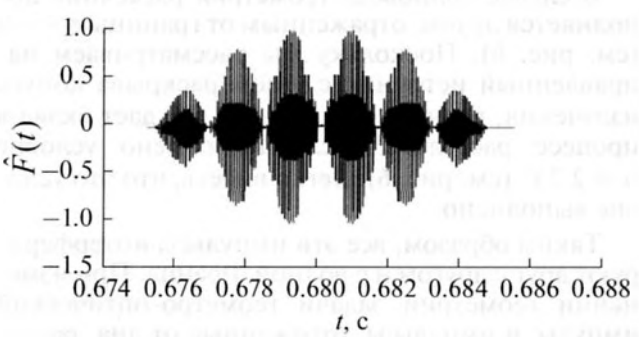

Рис. 5. Нормированный к единице эхо-сигнал, отраженный от акустически жесткой сферы радиуса $a = 0.3$ м, расположенной в волноводе; $r = 500$ м.

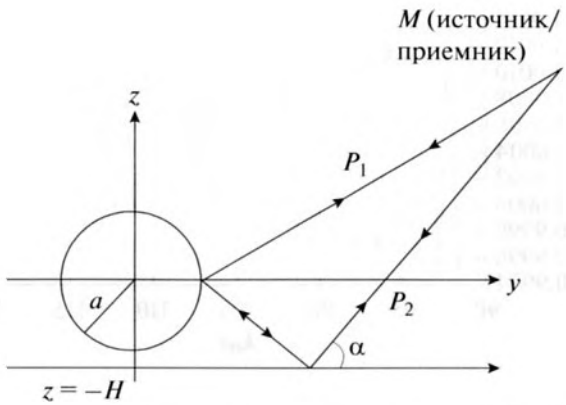

Рис. 6. Лучевые траектории P_1 и P_2, которые вносят свой вклад в процесс рассеяния.

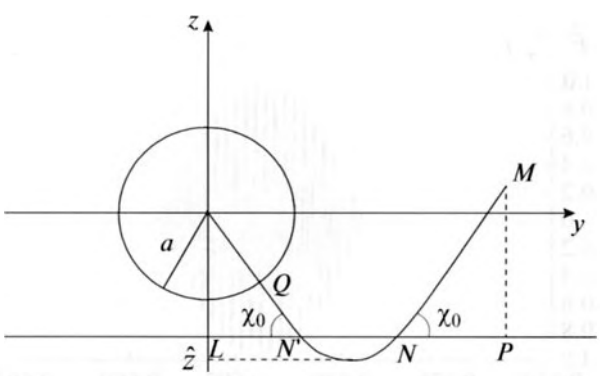

Рис. 7. Траектория луча, частично распространяющегося в полупространстве $z < -H$.

пространстве, практически не отличается от излученного импульса (см. рис. 4).

В случае волновода геометрия рассеяния дополняется лучом, отраженным от границы $z = -H$ (см. рис. 6). Поскольку мы рассматриваем направленный источник с углом раскрыва конуса излучения, равным 4.5°, то этот луч дает вклад в процесс рассеяния, если выполнено условие $\alpha \le 2.25°$ (см. рис. 6). Легко видеть, что это условие выполнено.

Таким образом, все эти импульсы интерферируют друг с другом и с волной Франца. При изменении геометрии задачи геометро-оптический импульс и импульсы, отраженные от дна, расходятся во времени (см. например, [21]).

Таблица 1. Времена прихода сигналов подсветки (обозначения P соответствуют траекториям, указанным на рис. 6) при $r = 500$ м

$2P_1$, с	$P_1 + P_2$,с	$2P_2$, с
0.683841	0.6838453	0.6838496

Наличие полупространства $z < -H$, в котором квадрат преломления меняется по линейному закону (1), приводит к дополнительному вкладу в процесс рассеяния волны, которая показана на рис. 7.

Вычисления, проведенные в Приложении Б, показывают, что для данной геометрии задачи луч, частично распространяющийся в неоднородном полупространстве (см. рис. 7), отражающийся от сферы и возвращающийся в точку M тем же путем, появляется при $\chi_0 = 72.886°$, т.е. он лежит вне конуса излучения рассматриваемого направленного источника. Этот луч попадает в конус излучения только при расстояниях $r > 6$ км.

Отдельного анализа требует учет влияния шумов и помех, которые будут проявляться при измерениях эхо-сигналов, рассеянных на телах в волноводах. Однако этот анализ выходит за рамки настоящей работы.

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе моделируется акустическое поле, рассеянное акустически жесткой сферой. Сфера помещена в волновод, скорость звука в котором постоянна у границы воздуха и воды, а ниже этого слоя скорость звука возрастает с глубиной, причем квадрат преломления меняется по линейному закону. Источник/приемник также находятся в слое с постоянной скоростью звука.

Коэффициенты рассеяния сферы вычисляются с помощью метода нормальных волн. Число нормальных волн удается сократить за счет учета направленности источника. Моделирование проведено в диапазоне частот 70–90 кГц при расстоянии между рассеивателем и источником/приемником, равным 500 м. Излученный сигнал предполагается импульсным с косинусоидальной огибающей и центральной частотой, равной 80 кГц. Его длительность 10 мс. Выделенный однородный слой должен содержать рассеиватель, а также источник/приемник. Вместо однородного слоя $-H \le z \le d$ можно рассматривать, например, однородный слой $-H \le z \le a + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и слой $a + \varepsilon \le z \le d$, скорость звука в котором монотонно возрастает или убывает с глубиной. При этом изменится только коэффициент отражения от верхней границы.

В случае произвольного монотонного возрастания с глубиной скорости звука в полупространстве надо заменить решения уравнения Гельмгольца их высокочастотной асимптотикой, которая будет выражаться через функции Эйри.

Геометрия задачи такова, что времена распространения импульсов подсветки различаются не более чем на 1×10^{-5} с, а время распространения импульса, соответствующего волне Франца, отличается от времени распространения луча пря-

мой подсветки менее чем на 1 мс. Поскольку длительность излученного импульса равна 10 мс, то все импульсы подсветки интерферируют друг с другом и с волной Франца. В результате эхо-импульс в волноводе существенно отличается от излученного импульса и эхо-импульса в свободном однородном водном пространстве.

Рассеиватель считается акустически жестким. Для рассмотрения акустически жидкой сферы, упругой сферы или упругой сферической оболочки надо изменить коэффициенты T-матрицы (см. например, [20] и Приложение А в [1]). В этом случае эхо-импульс еще более усложнится. Если, например, рассеиватель акустически жидкий, то появится еще один импульс, соответствующий волне шепчущей галереи, распространяющейся внутри сферы. Этот импульс будет интерферировать со всеми импульсами подсветки, что еще более усложнит структуру эхо-сигнала.

Результаты работы могут быть использованы при разработке практических методов и алгоритмов гидроакустического мониторинга мелкого моря.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской федерации в рамках Договора № 02. G25.31.0149 от 01.12.2015.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Запишем уравнение (13) для нахождения корней $\xi = \xi_j$ в терминах переменной t_0:

$$\frac{g(t_0)}{\cos\left(\frac{\sqrt{-t_0}}{\delta}(d+H)\right)Ai'(t_0)} = 0, \qquad \text{(A1)}$$

где

$$g(t_0) = \sin\left(\frac{\sqrt{-t_0}}{\delta}(d+H)\right)Ai'(t_0) - \\ - \sqrt{-t_0}\cos\left(\frac{\sqrt{-t_0}}{\delta}(d+H)\right)Ai(t_0) = 0. \qquad \text{(A2)}$$

Промежутку $\cos 2.25° \le \xi \le 1$ соответствует $-89.3733 \le t_0 \le 0$ при $f = 80$ кГц. График функции $g(t_0)$ при $-7 \le t_0 \le 0$ показан на рис. 8.

Двигаясь слева направо с шагом $\left(\frac{\pi k_0 \delta}{d+H}\right)^2$, равным периоду функции в левой части уравнения (A1), находим пары ближайших друг к другу точек, в которых функция $g(t_0)$ меняет знак. Каждая такая пара дает интервал, внутри которого лежит единственный ноль функции $g(t_0)$, который находится методом дихотомии. Всего при $f = 80$ кГц

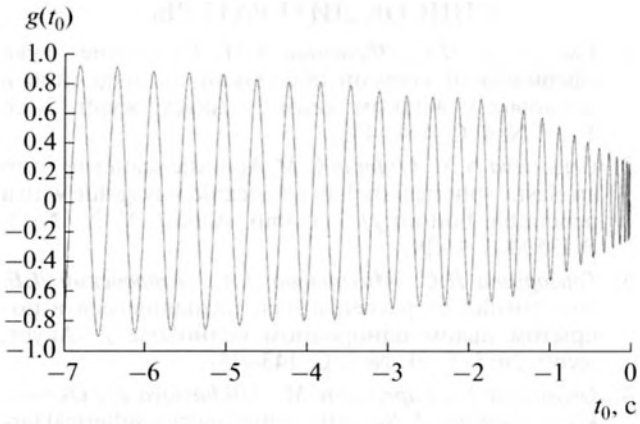

Рис. 8. График функции $g(t_0)$ на промежутке $-7 \le t_0 \le 0$.

уравнение (A1) в промежутке $-89.3733 \le t_0 \le 0$ имеет 351 нуль.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Найдем угол χ_0, показанный на рис. 7. Поскольку на дуге NN' угол наклона $\chi(z)$ связан с углом $\chi(-H) \equiv \chi_0$ законом Снеллиуса $n\cos(\chi) = \cos(\chi_0)$, где $n = c_0/c(z)$ (см. (1)), то длина отрезка $|NN'|$ дается выражением

$$\Delta = |NN'| = 2\cos\chi_0 \int_{\hat{z}}^{-H} \frac{dz}{\sqrt{n^2 - \cos^2\chi_0}},$$
$$n(\hat{z}) = \cos^2\chi_0.$$

Так как согласно (1) $n^2(z) = 1 + \gamma(z+H)$, $z < -H$, то

$$|NN'| = \frac{4}{\gamma}\cos\chi_0 \sin\chi_0; \quad \gamma = 2.4633 \times 10^{-5}\ \text{м}^{-1}.$$

Поскольку

$$|NP| = |MP|/\mathrm{tg}\chi_0 = 1.5\mathrm{ctg}\chi_0,$$
$$|LN'| = |OL|/\mathrm{tg}\chi_0 = \mathrm{ctg}\chi_0,$$

то χ_0 находится из уравнения

$$2.5\mathrm{ctg}\chi_0 + \frac{4}{\gamma}\cos\chi_0 \sin\chi_0 = |LP| = \sqrt{r^2 - 0.5^2}, \qquad \text{(Б1)}$$

которое можно записать в виде кубического уравнения относительно $Z = \mathrm{tg}\chi_0$:

$$Z^3\sqrt{r^2 - 0.5^2} + \frac{4}{\gamma}Z^2(-0.3\gamma - 1) + \\ + Z\sqrt{r^2 - 0.5^2} - 2.5 = 0. \qquad \text{(Б2)}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьева Н.С., Фридман Г.М.* Рассеяние звука сферической упругой оболочкой, помещенной в волновод с жидким дном // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 4. С. 424–432.
2. *Grigorieva N.S., Fridman G.M.* Acoustic scattering from an elastic spherical shell in an oceanic waveguide with a penetrable bottom // J. Comp. Acoust. V. 21. № 3. P. 1350009. 1–19.
3. *Григорьева Н.С., Михайлова Д.А., Островский Д.Б.* Эхо-сигнал от рассеивателя, находящегося в покрытом льдом однородном волноводе // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 143–151.
4. *Grigorieva N., Kupriyanov M., Mikhaylova D., Ostrovskiy D., Seleznev I.* Acoustic scattering by a spherical target in an oceanic waveguide covered with ice // Proceedings of the 3-rd Underwater Acoustic Conference and Exhibition / 21–26 June 2015. Platanias. Crete. Greece. P. 781–786.
5. *Кравцов Ю.А., Кузькин В.М., Петников В.Г.* Дифракция волн на регулярных рассеивателях в многомодовых волноводах // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 3. С. 339–343.
6. *Ingenito F.* Scattering from an object in a stratified medium // J. Acoust. Soc. Am. 1987. V. 82. № 6. P. 2051–2059.
7. *Горская Н.В., Горский С.М., Зверев В.А., Николаев Г.Н., Курин В.В., Хилько А.И.* Коротковолновая дифракция в многомодовом слоистом волноводе // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 1. С. 55–59.
8. *Кузькин В.М.* Рассеяние звуковых волн на теле в плоскослоистом волноводе // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 1. С. 77–84.
9. *Alexander P., Duncan A., Smith D.,* Modeling acoustic transmission loss due to sea ice cover // Acoustics Australia. 2013. V. 41. № 3. P. 79–87.
10. *Кудряшев В.М.* Расчет звукового поля в арктическом волноводе // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 3. С. 438–442.
11. *Hackman R.H., Sammelmann G.S.* Multiple-scattering analysis for a target in an oceanic waveguide // J. Acoust. Soc. Am. 1988. V. 84. № 5. P. 1813–1825.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.
13. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
14. *Фок В.А.* Проблемы дифракции и распространения волн. М.: Сов. Радио, 1970. 517 с.
15. *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
16. *Kargl S.G., Marston P.L.* Ray synthesis of Lamb wave contribution to the total scattering cross section for elastic spherical shell // J. Acoust. Soc. Am. 1990. V. 88. № 4. P. 1103–1113.
17. *Sessarego J.-P., Cristini P., Grigorieva N.S., Fridman G.M.* Acoustic scattering by an elastic shell near the sea bed // J. Comp. Acoust. 2012. V. 20. № 3. P. 1250006. 1–19.
18. *Клещев А.А.* Гидроакустические рассеиватели. 2-е издание. СПб: Изд-во Прима, 2012. 287 с.
19. *Lim R., Lopes J.L., Hackman R.H., Todoroff D.B.* Scattering by objects buried in underwater sediments. Theory and experiments // J. Acoust. Soc. Am. 1993. V. 93. № 4. Pt. 1. P. 1762–1783.
20. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние волн. Л.: Судостроение, 1989. 302 с.
21. *Grigorieva N., Kupriyanov M., Ostrovskiy D., Seleznev I., Stepanova D.* Pulse scattering on an ice sphere submerged in a homogeneous waveguide covered with ice // J. Comp. Acoust. 2016. V. 24. P. 1650014. 1–16.