

УДК 534.1:539.3:517.957

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, ОКРУЖЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДОЙ И СОДЕРЖАЩЕЙ ВЯЗКУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

© 2018 г. Ю. А. Блинков^а *, А. Ю. Блинкова^б **, Е. В. Евдокимова^б ***, Л. И. Могилевич^б ****

^аСаратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410013 Саратов, ул. Астраханская 83

^бСаратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
410054 Саратов, ул. Политехническая 77

*e-mail: blinkovua@info.sgu.ru

**e-mail: anblinkova26@gmail.com

***e-mail: eev2106@mail.ru

****e-mail: mogilevich@sgu.ru

Поступила в редакцию 06.02.2017 г.

Предложена математическая модель нелинейной упругой цилиндрической оболочки типа Кирхгофа–Лява, окруженной упругой средой и содержащей вязкую несжимаемую жидкость. В рамках предложенной модели проведен аналитический и численный анализ волновых процессов. На основе разработанного вычислительного алгоритма создан комплекс программ, позволяющий построить графики на их базе и получить численные решения задач Коши при точных решениях уравнений динамики оболочек без учета жидкости в качестве начального условия.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические упругие оболочки

DOI: 10.7868/S0320791918030036

ВВЕДЕНИЕ

В современной волновой динамике одним из важных направлений является изучение поведения волн деформаций в упругих оболочках. Нелинейные волны деформации в стержнях, в том числе окруженных упругой средой, исследованы в [1–3]. Волны в пластинах, в том числе неоднородные, изучены в [4]. Для упругой цилиндрической оболочки проведено исследование волновых процессов в работе [5]. Подробные обзоры работ, посвященных нелинейным волнам в стержнях, пластинах и оболочках, приведены в [6, 7].

Учет влияния линейно- и нелинейно-упругой окружающей среды на волны деформации в стержне и в оболочке приведен в [8–11], и, как отмечено в [10], члены уравнений, характеризующие влияние упругой среды, присутствуют в обоих уравнениях динамики оболочки в силу связи продольных и нормальных перемещений.

Известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически

и физически нелинейных оболочках [12], содержащих вязкую несжимаемую жидкость, на базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости в виде обобщенных уравнений Кортвега–де–Вриза (КдВ). Найдены эффекты влияния вязкой несжимаемой жидкости на поведение волны деформации в оболочке в зависимости от коэффициента Пуассона материала оболочки. В частности, при наличии жидкости в оболочке из неорганических материалов (различные трубопроводы в технологических сооружениях) выявлен экспоненциальный рост амплитуды волны. В случае органического материала (кровеносные сосуды) наличие жидкости приводит к быстрому затуханию волны.

Решение поставленной в настоящей работе задачи представляет актуальную, сложную проблему, имеющую важное значение для акустической диагностики и неразрушающего контроля материалов. Интерес к подобным задачам во многом инициирован необходимостью анализа упругих и

динамических свойств нанообъектов, в частности карбоновых нанотрубок.

Получим соответствующее уравнение с помощью асимптотических методов малых параметров для решения связанной задачи гидроупругости, включающей уравнения динамики геометрически нелинейной теории упругих оболочек, окруженных упругой средой, и уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости с соответствующими граничными условиями.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечно длинную упругую цилиндрическую оболочку, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат r, θ, x записываются в случае осесимметричного течения в виде [13, 14]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \\ = v \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \\ = v \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границе с оболочкой при $r = R - W$ выполняются условия прилипания жидкости [13] в подходе Лагранжа:

$$\begin{aligned} V_x + U \frac{\partial V_x}{\partial x} - W \frac{\partial V_x}{\partial r} &= \frac{\partial U}{\partial t}, \\ V_r - W \frac{\partial V_r}{\partial r} + U \frac{\partial V_r}{\partial x} &= -\frac{\partial W}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь t – время; V_r, V_x – проекции вектора скорости на оси цилиндрической системы координат; p – давление; ρ – плотность; v – кинематический коэффициент вязкости; U – продольное упругое перемещение оболочки по оси x ; W – прогиб оболочки, положительный к центру кривизны; R_1 – внутренний радиус оболочки; R – радиус срединной поверхности оболочки; h_0 – толщина оболочки ($h_0 = 2(R - R_1)$) и $h_0 \ll R$.

Уравнение динамики геометрически нелинейной оболочки записываются в виде [15]

$$\begin{aligned} \frac{Eh_0}{1 - \mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ U_x + \frac{1}{2} [(U_x)^2 + (W_x)^2] + \frac{h_0^2}{24} (W_{xx})^2 - \mu_0 \frac{W}{R} \right\} - \\ - \rho_0 h_0 U_{tt} - \left[k_3 \frac{R^2 \rho_0 h_0 c_0^2}{l^4} U - k_4 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2} U^3 \right] = -q_x, \\ \frac{Eh_0}{1 - \mu_0^2} \left\{ \frac{h_0^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [W_{xx} (1 + U_x)] - \right. \\ \left. - \left\{ \frac{\mu_0}{R} U_x + \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{R} [(U_x)^2 + (W_x)^2] + \frac{h_0^2}{12} (W_{xx})^2 \right\} - \frac{W}{R^2} \right\} - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ W_x \left[U_x + \frac{1}{2} [(U_x)^2 + (W_x)^2] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{h_0^2}{24} (W_{xx})^2 - \mu_0 \frac{W}{R} \right] \right\} + \rho_0 h_0 W_{tt} + k_1 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2} W = q_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь q_x, q_n – напряжения со стороны жидкости, находящиеся внутри оболочки; ρ_0 – плотность материала оболочки; μ_0 – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга; $c_0 = [E \rho_0^{-1} (1 - \mu_0^2)^{-1}]^{1/2}$ – скорость звука в материале оболочки; l – длина волны.

Выражения в уравнениях системы (3) и

$$-k_3 \frac{R^2 \rho_0 h_0 c_0^2}{l^4} U + k_4 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2} U^3, \quad k_1 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2} W \quad (4)$$

характеризуют реакцию упругой среды, в которой расположена труба кругового сечения [10, 11, 16].

Выражение $-k_3 \frac{R^2 \rho_0 h_0 c_0^2}{l^4} U + k_4 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2} U^3$ – реакция на продольное перемещение, а слагаемые $k_1 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2} W$ – реакция на сдвливание (сжатие).

Поверхностные напряжения со стороны жидкости, снесенные на невозмущенную поверхность оболочки ($W \ll R$), определяются формулами [13]

$$\begin{aligned} q_x &= \left[\rho v \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]_{r=R-W}, \\ q_n &= \left[-p + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r} \right]_{r=R-W}. \end{aligned} \quad (5)$$

УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ОБОЛОЧЕК

Принимая за характерную длину l длину волны (длинные волны), перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (3):

$$W = w_m u_3, \quad U = u_m u_1, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t. \quad (6)$$

Положим

$$\frac{h_0}{R} = \varepsilon, \quad \frac{u_m}{l} = O(\varepsilon), \quad \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon), \quad \frac{R}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \quad (7)$$

$$k_1 = O(1), \quad k_3 = O(1), \quad k_4 = O(1),$$

где $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр задачи (3).

Применим метод асимптотических разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (8)$$

где c – безразмерная неизвестная скорость волны, τ – внутренняя переменная, а зависимые переменные – в виде разложения по малому параметру ε :

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \dots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \dots \quad (9)$$

Подставляя (6), (8), (9) в уравнения (3) с учетом оценок (7) получим в нулевом приближении по ε линейную систему уравнений:

$$-\mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} + u_{30} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{\partial u_{30}}{\partial \xi} - c^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} = 0,$$

из которой следует связь

$$u_{30} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \quad (10)$$

и определяется безразмерная скорость волны:

$$c^2 = 1 - \mu_0^2. \quad (11)$$

При этом в нулевом приближении скорость волны $\sqrt{E/\rho_0}$ совпадает со скоростью звука в стержне.

Из следующего приближения по ε , учитывая (10) и (11), находится уравнение, являющееся составным для u_{10} :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + \\ & + \frac{\mu_0^2 k_1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - k_3 u_{10} + k_4 u_{10}^3 = \\ & = -\frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} \left[q_x - \mu_0 \frac{R \partial q_n}{l \partial \xi} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ОБОЛОЧКИ СО СТОРОНЫ ЖИДКОСТИ

Для определения правой части уравнения (12) введем безразмерные переменные и параметры

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{R_1} v_x, \quad r^* = \frac{r}{R}, \quad (13)$$

$$p = \frac{\rho v c_0 l w_m}{R^3} P, \quad \psi = \frac{R}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \quad \lambda = \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon).$$

Подставляя (13) в уравнение гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорости и давление в виде разложения по малому параметру λ :

$$v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad (14)$$

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots$$

В нулевом приближении по ψ ($\psi = 0$ – гидродинамическая теория смазки), считая $\psi \frac{R_1 c_0}{v} \ll 1$ – ползущие течения [17], и в нулевом приближении по λ получаем уравнения гидродинамики (классические уравнения гидродинамической теории смазки)

$$\frac{\partial p^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial p^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right), \quad (15)$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0$$

и граничные условия

$$r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0, \quad r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0, \quad \text{где } r^* = 0, \quad (16)$$

$$v_x^0 = \frac{\partial u_1}{\partial t^*}, \quad v_r^0 = -\frac{\partial u_3}{\partial t^*}, \quad \text{где } r^* = 1.$$

Из решения задачи (15) и (16) следует, что

$$P^0 = 16 \int \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right] dx^*, \quad (17)$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} = \frac{r^* \partial p^0}{2 \partial x^*} \Big|_{r^*=1} = 8 \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right].$$

Учитывая, что были введены переменные (8), (9) и имея соотношения (10) и (11), из (17) получим

$$\begin{aligned} P^0 &= 8\sqrt{1 - \mu_0^2} [2\mu_0 - 1] u_{10}, \\ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} &= 4\sqrt{1 - \mu_0^2} [2\mu_0 - 1] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (18)$$

С принятой точностью по ε , ψ , λ из (5) найдем

$$q_x = \lambda \frac{v}{R c_0} \rho c_0^2 \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}, \quad q_n = -\frac{\lambda}{\psi} \frac{v}{R_1 c_0} \rho c_0^2 P^0$$

и, следовательно, выражение в правой части уравнения (12) принимает вид

$$\begin{aligned} & q_x - \mu_0 \frac{R \partial q_n}{l \partial \xi} = \\ & = -4\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{v}{R c_0} \rho c_0^2 \frac{h_0}{R} [1 - 4\mu_0^2] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (19)$$

УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ С УЧЕТОМ НАЛИЧИЯ ЖИДКОСТИ В ОБОЛОЧКЕ

Подставляя (19) в уравнение (12), окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + \\ + \frac{\mu_0^2 k_1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - k_3 u_{10} + k_4 u_{10}^3 = \\ = 2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{h_0 c_0} [1 - 4\mu_0^2] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (20)$$

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = \varphi, \quad \eta = c_2 \xi, \quad \tau = c_3 \tilde{\tau} \quad (21)$$

позволяет записать уравнение (20) в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{\tau}} + 6\varphi\varphi_{\eta} + \varphi_{\eta\eta\eta} + s_2\varphi_{\eta} - s\varphi - \\ - s_3 \int \varphi d\eta + s_4 \left(\int \varphi d\eta \right)^3 = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Постоянные c_2 и c_3 определяются при подстановке (21) в (20) и имеют вид

$$c_2 = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_1}}, \quad c_3 = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0\sigma_1}},$$

при этом вводятся обозначения

$$s = \sigma\sqrt{\sigma_0\sigma_1}, \quad s_2 = \sigma_2\sigma_0, \quad s_3 = \sigma_3\sigma_1, \quad s_4 = \frac{\sigma_4\sigma_1^2}{\sigma_0},$$

где

$$6\sigma_0 = \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}, \quad \sigma_1 = \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{\mu_0^2 k_1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}},$$

$$\sigma_3 = k_3, \quad \sigma_4 = k_4, \quad \sigma = 2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{h_0 c_0} [1 - 4\mu_0^2].$$

Отметим, что $s > 0$ при $\mu_0 < \frac{1}{2}$ – неорганические материалы, $s < 0$ при $\mu_0 > \frac{1}{2}$ – живые организмы,

и $s = 0$ при $\mu_0 = \frac{1}{2}$ – несжимаемый материал, такой как резина, или отсутствие жидкости.

При отсутствии жидкости $s = 0$ получим из (22) уравнение

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{\tau}} + 6\varphi\varphi_{\eta} + \varphi_{\eta\eta\eta} + s_2\varphi_{\eta} - \\ - s_3 \int \varphi d\eta + s_4 \left(\int \varphi d\eta \right)^3 = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

которое имеет точное решение в виде солитона:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{s_3}{2s_4} \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s_3}{s_4}} \left[\eta - \left(\frac{s_3}{s_4} + 2s_4 + s_2 \right) \tilde{\tau} \right] \right\}, \\ \int \varphi d\eta = \sqrt{\frac{s_3}{s_4}} \operatorname{th} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s_3}{s_4}} \left[\eta - \left(\frac{s_3}{s_4} + 2s_4 + s_2 \right) \tilde{\tau} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

что легко проверяется подстановкой и находится представлением решения в виде многочлена по

степеням $\tilde{\tau}$ второй степени. Эта степень позволяет уравновесить дисперсию и нелинейность.

Отметим, что упругая окружающая среда влияет на скорость волны деформации в оболочке в сторону увеличения.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В работе [18] развит подход к построению разностных схем, основанный на построении переопределенной системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. В результате разностная схема определяется как условие совместности для данной системы. Таким образом получается разностная схема, автоматически обеспечивающая выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из шаблонов интегрирования построения.

Запишем уравнение (22) в виде системы в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} (-3s_0\varphi^2 - s_2\varphi) dt + \varphi d\eta + \\ + \iint_{\Omega} (-s\varphi - s_3\Psi + s_4\Psi^3) dt d\eta = 0, \quad (25) \\ \int_b^a (\Psi_{\eta\eta} - \varphi_{\eta}) d\eta = 0 \end{aligned}$$

для любой области Ω и любого интервала $a > b$.

Здесь связь $\int \varphi d\eta = \Psi$ записана через ее производную. Это связано с тем, что для устойчивости численного решения разностной схемы необходимо диагональное преобладание в соответствующей ей матрице. В результате для Ψ будет получено уравнение второго порядка, и нужно будет лишь зафиксировать вторую произвольную константу в решении. Для перехода к дискретной формулировке сопоставим $u_j^n = \varphi(t_n, \eta_j)$, $U_j^n = \Psi(t_n, \eta_j)$ и выберем в качестве базового контур, показанный на рис. 1, а для a, b – точки $j+2, j$ соответственно.

Добавим интегральные соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta} d\eta = u(t, \eta_{j+1}) - u(t, \eta_j), \\ \int_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u_{\eta\eta} d\eta = u_{\eta}(t, \eta_{j+2}) - u_{\eta}(t, \eta_j), \quad (26) \\ \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} U_{\eta} d\eta = U(t, \eta_{j+1}) - U(t, \eta_j). \end{aligned}$$

Используя для интегрирования по времени и первой производной по η формулу трапеций, а по второй производной по η формулу среднего значения и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (25), (26) в виде

$$\begin{aligned}
 & (-3s_0(u_j^{2n} + u_j^{2n+1} - u_{j+2}^{2n} - u_{j+2}^{2n+1}) - \\
 & - (u_{\eta j}^n + u_{\eta j}^{n+1} - u_{\eta j+2}^n - u_{\eta j+2}^{n+1}) - \\
 & - 2s_2(u_j^n + u_j^{n+1} - u_{j+2}^n - u_{j+2}^{n+1})) \frac{\tau}{2} + \\
 & + (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) 2h - (s(u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n) - \\
 & - s_3(U_{j+1}^{n+1} + U_{j+1}^n) + s_4(U_{j+1}^{3n+1} + U_{j+1}^{3n})) h\tau = 0, \quad (27) \\
 & (U_{\eta j+2}^n - U_{\eta j}^n) - (u_{j+2}^n - u_j^n) = 0, \\
 & (u_{\eta j+1}^n + u_{\eta j}^n) \frac{h}{2} = u_{j+1}^n - u_j^n, \\
 & u_{\eta j+1}^n 2h = u_{\eta j+2}^n - u_{\eta j}^n, \\
 & (U_{\eta j+1}^n + U_{\eta j}^n) \frac{h}{2} = U_{j+1}^n - U_j^n.
 \end{aligned}$$

Поскольку пакет [18] работает только в случае линейных разностных идеалов, а исходное дифференциальное уравнение (22) нелинейно, заменим нелинейную часть введением дополнительной функции $F = 3s_0 u^2$. За счет выбора допустимого упорядочения так, чтобы $u > U > \dots > F$, а затем по переменным n, j , нелинейная часть не будет входить в лидирующие мономы системы при построении базиса Грёбнера, и структура базиса позволит проверить принадлежность искомой разностной схемы.

В результате получим следующую разностную схему для уравнения (22), аналогичную схеме Кранка–Николсона для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + 3s_0 \frac{(u_{j+1}^{2n+1} - u_{j-1}^{2n+1}) + (u_{j+1}^{2n} - u_{j-1}^{2n})}{4h} + \\
 & + ((u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1}) + \\
 & + (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)) / 4h^3 + \\
 & + s_2 \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} - \\
 & - s \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} - s_3 \frac{U_{j+1}^{n+1} + U_j^n}{2} + s_4 \frac{U_{j+1}^{3n+1} + U_j^{3n}}{2} = 0, \\
 & \frac{U_{j+2}^n - 2U_{j+1}^n + U_j^n}{h^2} - \frac{u_{j+2}^n - u_j^n}{2h} = 0. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Полученные неявные разностные схемы имеют квадратичную и кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована линеаризация:

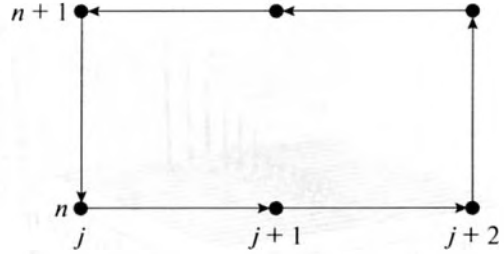


Рис. 1. Базовый контур для уравнения (25).

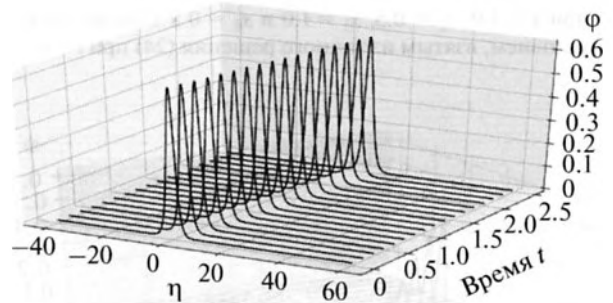


Рис. 2. Графики численного решения уравнений (22) при $s = 0.0$, $s_2 = 0.5$, $s_3 = 1.0$ и $s_4 = 0.8$ с начальным условием, взятым из точного решения (24) при $t = 0$. Численный расчет уравнения (22) с начальным условием в виде решения (24) при $\tilde{t} = 0$ продемонстрировал хорошее совпадение с точным решением.

$$\begin{aligned}
 v_{k+1}^2 &= v_{k+1}^2 - v_k^2 + v_k^2 = \\
 &= (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1} + v_k) + v_k^2 \approx v_{k+1} 2v_k - v_k^2.
 \end{aligned}$$

Количество итераций для достижения точности 10^{-12} на следующем временном слое, как правило, не превышало 2–3. Шаг по времени t брался равным половине шага по переменной η . Программа расчета была написана на языке Python с использованием пакета SciPy (<http://\scipy.org>).

В результате проведенных вычислительных экспериментов на известных точных решениях при частном наборе параметров для уравнения (22) получено хорошее согласие численных и аналитических решений.

Численный расчет уравнения (22) с начальным условием в виде решения (24) при $\tilde{t} = 0$ показал, что влияние упругой окружающей среды в продольном направлении приводит к более медленному росту амплитуды волны при $\mu_0 < \frac{1}{2}$ на рис. 3 и более медленному затуханию волны при $\mu_0 > \frac{1}{2}$ на рис. 4, чем при отсутствии упругой среды [12].

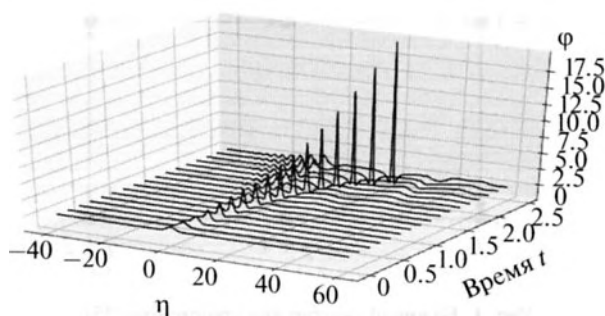


Рис. 3. Графики численного решения уравнений (22) при $s_1 = 1.0$, $s_2 = 0.5$, $s_3 = 1.0$ и $s_4 = 0.8$ с начальным условием, взятым из точного решения (24) при $t = 0$.

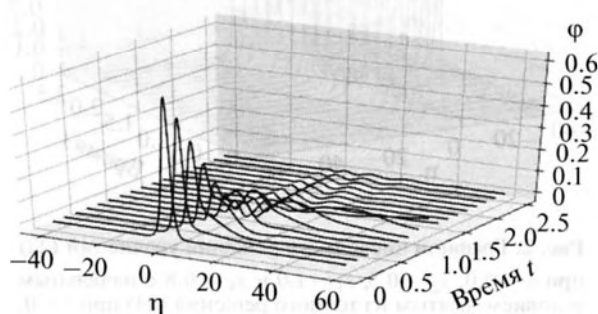


Рис. 4. Графики численного решения уравнений (22) при $s_1 = -1.0$, $s_2 = 0.5$, $s_3 = 1.0$ и $s_4 = 0.8$ с начальным условием, взятым из точного решения (24) при $t = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе было проведено исследование модели волновых явлений в геометрически нелинейной упругой цилиндрической оболочке типа Кирхгофа–Лява, окруженной упругой средой и содержащей вязкую несжимаемую жидкость. Выполненные вычислительные эксперименты позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости и упругой среды на распространение нелинейных волн в упругой оболочке с различными значениями коэффициента Пуассона.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00175-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Островский Л.А., Сутин А.М. Нелинейные упругие волны в стержнях // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 3. С. 531–537.
2. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Особенности генерации волн источником, движущимся по одномерной гибкой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании // Акуст. журн. 2016. Т. 48. № 6. С. 639–647.
3. Porubov A.N., Samsonov A.M., Velarde M.G., Bukhanovsky A.V. Strain solitary waves in an elastic rod embedded in another elastic external medium with sliding // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. № 3. P. 3854–3864.
4. Потапов А.И., Солдатов И.Н. Квазиплоский пучок нелинейных произвольных волн в пластине // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 6. С. 819–822.
5. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны деформации в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3. № 1. С. 52–58.
6. Ерофеев В.И., Клюева Н. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 6. С. 725–740.
7. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009. 318 с.
8. Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Павлов И.С. Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в зернистой среде // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6. № 2. С. 140–150. doi 10.7242/1999-6691/2013.6.2.17
9. Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 30–36.
10. Бочкарев А.В., Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Уединенные волны в неоднородной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с упругой средой // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 2. С. 145–151.
11. Михасёв Г.И., Шейко А.Н. О влиянии параметра упругой нелокальности на собственные частоты колебаний углеродной нанотрубки в упругой среде // Труды Белорусского гос. тех. университета. 2012. № 6. С. 41–44.
12. Блинова А.Ю., Иванов С.В., Ковалев А.Д., Могилевич Л.И. Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Известия Саратовского университета. Новая серия. Физика. 2012. Т. 12. № 2. С. 12–18.
13. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Изд. ЛГУ, 1978. 296 с.
14. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
15. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
16. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. 490 с.
17. Попов И.Ю., Родыгина О.А., Чивилихин С.А., Гусаров В.В. Солитон в стенке нанотрубки и стоково течение в ней // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. № 18. С. 48–54.
18. Блинов Ю.А., Гердт В.П. Специализированная система компьютерной алгебры GINV // Программирование. 2008. Т. 34. № 2. С. 67–80.