

УДК 534.222

ПРОСТОЙ БИМОДУЛЬНЫЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

© 2018 г. С. Г. Михайлов^{a, b}, О. В. Руденко^{a, b, c, d, *}^aМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
119991 ГСП-1 Москва, Ленинские горы^bИнститут общей физики им. А.М. Прохорова РАН
119991 Москва, ул. Вавилова 38^cИнститут физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН
123242 Москва, Б. Грузинская ул. 10, стр. 1^dBlekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden

*e-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 12.07.2017 г.

Исследована динамика искусственного нелинейного элемента, представляющего собой гибкую мембрану с ограничителями ее колебаний и статической прижимающей силой. Такой элемент обладает свойством “бимодульности” и демонстрирует “модульную” нелинейность. Построена математическая модель, описывающая эти колебания. Рассчитана их форма. Прослежена аналогия с классическим объектом – маятником Галилея. Показано, что при низкочастотном возбуждении мембраны уровень гармоник в спектре выше, чем в окрестности частоты резонанса. Установлена сильная зависимость уровня гармоник от величины прижимающей силы при слабом возбуждении. Предложена конструктивная схема устройства, в квазистатическом приближении обладающего свойством бимодульности. Проведен эксперимент, подтверждающий ее работоспособность. Показано качественное совпадение экспериментальных результатов и расчетов при детектировании амплитудно-модулированного сигнала.

Ключевые слова: искусственный нелинейный элемент, модульная нелинейность, генерация гармоник, детектирование акустических колебаний

DOI: 10.7868/S0320791918020119

Нелинейные взаимодействия наблюдаются как в объеме среды, так и на границе [1], когда волна отражается или проходит через нее. К последнему случаю можно отнести так называемый нелинейный экран [2], при отражении от которого рождаются новые частоты акустического спектра. Из-за присутствия сильно нелинейных механических элементов в такой конструкции может происходить, в частности, детектирование модулированных колебаний. Такое устройство должно работать и при относительно малых интенсивностях волны, безопасных для человека. Соответствующие режимы нетипичны для нелинейной акустики, использующей высокие и сверхвысокие уровни акустических полей.

В работе [3] для анализа эффектов, имеющих место при воздействии акустической волны на нелинейный элемент, использовано уравнение вида

$$m\ddot{\xi} + \beta m\dot{\xi} + k(\xi - \gamma|\xi|) = Sp(t) - F. \quad (1)$$

Здесь ξ – смещение нелинейного элемента массой m под действием давления $p(t)$ акустической

волны, действующего на площадь S , и постоянной прижимающей силы F ; β – коэффициент затухания, k – коэффициент упругости, $0 \leq \gamma < 1$ – коэффициент нелинейности. Нелинейность в уравнении (1) учтена введением члена, содержащего модуль (абсолютную величину) смещения. Использование этого математического приема позволяет кратко записать уравнение колебаний, в котором при различных знаках смещения действие сил упругости существенно различается, что с физической точки зрения соответствует двум коэффициентам (модулям) упругости. Различной трактовкой слова “модуль”, по-видимому, и объясняется использование нескольких вариантов названия рассматриваемого вида нелинейности [1, 3–6]. Авторы склоняются к тому, чтобы упругий элемент в (1) называть “бимодульным”, а для нелинейности использовать термин “модульная нелинейность”. Коэффициент упругости при положительном значении смещения $\xi > 0$ равен $k_+ = k(1 - \gamma)$. Он меньше, чем коэффициент упругости при отрицательном значении $\xi < 0$, равный $k_- = k(1 + \gamma)$. Коэффициентам

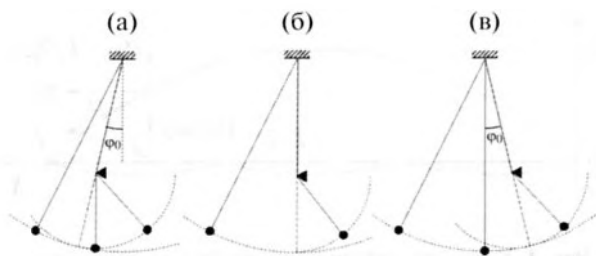


Рис. 1. Маятник Галилея (б) и его поведение при отклонении ограничителя (показан темным треугольником) в различные стороны от вертикали – влево (а) и вправо (в). Пунктиром показаны траектории груза при закреплении нити в точке подвеса и на ограничителе. Штриховой линией показано положение нити в момент касания ограничителя.

упругости k_+ и k_- соответствуют периоды колебаний $T_+ = 2\pi\sqrt{m/k_+}$ и $T_- = 2\pi\sqrt{m/k_-}$.

Уравнением, подобным (1) (при $F = 0$), описываются колебания маятника Галилея (рис. 1). Маятник представляет собой точечный груз, подвешенный на невесомой гибкой нити. Он совершает колебания под действием силы тяжести в вертикальной плоскости (рис. 1б). Под точкой подвеса имеется элемент (ограничитель, “гвоздь”), препятствующий смещению нити в одну из сторон и тем самым изменяющий длину подвеса. Период колебаний такого маятника не зависит от амплитуды φ (пока $\sin \varphi \approx \varphi$) и представляет собой сшивку двух полупериодов различной продолжительности, один из которых соответствует полной длине подвеса, а другой – расстоянию от ограничителя до груза. В рассматриваемом случае нелинейность проявляется при сколь угодно малых амплитудах колебаний.

Наличие силы F эквивалентно отклонению ограничителя от вертикали на угол $\varphi_0 = \arcsin(F/mg)$ (g – ускорение свободного падения). Такой “наклонный” маятник Галилея в зависимости от амплитуды колебаний φ и величины и знака φ_0 будет иметь три области, в которых вид решения существенно различается (рис. 1а и 1в). В двух из них (при $|\varphi| < |\varphi_0|$) колебания линейны, а их периоды соответствуют полному и укороченному подвесу. При $|\varphi| > |\varphi_0|$ будут наблюдаться нелинейные колебания, представляющие собой сшивку частей периодов упомянутых колебаний в разной пропорции. Таким образом, для проявления нелинейности в наклонном маятнике Галилея существенной является амплитуда его колебаний и величина угла φ_0 .

Ограничимся этим наглядным качественным анализом и вернемся к уравнению (1). Численные методы позволяют найти и проанализировать его решения при разных значениях входящих в него

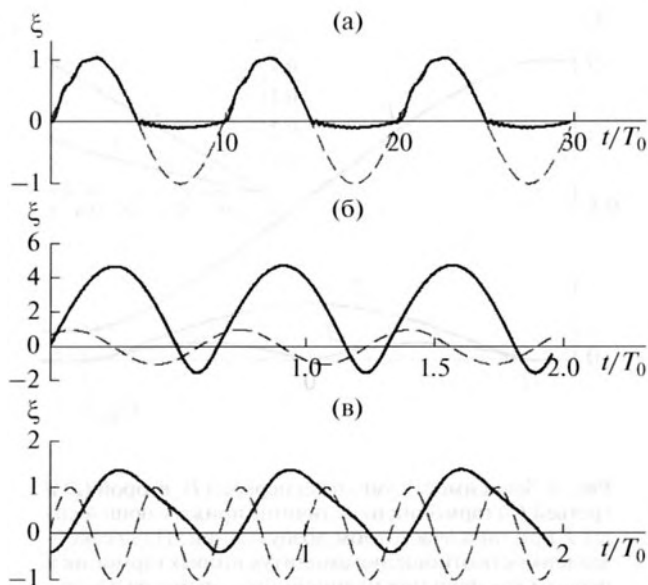


Рис. 2. Формы вынужденных колебаний бимодульно-го нелинейного элемента при частотах возбуждающего сигнала $0.1/T_0$ (а), $1.52/T_0$ (б) и $3/T_0$ (в), $T_0 = (T_+ + T_-)/2$, $\beta = 0.2$. Гармонический сигнал на частоте возбуждения показан штриховой линией.

параметров. На рис. 2 приведены результаты расчета формы вынужденных колебаний при $F = 0$ и различных частотах гармонического вынуждающего воздействия $p(t) = p_0 \cos(\omega t)$. Расчеты выполнены при значении $\gamma = 9/11$, что соответствует отношению коэффициентов упругости при отрицательном и положительном смещении $k_-/k_+ = 10$. График рис. 2а показывает, что при возбуждении на низкой частоте происходит существенное одностороннее ограничение колебаний. В целом процесс колебаний хорошо описывается формулой, приведенной в работе [3]:

$$\xi_{\pm}(t) = \frac{Sp_0 \cos(\omega t) - F}{k(1 \mp \gamma)}. \quad (2)$$

Формула (2) получена в предположении, что частота колебаний настолько низка, что производными по времени в уравнении (1) можно пренебречь. Здесь верхние знаки берутся для положительных значений $\xi > 0$, а нижние – для отрицательных $\xi < 0$. При $F = 0$ амплитуды положительного A_{t+} и отрицательного A_{t-} полупериодов низкочастотных колебаний относятся как k_-/k_+ . Заметим, что знак правой части равенства (2) полностью определяется знаком числителя, так как знаменатель при выбранных ограничениях всегда положителен. С учетом этого замечания

$$\xi(t) = \frac{Sp_0 \cos(\omega t) - F}{k[1 - \gamma \operatorname{sgn}(Sp_0 \cos(\omega t) - F)]}.$$

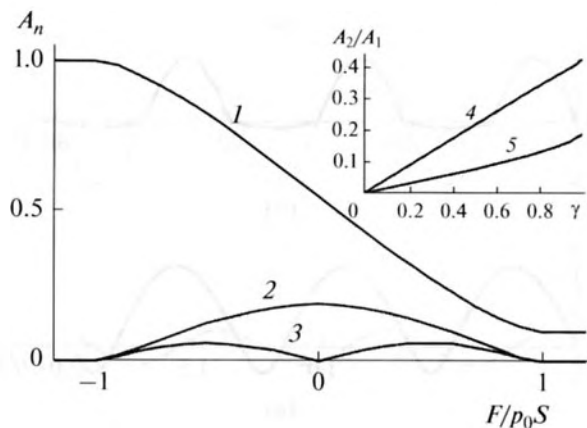


Рис. 3. Зависимость амплитуд первой (1), второй (2) и третьей (3) гармоник от величины прижимающей силы F при низкочастотном возбуждении. На врезке — зависимость отношения амплитуд вторых гармоник к первым как функция нелинейного параметра γ в случае возбуждения на низкой частоте (4) и резонансе (5) при $F = 0$.

Последнее выражение позволяет проводить вычисления смещения ξ без вычисления его знака. Отбрасывание производных по времени, однако, означает, что зависимость $\xi(t)$ может претерпевать изломы, зависимость скорости от времени иметь разрывы, а ускорение движущегося элемента достигать больших амплитуд. Как видно из кривой, приведенной на рис. 2а, вблизи таких точек (переход через 0) в решении дифференциального уравнения появляются выбросы, приводящие к появлению затухающих колебаний на частотах $f_+ = 1/T_+$ и $f_- = 1/T_-$. Подобные колебания наблюдались в эксперименте, описанном в работе [3]. Однако на общий ход процесса в приведенном примере это не оказывает принципиального влияния. Численные расчеты показывают, что подобный вид колебаний наблюдается при частоте возбуждающего сигнала порядка $0.1/T_0$ и меньше.

Вблизи частоты $f_0 = 2/(T_+ + T_-)$ (в данном примере она равна $f_0 = 1.519$) наблюдается максимальная амплитуда колебаний; при этом форма колебаний асимметрична (рис. 2б), а амплитуды положительного и отрицательного полупериодов относятся приблизительно как T_+/T_- . Это утверждение вытекает из того обстоятельства, что при переходе через ноль ($\xi = 0$) скорость должна сохранять свое значение неизменным. В этом случае при $t = 0$ должно выполняться равенство

$$\frac{d}{dt} \left(A_{r+} \sin \left(\frac{2\pi t}{T_+} \right) \right) = \frac{d}{dt} \left(A_{r-} \sin \left(\frac{2\pi t}{T_-} \right) \right).$$

Здесь индекс “ r ” подчеркивает тот факт, что амплитуды соответствуют колебаниям на резонансной частоте. Из этого условия следует

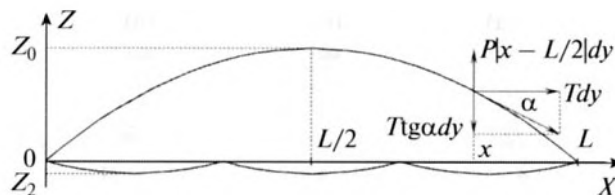


Рис. 4. К расчету деформации мембраны, закрывающей щель.

$A_{r+}/A_{r-} = T_+/T_-$. Последнее верно, если изменения амплитуд и периодов достаточно медленны и их зависимостью от времени можно пренебречь. Заметим, что $T_+/T_- = \sqrt{k_-/k_+}$. Следовательно, отношение амплитуд $A_{r+}/A_{r-} \leq A_{l+}/A_{l-}$, причем равенство достигается только при $\gamma = 0$. Отсюда вытекает, что наибольшая нелинейность колебаний должна наблюдаться при низкочастотном возбуждении. При дальнейшем повышении частоты возбуждающего сигнала выше резонанса форма колебаний сохраняет асимметрию (рис. 2в), а амплитуда имеет тенденцию к уменьшению, хотя и наблюдаются локальные максимумы на частотах гармоник.

Искажение формы колебания означает присутствие в нем гармоник. Интересна зависимость амплитуды гармоник от величины прижимающей силы. Расчеты показывают, что в бимодульном элементе при слабом возбуждении нелинейность наблюдается в узком диапазоне изменения прижимающей силы $|F| < p_0 S$ (рис. 3). Но если ее значение выбрано правильно, нелинейность весьма высока. Можно надеяться, что элемент, обладающий такими свойствами, может найти применение при решении практических задач.

В предельном случае $\gamma \rightarrow 1$ амплитуда отрицательного полупериода уменьшается практически до нуля, а процесс, описываемый при этом уравнением (1), фактически является упругим ударом. Подобные явления изучаются акустикой виброударных процессов [7], но при этом используются иные методы исследования.

Рассмотрим длинную щель в неподвижной пластине. Пусть ширина щели равна L , и она перекрыта мембраной, неподвижно закрепленной на ее краях в точках 0 и L (рис. 4). Пусть давления сверху и снизу мембраны различны и равны p_1 и p_2 соответственно, и $P = p_2 - p_1$. Предположим, что мембрана может свободно (без приложения усилия) изгибаться, а ее погонное натяжение T (поперек щели) не зависит от ее прогиба. Приравняв силы, действующие в вертикальном направлении на полоску мембраны шириной dy в сечении, имеющем ординату x (рис. 4), получим:

$$T \operatorname{tg}(\alpha) dy = P(x - L/2) dy. \quad (3)$$

Приращения в вертикальном и горизонтальном направлениях связаны зависимостью $dz = \text{tg}(\alpha)dx$. Подставляя сюда $\text{tg}(\alpha)$ из (3) и выполняя интегрирование от 0 до x , найдем, что отклонение мембраны от положения равновесия равно

$$z(x) = \frac{P}{2T} x(L - x).$$

Таким образом, мембрана имеет параболическую форму. В точке $x = L/2$ отклонение максимально и равно

$$Z_0 = \frac{P}{8T} L^2.$$

Если ниже мембраны равномерно установить две опоры, которые бы препятствовали ее перемещению ниже линии равновесия, но не препятствовали бы перемещению вверх, то при значениях давления P , различающихся только знаком, мембрана будет принимать форму, изображенную на рис. 4 линиями выше и ниже оси X . При этом масштаб деформации выбран равным. Очевидно, что площадь между верхней кривой и осью X существенно больше, чем между осью X и нижней кривой. Если таких опор будет N , максимальное отклонение мембраны вниз составит

$$Z_N = \frac{P}{8T} \frac{L^2}{(N + 1)^2},$$

а отношение объемов, вытесняемых мембраной при различных знаках P , будет равно

$$\frac{V_-}{V_+} = \frac{1}{(N + 1)^2}.$$

Очевидно, что таким же будет и отношение усредненных (averaged) по поверхности мембраны смещений:

$$\frac{z_{\text{av-}}}{z_{\text{av+}}} = \frac{1}{(N + 1)^2}.$$

Полученные соотношения указывают, что рассматриваемая схема описывает нелинейный элемент, отклонение от положения равновесия которого в среднем прямо пропорционально внешнему воздействию, но коэффициенты пропорциональности различны при разных знаках воздействия. Таким образом, элемент обладает свойством бимодульности. Этот вывод относится к случаю квазистатической деформации, когда изменение формы мембраны происходит достаточно медленно, так что ее инерционностью можно пренебречь.

Подобным свойством обладает и схема элемента на рис. 5. На нем изображена мембрана, закрепленная по краю отверстия радиуса R_2 , в центре которого помещена опора радиуса R_1 , не допускающая перемещение центральной части мембраны ниже уровня $z = 0$.

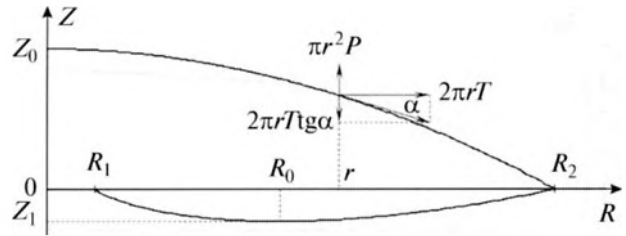


Рис. 5. К расчету деформации круглой мембраны с односторонней опорой.

Рассмотрим случай, когда давление P положительно и мембрана смещается вверх. Приравняем вертикальные составляющие сил, действующих на окружность радиуса r :

$$2\pi r T \text{tg}(\alpha) = -\pi r^2 P. \quad (4)$$

В этом случае также $dz = \text{tg}(\alpha)dx$. Подставляя сюда $\text{tg}(\alpha)$ из (4) и выполняя интегрирование от R_2 до r , получим

$$z_+(r) = \frac{P}{4T} (R_2^2 - r^2).$$

Если давление отрицательно и мембрана отклоняется вниз, прижимаясь к центральной опоре, равенство вертикальных составляющих сил, действующих на окружность радиуса r , запишется в виде

$$2\pi r T \text{tg}(\alpha) = \pi P (R_0^2 - r^2),$$

где R_0 – радиус, соответствующий максимальному отклонению мембраны от состояния равновесия. Аналогичным образом, выполняя подстановку и интегрирование и используя граничное условие $z_-(R_1) = z_-(R_2) = 0$, найдем:

$$z_-(r) = \frac{P}{2T} \left(\frac{R_2^2 - r^2}{2} + R_0^2 \ln \left(\frac{r}{R_2} \right) \right),$$

$$R_0^2 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{2 \ln(R_2/R_1)}.$$

Формы, принимаемые мембраной при положительном и отрицательном прогибе, не подобны. Поэтому имеет смысл найти отношение вытесняемых объемов, соответствующих этим случаям при равной величине давления P (как функцию отношения R_2/R_1), а затем рассчитать отношение средних по поверхности смещений. График этой зависимости приведен на рис. 6. Как видно из графика, отношение средних смещений при $R_2/R_1 > 100$ слабо зависит от этого отношения, что можно использовать при создании нелинейных устройств.

Для экспериментального исследования взаимодействия акустической волны и бимодульного

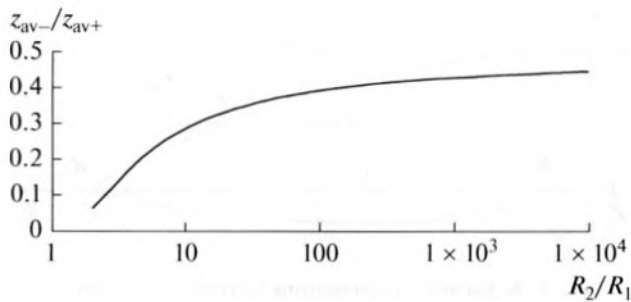


Рис. 6. Отношение средних по поверхности смещений круглой мембраны с односторонней центральной опорой при различных направлениях прогиба.

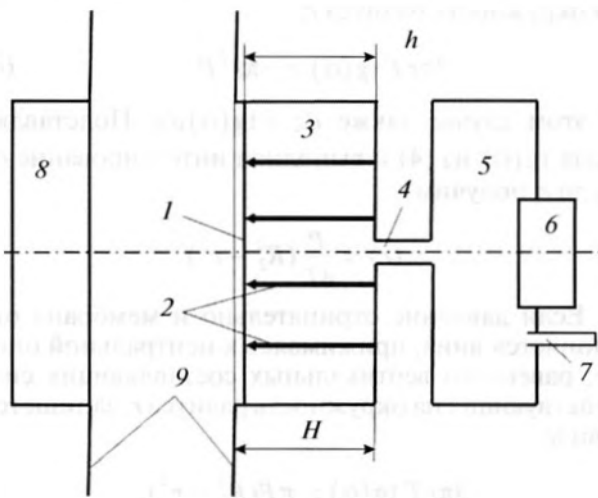


Рис. 7. Схема устройства для исследования бимодульной нелинейности при воздействии акустической волны.

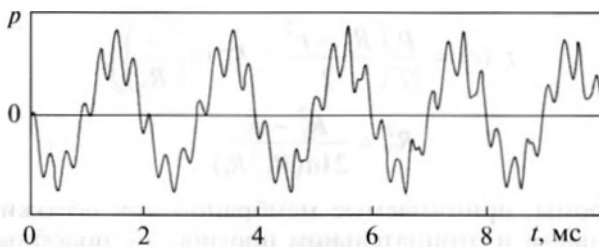


Рис. 8. Сигнал на выходе микрофона. Модуляция на частоте 500 Гц.

нелинейного элемента использовалось устройство, схема которого приведена на рис. 7. Основными элементами являются: тонкая гибкая мембрана из полиэтиленовой пленки 1, закрепленная по окружности и опирающаяся на группу игл 2, расположенных в цилиндрической воздушной полости 3, которая через отверстие 4 соединяется

с полостью 5, в которой расположен микрофон 6. Отверстие 4 и полость 5 представляют собой резонатор Гельмгольца с резонансной частотой около 500 Гц и образуют фильтр низких частот, позволяющий снизить воздействие на микрофон высокочастотной составляющей давления. Капилляр 7 позволяет изменять статическое давление внутри объема, ограниченного мембраной и стенками полости, с помощью насоса (не показан на схеме). Внешнее переменное звуковое давление создается электродинамическим излучателем 8. Для выравнивания структуры поля и увеличения создаваемого излучателем давления предназначены щечки 9. Диаметр полости 3 составил 26 мм, ее глубина $H = 19$ мм, расстояние между мембраной и дном полости $h = 18$ мм. Расстояние между щечками могло изменяться и в опытах составило порядка 20 мм.

На излучатель подавался амплитудно-модулированный сигнал. Частота несущей, соответствующая максимальной амплитуде низкочастотной составляющей, оказалась равной 3.9 кГц. Форма сигнала на выходе микрофона при частоте модуляции 500 Гц приведена на рис. 8.

Изменение статического давления в полости 3 должно приводить либо к тому, что мембрана отходит от игл (если давление внутри полости положительное), либо к тому, что мембрана будет прижиматься к иглам с некоторым усилием (при отрицательном давлении). И то, и другое должно сказаться на эффективности преобразования акустического сигнала и величине низкочастотного сигнала, возникающего в результате такого преобразования. На рис. 9 приведена экспериментально полученная зависимость среднеквадратического значения низкочастотного сигнала p_s от разности внутреннего и внешнего давлений P . Резкое снижение амплитуды при повышении давления как раз и указывает на то, что мембрана отжимается от игл и нелинейное взаимодействие прекращается. При понижении внутреннего давления снижение амплитуды низкочастотной составляющей происходит более плавно, что, по-видимому, объясняется разбросом в высоте игл. Кроме того, область, соответствующая максимальному нелинейному преобразованию низкочастотного сигнала, оказалась смещенной от точки, соответствующей нулевому давлению P . Объясняется это тем, что в условиях эксперимента не удалось установить иглы так, чтобы их острия располагались строго в плоскости мембраны.

Чтобы учесть этот разброс, введем в уравнение (1) еще один член — отклонение $\Delta\xi$ от состояния равновесия:

$$m\ddot{\xi} + \beta m\dot{\xi} + k(\xi - \gamma|\xi - \Delta\xi|) = Sp(t) - F.$$

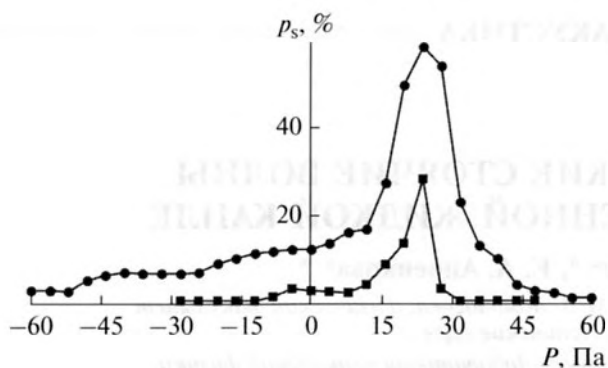


Рис. 9. Зависимость амплитуды низкочастотной составляющей давления (проценты от полной шкалы) от внутреннего статического давления при двух значениях электрического напряжения, подаваемого на излучатель, различающихся в два раза.

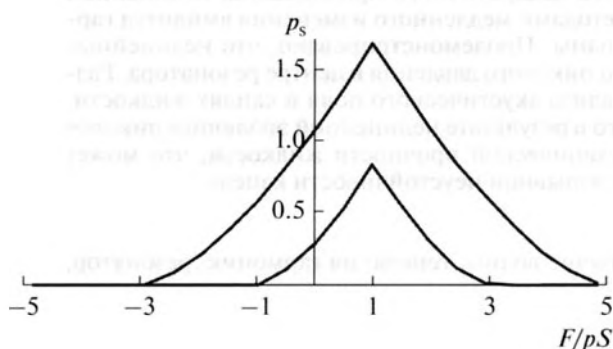


Рис. 10. Зависимость амплитуды низкочастотной составляющей давления внутри полости от прижимающей силы при двух значениях давления возбуждения $2p$ и $4p$. $k\Delta\xi = pS$ и $k = 1$.

Если частота колебаний мала и производные по времени пренебрежимо малы, решение можно записать в виде

$$(\xi - \Delta\xi)_{\pm} = \frac{Sp_0 \cos(\omega t) - F - k\Delta\xi}{k(1 \mp \gamma)}$$

Здесь верхние знаки берутся для положительных значений $\xi - \Delta\xi > 0$, а нижние — для отрицательных $\xi - \Delta\xi < 0$. Так как знак левой части равенства полностью определяется знаком числителя правой, это выражение можно переписать в виде, более удобном при выполнении расчетов:

$$\xi(p_0) = \frac{Sp_0 \cos(\omega t) - F - k\Delta\xi}{k[1 - \gamma \operatorname{sgn}(Sp_0 \cos(\omega t) - F - k\Delta\xi)]} + \Delta\xi$$

Детектирование колебаний заключается в выделении изменения постоянной составляющей преобразованного сигнала при изменении амплитуды воздействия. Если амплитуда воздей-

ствия изменяется от нуля до p_0 , а сигнал периодический,

$$\bar{\xi} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \xi(p_0) dt - \xi(0)$$

Изменение усредненного положения мембраны вызовет соответствующее изменение давления p_s в ограничиваемом ею воздушном объеме V . Если это изменение мало по сравнению с возбуждающим давлением, то $p_s = \bar{\xi}S/V$. Рассчитанные по этому выражению графики приведены на рис. 10. Сравнение рисунков 9 и 10 позволяет отметить качественное совпадение рассчитанной и экспериментальной зависимостей.

В заключение отметим, что проведенное исследование не претендует на полноту. Достаточно заметить, что здесь не рассмотрены явления, происходящие при движении мембраны с односторонним ограничением. Авторы полагают, что значение представленных результатов определяется тем, что сами понятия “бимодульный элемент” и “модульная нелинейность” переведены из разряда удобных математических моделей в область экспериментальных исследований с выходом в приложения.

Исследования авторов поддержаны грантом РФФИ № 15-02-04306 (С.Г. Михайлов) и грантом РНФ № 14-22-00042 (О.В. Руденко).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В. Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // Успехи физ. наук. 2006. Т. 176. № 1. С. 77–95.
2. Руденко О.В. Нелинейный экран как элемент систем для звукопоглощения и преобразования частоты // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 1. С. 38–43.
3. Михайлов С.Г., Руденко О.В. Простой нелинейный элемент // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 3. С. 246–250.
4. Руденко О.В. Линеаризуемое уравнение для волн в диссипативных средах с модульной, квадратичной и квадратично-кубичной нелинейностями // ДАН. 2016. Т. 471. № 1. С. 23–27.
5. Назаров В.Е., Кияшко С.Б., Радостин А.В. Волновые процессы в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59. № 3. С. 275–285.
6. Radostin A.V., Nazarov V.E., Kiyashko S.B. Propagation of nonlinear acoustic waves in bimodular media with linear dissipation // Wave Motion. 2013. V. 50. № 2. P. 191–196.
7. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах: Нелинейности порогового типа. М.: Наука, 1985.