

УДК 534.2

НЕЛИНЕЙНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ В АКУСТИЧЕСКИ ВОЗБУЖДЕННОЙ ЖИДКОЙ КАПЛЕ

© 2018 г. О. А. Сапожников^{a, b}, Е. А. Анненкова^{a, *}

^aМосковский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет
119991 ГСП-1, Москва, Ленинские горы

^bЦентр промышленного и медицинского ультразвука, Лаборатория прикладной физики,
университет штата Вашингтон, WA 98105 Сиэтл, США

*e-mail: a-a-annenkova@yandex.ru

Поступила в редакцию 14.09.2017 г.

Проанализирован процесс нелинейной эволюции стоячей акустической волны в сферическом резонаторе с абсолютно мягкой поверхностью. В рамках квадратичного приближения нелинейной акустики проведен анализ колебаний в резонаторе методами медленного изменения амплитуд гармоник и медленного изменения профиля стоячей волны. Продемонстрировано, что нелинейные эффекты могут приводить к существенному усилению пикового давления в центре резонатора. Разработанная теоретическая модель применена для анализа акустического поля в каплях жидкости, образующихся в акустическом фонтане. Показано, что в результате нелинейной эволюции пиковое отрицательное давление может превысить порог механической прочности жидкости, что может служить объяснением наблюдаемой в экспериментах взрывной неустойчивости капель.

Ключевые слова: нелинейные сферические волны, стоячие волны, генерация гармоник, резонатор, акустический фонтан

DOI: 10.7868/S0320791918030140

1. ВВЕДЕНИЕ

Стоячие акустические волны конечной амплитуды привлекают внимание исследователей в связи с возможностью получения заметных нелинейных эффектов в небольших областях, занятых газом или жидкостью. Большинство исследований было посвящено изучению плоских волн в закрытых участках прямых труб постоянного сечения [1–9]. При теоретическом описании в указанных работах акустическое поле представлялось в виде двух невзаимодействующих встречных плоских волн римановского типа и особое внимание уделялось режимам с образованием разрывных (ударных) волновых профилей. Как правило, в упомянутых работах волновой процесс рассматривался в газовой среде, поэтому стенки резонатора считались жесткими. Это создавало благоприятные условия для проявления акустической нелинейности, поскольку при отражении от зеркал резонатора волна не меняла своей формы и при дальнейшем встречном распространении продолжала испытывать нелинейные искажения. В связи с исследованиями возможности получения интенсивных стоячих волн с профилями без разрывов в ряде публикаций рассматривались также стоячие волны в трубах с изменяющимся сечением [10–12] и в резонаторах с кон-

центрическими сферическими и цилиндрическими стенками [13–15].

В настоящей работе рассматривается случай нелинейного акустического резонатора, принципиально отличающегося от устройств, рассмотренных в предшествующих работах. В качестве резонатора рассматривается жидкая сфера с абсолютно мягкой границей. В начальный момент сфера предполагается акустически возбужденной на своем основном или другом низкочастотном резонансе. Анализируется процесс эволюции сферически симметричного звукового поля. Предполагается, что никаких внешних источников нет, т.е. исследуется процесс затухания свободных колебаний.

Внимание авторов к задаче в такой постановке было привлечено в связи с наблюдениями поведения капель жидкости в процессе развития акустического фонтана — акусто-гидродинамического явления, нашедшего применение, например, в ультразвуковых увлажнителях воздуха и ингаляторах. Скоростная съемка акустических фонтанов показала, что через некоторое время после включения источника ультразвука из жидкости вырывается струя, распадающаяся на цепочку из капель одинакового размера [16]. Через некоторое время капли, обычно начиная с самой

верхней, начинают по невыясненной пока причине терять устойчивость и взрываться, приводя к распылению жидкости. Проведенные недавно экспериментальные исследования поведения капль в акустическом фонтане позволили выявить, что непосредственно перед потерей устойчивости в центре прозрачной капли появляется темная точка [17, 18], что указывает на возможный разрыв жидкости, т.е. возникновение кавитации. Поскольку начальный уровень акустического давления в капле, по оценкам, намного ниже порога кавитации, можно предположить, что в процессе нелинейных колебаний возбужденной капли происходит концентрация акустической энергии в ее центре. Эта возможность анализируется в настоящей работе.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭВОЛЮЦИИ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВНУТРИ ВОЗБУЖДЕННОЙ КАПЛИ

2.1. Исходные уравнения

В отличие от традиционно исследуемого случая плоских волн, для описания нелинейных акустических полей в условиях сферической симметрии не существует решений, имеющих вид суперпозиции встречных волн (инвариантов Римана). Поэтому здесь не применим подход, при котором решение ищется в виде переотражающейся от границ резонатора нелинейной волны с профилем, медленно изменяющимся по мере распространения. Возможно, однако, альтернативное описание, при котором акустическое поле рассматривается в форме стоячей волны, структура которой мало меняется от периода к периоду. Для анализа закономерностей нелинейного волнового процесса требуется в явном виде отделить быстрые изменения от медленных. В настоящей работе с этой целью используется базис из слабо взаимодействующих стоячих волн различных частот.

Будем исходить из общего вида волнового уравнения для потенциала колебательной скорости φ акустического поля в жидкости или газе при учете квадратично-нелинейных членов. Оно было получено в работе [19] и часто называется уравнением Кузнецова [8, 20]:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{b}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta\varphi) + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\beta - 1}{c_0^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + (\nabla\varphi)^2 \right]. \quad (1)$$

Здесь c_0 – скорость звука, ρ_0 – равновесная плотность среды, $b = \zeta + 4\eta/3$ – диссипативный коэффициент, ζ и η – коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости, β – параметр акустической нелинейности среды. Потенциал φ позволяет

полностью охарактеризовать акустическое поле. В частности, колебательная скорость \mathbf{v} и акустическое давление p выражаются через потенциал следующим образом:

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi, \quad (2)$$

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\rho_0}{2} (\nabla\varphi)^2. \quad (3)$$

Для описания нелинейного поля в акустически возбужденной капле жидкости будем рассматривать сферически-симметричное решение уравнения (1) в сферическом объеме с акустически мягкой границей. Пусть r – расстояние от центра капли, a – ее радиус в невозбужденном состоянии. Обозначим значение потенциала на невозмущенной поверхности капли как $\Phi_0(t) = \varphi(a, t)$ и рассмотрим функцию $\tilde{\varphi} = \varphi - \Phi_0$. На поверхности $r = a$ имеем $\tilde{\varphi} = 0$. Кроме того, при $r = 0$ выполняется условие $\partial \tilde{\varphi} / \partial r = \partial \varphi / \partial r = 0$, поскольку в силу симметрии жидкость в центре капли неподвижна. При указанных граничных условиях функция $\tilde{\varphi}(r, t)$ на интервале $0 \leq r \leq a$ может быть разложена по базису из функций $\sin(k_n r) / (k_n r)$, где $k_n = \pi n / a$. Каждая из этих функций описывает стоячую волну. Указанный базис является полным и ортогональным, если под скалярным произведением двух базисных функций понимать интеграл по объему капли от их произведения. Таким образом, в общем случае потенциал колебательной скорости может быть представлен в виде суперпозиции стоячих волн вида

$$\varphi = \Phi_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) \frac{\sin(k_n r)}{k_n r}, \quad (4)$$

где Φ_n – весовые коэффициенты, зависящие только от времени. Отметим, что функция $\Phi_0(t)$ не является независимой: она может быть выражена через остальные весовые коэффициенты Φ_n в силу равенства нулю акустического давления на границе капли (см. ниже). В процессе колебаний эта граница движется, поэтому при решении задачи в нелинейной постановке нужно учитывать, что акустическое давление равно нулю при $r = a + \xi(t)$, где ξ – смещение поверхности. Из условия $p(a + \xi, t) = 0$ в квадратичном приближении следует $p(a, t) + \xi \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \approx 0$, откуда с учетом уравнения движения получаем граничное условие $(p - \rho_0 \xi \frac{\partial v}{\partial t}) \Big|_{r=a} \approx 0$, где $v = \partial \varphi / \partial r$ – радиальная компонента колебательной скорости.

Заметим, что $v(a, t) = d\xi/dt$, поэтому из формул (2)–(4) получим в квадратичном приближении

$$\frac{d\Phi_0}{dt} \approx -\frac{1}{2a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \left(\Phi_m \Phi_n + 2\Pi_m \frac{d\Phi_n}{dt} \right), \quad (5)$$

где $\Pi_m(t)$ – первообразная функции $\Phi_m(t)$.

2.2. Решение задачи методом медленно изменяющихся амплитуд

Подставим разложение (4) в уравнение (1) и, учитывая (5), отбросим слагаемые 3-го и более высоких порядков малости:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi_0}{dt^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2\Phi_n}{dt^2} + \frac{bk_n^2}{\rho_0} \frac{d\Phi_n}{dt} + k_n^2 c_0^2 \Phi_n \right) \frac{\sin(k_n r)}{k_n r} = \\ = -\frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{\beta - 1}{c_0^2} \frac{d\Phi_m}{dt} \frac{d\Phi_l}{dt} \frac{\sin(k_m r)}{k_m r} \frac{\sin(k_l r)}{k_l r} \right. \\ \left. + \Phi_m \Phi_l \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\sin(k_m r)}{k_m r} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\sin(k_l r)}{k_l r} \right] \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Домножим обе части этого равенства на функцию $2k_m r \sin(k_m r)/a$ и проинтегрируем по радиальной координате от 0 до a . Используя условие ортогональности $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \sin(mx) \sin(nx) = \delta_{mn}$, выражение (5) и тригонометрические тождества, в результате громоздких, но несложных преобразований получим систему связанных уравнений для коэффициентов Φ_n :

$$\frac{d^2\Phi_n}{dt^2} + 2\delta_n \frac{d\Phi_n}{dt} + \omega_n^2 \Phi_n = \frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \Psi_{nml}. \quad (7)$$

Здесь коэффициенты $\omega_n = k_n c_0$ имеют смысл резонансных частот, а $\delta_n = b\omega_n^2 / (2\rho_0 c_0^2)$ – декрементов затухания мод. Кроме того, для записи правой части введено обозначение

$$\begin{aligned} \Psi_{nml} = -(-1)^{n+m+l} \frac{1}{a^2} \left(\Phi_m \Phi_l + 2\Pi_m \frac{d\Phi_l}{dt} \right) + \\ + \frac{n}{2\pi ml} (S_{n+m+l} - S_{n+m-l} - S_{n-m+l} + S_{n-m-l}) \times \\ \times \left[\frac{\beta - 1}{c_0^2} \frac{d\Phi_m}{dt} \frac{d\Phi_l}{dt} - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \Phi_m \Phi_l \frac{n^2 - m^2 - l^2}{2} \right], \quad (8) \end{aligned}$$

где коэффициенты S_n являются дискретными значениями интегрального синуса:

$$S_n = \text{Si}(\pi n) = \int_0^{\pi} dx \frac{\sin(nx)}{x} = \int_0^{\pi n} dx \frac{\sin x}{x}. \quad (9)$$

Как видно, каждое уравнение системы (7) имеет форму уравнения классического осциллятора с

правой частью, описывающей квадратично нелинейный, т.е. слабый источник.

Решение может быть проанализировано с использованием метода медленно изменяющихся амплитуд. В идеальной линейной среде решения уравнений (7) имеют вид гармонических колебаний с постоянной амплитудой:

$$\Phi_n = \frac{C_n}{2} e^{-i\omega_n t} + \frac{C_n^*}{2} e^{i\omega_n t}. \quad (10)$$

Влияние диссипации и нелинейности приводит к тому, что амплитуды C_n медленно изменяются во времени. При этом с точностью до членов второго порядка малости производная потенциала на границе капли может быть записана в следующем виде:

$$\frac{d\Phi_0}{dt} \approx \frac{1}{4a^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n C_n^* + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D_n}{2} e^{-i\omega_n t} + \frac{D_n^*}{2} e^{i\omega_n t} \right) \right],$$

где амплитуды гармонических составляющих D_n выражаются через C_n следующим образом:

$$\begin{aligned} D_n = (-1)^n \left\{ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^2 + m^2 + mn}{m(n+m)} C_m^* C_{m+n} - \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{n+m}{n-m} C_{n-m} C_m \right\}. \end{aligned}$$

Отбрасывая малые члены, связанные с производными по времени от медленно изменяющихся величин, из (7) получим систему укороченных уравнений для комплексных амплитуд C_n :

$$\begin{aligned} \frac{dC_n}{dt} + \delta_n C_n = -\frac{1}{4a^2} \left\{ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{n^2 + m^2 + mn}{m(n+m)} + \frac{n\beta\pi}{2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (S_{2n} + S_{2m} - S_{2m+2n}) \right] C_m^* C_{m+n} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{n-1} \left[\frac{n+m}{n-m} + \frac{n\beta\pi}{2} (S_{2n} - S_{2m} - S_{2n-2m}) \right] C_{n-m} C_m \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Примечательно, что нелинейные эффекты определяются параметром акустической нелинейности среды β не в полной мере: первые слагаемые в обеих квадратных скобках от этого параметра не зависят. Эти члены учитывают тот факт, что в нелинейном случае потенциал на границе капли имеет малое ненулевое значение.

Отметим, однако, что в практически интересных случаях вторые слагаемые в квадратных скобках правой части (11) намного превышают соответствующие первые слагаемые. Так, для воды ($\beta \approx 3.5$) вторые слагаемые по величине больше первых в несколько раз даже при $n = 1$, а при больших n разница становится еще более существенной. Поэтому достаточно хорошим прибли-

жением может служить запись уравнений в пре-
небрежении указанных малых членов:

$$\frac{dC_n}{dt} + \delta_n C_n = -\frac{n\pi\beta}{8a^2} \left\{ \begin{aligned} & 2 \sum_{m=1}^{\infty} C_m^* C_{n+m} \times [S_{2n} + S_{2m} - S_{2(n+m)}] + \\ & + \sum_{m=1}^{n-1} C_m C_{n-m} [S_{2n} - S_{2m} - S_{2(n-m)}] \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Сделанное приближение соответствует зануле-
нию величины Φ_0 в разложении (4). При этом, со-
гласно (4) и (10),

$$\varphi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_n}{2} e^{-i\omega_n t} + \frac{C_n^*}{2} e^{i\omega_n t} \right) \frac{\sin(k_n r)}{k_n r}. \quad (13)$$

Важным критерием правильности описания
может служить проверка закона сохранения
энергии. Полная акустическая энергия в капле
может быть выражена в виде следующей суммы:

$$E = \pi\rho_0 a \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2. \quad (14)$$

Отсюда следует $dE/dt = \pi\rho_0 a \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^* dC_n/dt + C_n dC_n^*/dt)$. Если использовать выражения для dC_n/dt из (11) или (12) и выполнить перегруппировку соответствующих двойных сумм, то можно полу-
чить $dE/dt = -\pi\rho_0 a \sum_{n=1}^{\infty} 2\delta_n |C_n|^2$. Следовательно, при наличии вязкости энергия убывает, а при $\delta_n \rightarrow 0$ остается постоянной (см. также рис. 5). Та-
ким образом, и система (11), и ее приближенная версия (12) при отсутствии вязкости удовлетво-
ряют закону сохранения энергии.

2.3. Решение задачи методом медленно изменяющегося профиля

Сферические стоячие волны в капле можно
представить в виде суперпозиции двух бегущих
волн – сходящейся и расходящейся, и даже про-
ще – в виде одной волны, которая периодически
отражается от поверхности капли и является по-
переменно то расходящейся, то сходящейся. При
таким представлении изменение акустического
поля в капле под воздействием диссипации и не-
линейности среды может быть проанализировано
в виде медленной эволюции профиля указанной
сходящейся-расходящейся волны. Под медлен-
ной эволюцией здесь имеется в виду не поведение
формы волны при ее распространении в про-
странстве (пространственная неоднородность
акустического поля в капле существенна), а ма-
лое изменение периодического повторяющегося

временного профиля акустического давления в
каждой пространственной точке при последова-
тельном переходе во времени от периода к периоду.

Представим искомое решение для потенциала
в виде

$$\varphi(r, t) = \frac{F(r, t)}{r}. \quad (15)$$

Из уравнения (1) для $F(r, t)$ получается клас-
сическое одномерное уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = q. \quad (16)$$

Здесь правая часть описывает источники, обу-
словленные нелинейно-диссипативными про-
цессами:

$$q = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\frac{b}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{rc_0^2} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\beta-1}{c_0^2} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{F}{r} \right)^2 \right] \right\}. \quad (17)$$

Функция $F(r, t)$ рассматривается на интервале
 $0 \leq r \leq a$. Из конечности потенциала φ в центре
капли и из обсужденного выше приближенного
условия равенства нулю потенциала на поверхно-
сти капли вытекают нулевые граничные условия
на обоих концах интервала:

$$F(0, t) = F(a, t) = 0. \quad (18)$$

Решение волнового уравнения с нулевой пра-
вой частью имеет вид переотражающейся от гра-
ниц интервала волны вида $F(r, t) = \psi(t - r/c_0) -$
 $-\psi(t + r/c_0)$, где функция $\psi(t)$ описывает про-
филь волны. После добавления малой правой части
указанная структура решения сохранится, но в
процессе многих переотражений из-за влияния
слабых источников профиль $\psi(t)$ будет медленно
изменяться.

Выписанный выше вид $F(r, t)$ позволяет запи-
сать начальные условия ($t = 0$) для волновой
функции и ее производной по времени:

$$F(r, 0) = \psi(-r/c_0) - \psi(r/c_0), \quad (19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(r, 0) = \dot{\psi}(-r/c_0) - \dot{\psi}(r/c_0), \quad (20)$$

где точка обозначает производную по аргументу
функции. Решение одномерного волнового урав-
нения (16), как известно, выражается по формуле

Даламбера [21]. Для случая бесконечной прямой эта формула имеет вид

$$F(r, t) = \frac{F(r + c_0 t, 0) + F(r - c_0 t, 0)}{2} + \frac{1}{2c_0} \int_{r-c_0 t}^{r+c_0 t} \frac{\partial F}{\partial t}(r', 0) dr' - \frac{1}{2c_0^3} \int_0^t dt' \int_{r-c_0(t-t')}^{r+c_0(t-t')} q(r', t') dr'. \quad (21)$$

Если учесть начальные условия (19) и (20), то получим

$$F(r, t) = \Psi\left(t - \frac{r}{c_0}\right) - \Psi\left(t + \frac{r}{c_0}\right) + F_q(r, t), \quad (22)$$

где дополнительное возмущение F_q , порождаемое источниками, в явном виде выражается через плотность источников q :

$$F_q(r, t) = -\frac{c_0}{2} \int_0^t dt' \int_{r-c_0(t-t')}^{r+c_0(t-t')} q(r', t') dr'. \quad (23)$$

Первые два слагаемых в решении (22) описывают переотражающуюся от концов отрезка волну, которая присутствовала изначально, а последнее слагаемое отвечает за волну, возбужденную источником q . Здесь $q(r, t)$ имеет носитель $[0, a]$, т.е. вне этого интервала $q = 0$. Если теперь решать задачу на отрезке с граничными условиями (18), то $F_q(0, t) = F_q(a, t) = 0$ и, следуя методу отражений, вместо $q(r, t)$ нужно задать источники $\hat{q}(r, t)$, являющиеся периодическим продолжением с периодом $2a$ следующего вида:

$$\hat{q}(r, t) = \begin{cases} \dots \\ q(r + 2a, t), & -2a \leq r \leq -a \\ -q(-r, t), & -a \leq r \leq 0 \\ q(r, t), & 0 \leq r \leq a \\ -q(-r + 2a, t), & a \leq r \leq 2a \\ \dots \end{cases}. \quad (24)$$

Рассмотрим соответствующее решение в центре капли, т.е. $\varphi_q(t) = \lim_{r \rightarrow 0} (F_q(r, t)/r)$. Из (23) и (24) можно получить

$$\varphi_q(t) = \frac{1}{2} \int_{-c_0 t}^0 dr' \hat{q}\left(r', t + \frac{r'}{c_0}\right) - \frac{1}{2} \int_0^{c_0 t} dr' \hat{q}\left(r', t - \frac{r'}{c_0}\right). \quad (25)$$

Изменение на одном периоде с учетом периодичности \hat{q} получается таким:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_q(t) &= \varphi_q\left(t + \frac{2a}{c_0}\right) - \varphi_q(t) = \\ &= -\int_0^a dr' \left[q\left(r', t - \frac{r'}{c_0}\right) - q\left(r', t + \frac{r'}{c_0}\right) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть $\varphi_0(\tau, t)$ – потенциал в центре капли, где введен аргумент τ , отслеживающий медленное изменение профиля волны. В качестве величины τ выберем время, которое изменяется дискретно с шагом, равным периоду $\delta\tau = 2a/c_0$. Поскольку профиль за время, равное одному периоду, изменяется слабо, можно перейти к непрерывному “медленному” времени τ и приблизить производную конечной разностью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_0(\tau, t)}{\partial\tau} &\approx \frac{\delta\varphi_q(t)}{\delta\tau} = \\ &= -\frac{c_0}{2a} \int_0^a dr' \left[q\left(r', t - \frac{r'}{c_0}\right) - q\left(r', t + \frac{r'}{c_0}\right) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя в правую часть (27) выражение для q (см. (17)) и учитывая, что $F(\tau, r, t) = \Psi(\tau, t - r/c_0) - \Psi(\tau, t + r/c_0)$, после ряда преобразований получим следующее нелинейное эволюционное уравнение для описания потенциала в центре капли:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_0(\tau, t)}{\partial\tau} - \frac{b}{2\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2\varphi_0(\tau, t)}{\partial t^2} = \\ = -\frac{\beta}{8ac_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^a \frac{dr'}{r'} \left[\varphi_0\left(\tau, t - \frac{2r'}{c_0}\right) - \varphi_0\left(\tau, t + \frac{2r'}{c_0}\right) \right] \times \\ \times \left[\varphi_0\left(\tau, t - \frac{2r'}{c_0}\right) + \varphi_0\left(\tau, t + \frac{2r'}{c_0}\right) - 2\varphi_0(\tau, t) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Отметим, что потенциал вне центра $\varphi(\tau, r, t) = [\Psi(\tau, t - r/c_0) - \Psi(\tau, t + r/c_0)]/r$ выражается через потенциал в центре, поскольку $\varphi_0(\tau, t) = -(2/c_0) \partial\Psi(\tau, t)/\partial t$. Таким образом, функциональное уравнение (28) описывает нелинейно-диссипативную эволюцию акустического поля в капле, т.е. позволяет полностью решить рассматриваемую задачу.

Согласно (13),

$$\varphi_0(\tau, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n(\tau) e^{-i\omega_n t} + C_n^*(\tau) e^{i\omega_n t}}{2}. \quad (29)$$

В отличие от предыдущего раздела, здесь аргумент C_n обозначен буквой τ (вместо t), чтобы отличить медленное изменение от быстрого. Если подставить разложение (29) в уравнение (28), то для медленно изменяющихся амплитуд мод $C_n(\tau)$ получатся уравнения (12). Таким образом, два рассмотренных способа описания – метод медленно меняющихся амплитуд и метод медленно меняющегося профиля – находятся в полном соответствии друг с другом.

2.4. Связь уравнения для динамики акустического поля в капле с уравнением Бюргерса

При анализе системы укороченных уравнений (11) и связанного с ним функционального уравнения (28) удобно использовать безразмерные переменные. Пусть P_0 – амплитуда акустического давления в капле, исходно возбужденной на своей нижней резонансной частоте $\omega_0 = c_0\pi/a$, так что акустическое давление в капле $p(r,t) = P_0 \sin \omega_0 t \text{sinc}(\omega_0 r/c_0)$. Введем характерные времена проявления нелинейных и диссипативных эффектов:

$$\tau_{nl} = 4\rho_0 c_0^2 / (\beta \omega_0 P_0), \quad (30)$$

$$\tau_{diss} = 2\rho_0 c_0^2 / (b \omega_0^2), \quad (31)$$

а также безразмерный параметр, характеризующий конкуренцию указанных явлений:

$$\Gamma = \tau_{nl} / \tau_{diss}. \quad (32)$$

Обозначим также для краткости

$$g_{nm} = \frac{2}{\pi} (S_{2n} + S_{2m} - S_{2m+2n}), \quad (33)$$

$$a_{nm} = \frac{4}{\pi^2 \beta} \frac{n^2 + m^2 + mn}{mn(n+m)}, \quad (34)$$

$$b_{nm} = \frac{4}{\pi^2 \beta} \frac{n+m}{(n-m)n}. \quad (35)$$

Будем нормировать медленное время на нелинейный временной масштаб: $z = \tau / \tau_{nl}$. Используя характерное амплитудное значение для потенциала $C_0 = P_0 / (\omega_0 \rho_0)$, введем безразмерные амплитуды гармоник $\bar{C}_n = C_n / C_0$. Тогда система укороченных уравнений (11) примет следующий вид:

$$\frac{d\bar{C}_n}{dz} + \Gamma n^2 \bar{C}_n = -\frac{n}{4} \left\{ 2 \sum_{m=1}^{\infty} (g_{nm} - a_{nm}) \bar{C}_m^* \bar{C}_{m+n} - \sum_{m=1}^{n-1} (g_{n-m,m} - b_{nm}) \bar{C}_{n-m} \bar{C}_m \right\}. \quad (36)$$

Ее нужно решать при следующих начальных условиях:

$$\bar{C}_1(0) = 1, \quad \bar{C}_{n>1}(0) = 0.$$

Заметим, что аргумент интегрального синуса (9) в коэффициентах $S_n = \text{Si}(\pi n)$ всегда больше единицы. С учетом этого обстоятельства можно использовать приближение $S_n \approx \pi/2$, т.е. $g_{nm} \approx 1$. Если к тому же пренебречь малыми коэф-

фициентами a_{nm} и b_{nm} , что соответствует переходу от (11) к (12), то из (36) получим

$$\frac{d\bar{C}_n}{dz} + \Gamma n^2 \bar{C}_n = -\frac{n}{4} \left\{ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \bar{C}_m^* \bar{C}_{m+n} - \sum_{m=1}^{n-1} \bar{C}_{n-m} \bar{C}_m \right\}. \quad (37)$$

Введя вспомогательные величины $B_n = i\bar{C}_n$, перепишем (37) в следующем виде:

$$\frac{dB_n}{dz} + \Gamma n^2 B_n = -\frac{in}{4} \left\{ 2 \sum_{m=1}^{\infty} B_m^* B_{m+n} + \sum_{m=1}^{n-1} B_{n-m} B_m \right\}. \quad (38)$$

Нетрудно видеть, что система уравнений (38) является не чем иным, как системой уравнений для гармоник нелинейной плоской волны, описываемой уравнением Бюргерса [22]:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}, \quad (39)$$

$$V(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B_n}{2} e^{-in\theta} + \frac{B_n^*}{2} e^{in\theta} \right). \quad (40)$$

Здесь $\theta = \omega_0 t$ – безразмерное “быстрое время”, а функция $V(z, \theta)$ описывает профиль волны. Заметим, что запись $B_n = i\bar{C}_n$ означает, что функции $V(z, \theta)$ и $U(z, \theta) = \Phi_0(\tau, t) / C_0$ связаны друг с другом посредством преобразования Гильберта:

$$U(z, \theta) = -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(z, \theta')}{\theta - \theta'} d\theta'. \quad (41)$$

Благодаря такой связи многие известные периодические решения уравнения Бюргерса (39) могут быть использованы для построения приближенных решений при описании акустического поля в капле.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В КАПЛЕ, ИСХОДНО ВОЗБУЖДЕННОЙ НА ОСНОВНОМ РЕЗОНАНСЕ

3.1. Спектр и временной профиль акустического давления в центре капли

Спектральные амплитуды потенциала в центре капли описываются бесконечной системой связанных уравнений (11). При численном интегрировании количество удерживаемых гармоник приходится ограничивать. Чтобы обрывание спектра пренебрежимо мало влияло на точность расчетов, количество гармоник N нужно выбирать достаточно большим, чтобы амплитуды старших гармоник были хорошо подавлены диссипативными процессами. Разумная оценка следует из решения уравнения Бюргерса (39) в виде ряда Фейя [22]: $N = 2/\Gamma$. На практике для уточнения указанной оценки число гармоник увеличивалось до тех пор, пока результаты расчетов не переставали от него зависеть. Вычисления проводились методом

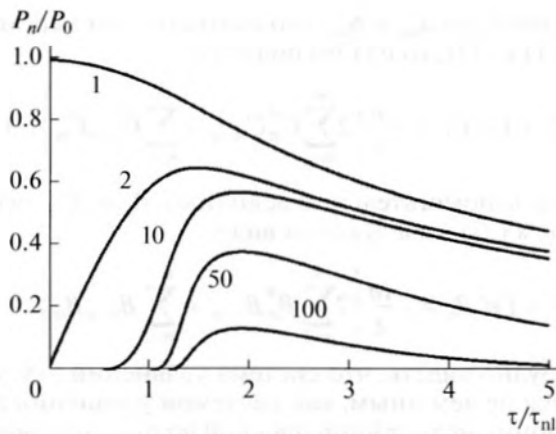


Рис. 1. Зависимость амплитуд некоторых гармоник акустического давления в центре сферического резонатора от времени при $\Gamma = 0.01$. Амплитуды нормированы на исходную амплитуду давления P_0 , а время — на характерный нелинейный масштаб τ_{nl} . Номера гармоник приведены около соответствующих кривых.

конечных разностей на языке Фортран с использованием метода Рунге–Кутты 4-го порядка.

Практический интерес представляет не потенциал ϕ , а акустическое давление в центре капли.

Соответствующая связь в линейном приближении имеет вид $p = -\rho_0 \partial \phi / \partial t$, откуда следует связь амплитуд гармоник давления и потенциала: $P_n = i\omega_n C_n$. Удобно нормировать амплитуды гармоник давления на исходную амплитуду первой гармоники P_0 , т.е. ввести $\bar{P}_n = P_n / P_0 = i n \bar{C}_n$.

На рис. 1 для случая $\Gamma = 0.01$ показаны результаты расчета амплитуд $|\bar{P}_n|$ некоторых гармоник в зависимости от безразмерного медленного времени z . Здесь и ниже считается, что $\beta = 3.52$ (вода). Видно, что активный рост высших гармоник начинается при $z \approx 1.2$. При дальнейшем увеличении времени z амплитуды разных гармоник в результате взаимодействия становятся близкими по величине, а затем спадают из-за вязкого поглощения.

Амплитуды гармоник позволяют рассчитать и профиль акустического давления в центре капли. На рис. 2 для случая $\Gamma = 0.01$ показаны нормированные профили давления на одном периоде колебаний. Исходный синусоидальный профиль заметно искажается, причем пиковые отрицательное и положительное давления (они равны по величине) растут, а форма волны на одном периоде приобретает вид короткого биполярного импульса. Расчеты показывают, что пиковое давле-

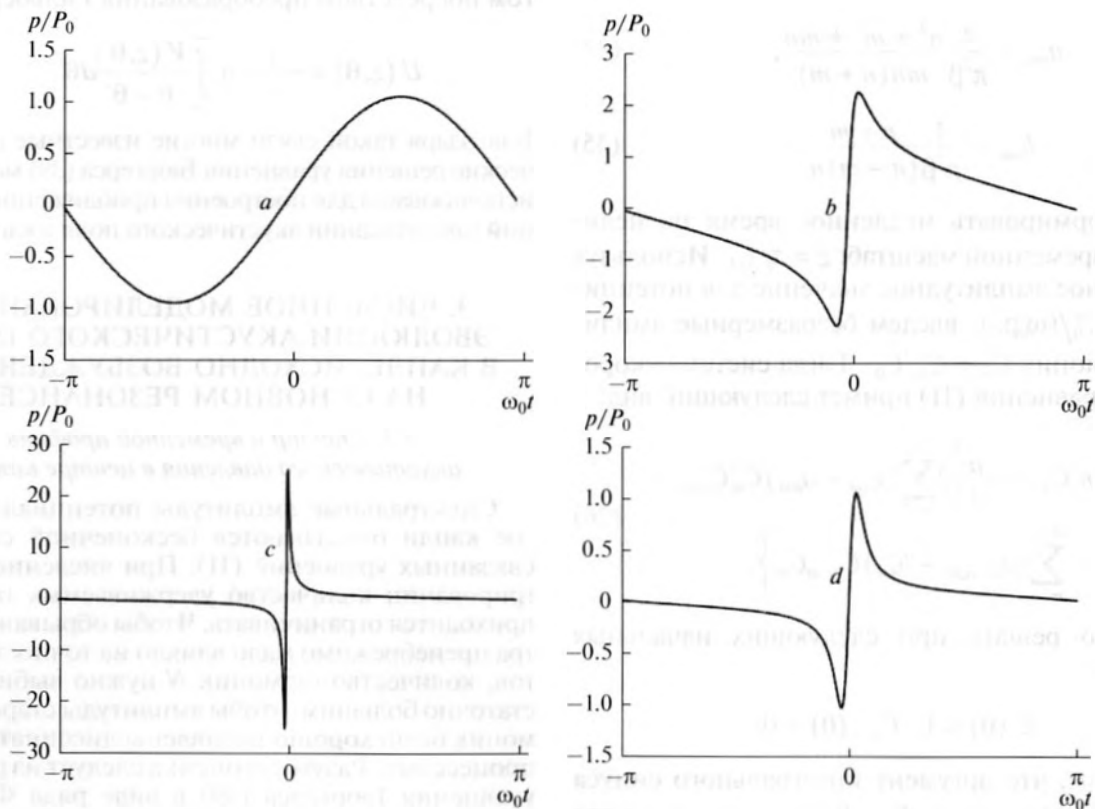


Рис. 2. Временной профиль одного периода акустического давления в центре сферического резонатора при $\Gamma = 0.01$ в разные моменты “медленного” времени τ . Давление p нормировано на исходную амплитуду P_0 . Кривые a, b, c, d соответствуют $\tau/\tau_{nl} = 0, 1, 2, 20$.

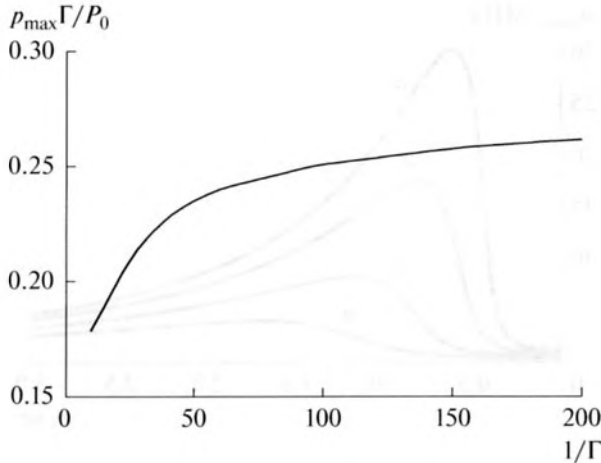


Рис. 3. Зависимость приведенного максимального пикового давления $p_{\max} \Gamma / P_0$ от величины $1/\Gamma$.

ние в зависимости от медленного времени имеет характерное поведение: сначала оно под влиянием нелинейности растет, через некоторое время достигает своего максимума p_{\max} , а далее спадает из-за вязкого поглощения.

Величина наибольшего пикового давления p_{\max} , достигаемого в центре капли, зависит от параметра Γ . На рис. 3 приведены результаты расчета величины $p_{\max} \Gamma / P_0$ в зависимости от величины $\Gamma^{-1} \sim P_0$. Видно, что после небольшого роста при $1/\Gamma \gg 1$ кривая насыщается, что позволяет сделать вывод о том, что коэффициент усиления хорошо аппроксимируется следующей простой зависимостью:

$$\frac{p_{\max}}{P_0} \approx \frac{1}{4\Gamma}. \quad (42)$$

Отсюда следует, что максимальное пиковое давление, достигаемое в центре капли в процессе ее колебаний, квадратично зависит от исходной амплитуды: $p_{\max} \approx P_0^2 \beta / (8b\omega_0)$.

3.2. Характеристики акустического поля в объеме капли

Выше при описании волнового процесса в капле методом медленно изменяющегося профиля было показано, что если ввести вспомогательную функцию $\psi(\tau, t)$ на основе равенства $\phi_0(\tau, t) = -(2/c_0) \partial \psi(\tau, t) / \partial t$, то пространственно-временной профиль потенциала колебательной скорости в капле может быть представлен в виде $\phi(\tau, r, t) = [\psi(\tau, t - r/c_0) - \psi(\tau, t + r/c_0)]/r$. На практике интерес представляет профиль акустического давления. Используя линейную

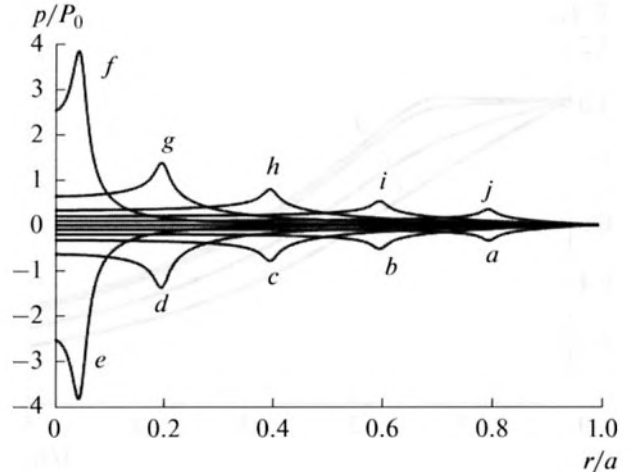


Рис. 4. Зависимость нормированного акустического давления в капле от радиальной координаты r в последовательные моменты “быстрого” времени t при $\Gamma = 0.01$ и нормированном “медленном” времени $\tau/\tau_{nl} = 5$. Различные волновые профили соответствуют нормированным моментам времени $\omega_0 t / \pi$, равным -0.8 (a), -0.6 (b), -0.4 (c), -0.2 (d), -0.05 (e), 0.05 (f), 0.2 (g), 0.4 (h), 0.6 (i), 0.8 (j). Дважды за период, при $t = 0$ и $\omega_0 t / \pi = 1$, давление в капле зануляется.

связь давления с потенциалом $p = -\rho_0 \partial \phi / \partial t$, получим

$$p(\tau, r, t) = \frac{\rho_0 c_0}{2} \frac{\Phi_0(\tau, t - r/c_0) - \Phi_0(\tau, t + r/c_0)}{r}. \quad (43)$$

Таким образом, задача построения акустического поля во всем объеме капли сводится к описанной выше задаче расчета потенциала в центре капли. На рис. 4 приведены пространственные профили акустического давления в различные моменты быстрого времени при значении безразмерного медленного времени $\tau = 5$ в случае $\Gamma = 0.01$.

В отличие от случая линейного возбуждения капли на основной частоте, когда распределение давления в стоячей волне на интервале $0 \leq r/a \leq 1$ все время имеет вид косинусоиды, в нелинейном случае четко выделяется импульс с острой вершиной, который распространяется попеременно вправо и влево, отражаясь от границ интервала. При этом при отражении от обоих краев происходит инвертирование формы волны, а при подходе к центру капли $r = 0$ к тому же происходит заметное усиление пикового давления, обусловленное фокусировкой импульсной сферической волны. Отметим, что в отличие от поведения профиля акустической плоской волны конечной амплитуды, когда начальный синусоидальный профиль по мере распространения превращается в пилообразный с ударными фронтами, нелинейное искажение волны в капле проявляется в виде появления излома профиля на острой вершине импульса.

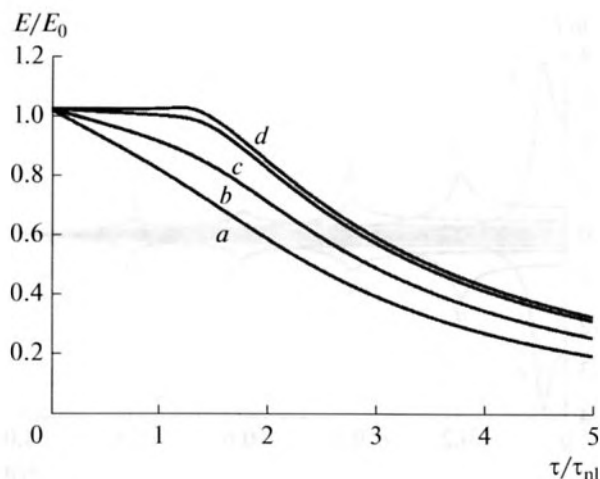


Рис. 5. Акустическая энергия в капле E , нормированная на свое исходное значение E_0 , в зависимости от нормированного медленного времени τ/τ_{nl} при различных значениях параметра Γ : 0.1 (a), 0.05 (b), 0.01 (c), 0.001 (d).

Ранее отмечалось, что полная акустическая энергия в капле выражается в виде (14), т.е. при нормировке на исходное значение энергии E_0 получим $E/E_0 = \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{C}_n|^2$. На рис. 5 приведены зависимости этой величины от безразмерного медленного времени z для нескольких значений Γ . Видно, что на начальном этапе энергия меняется слабо, несмотря на генерацию гармоник. Спад начинается лишь при $z > 1$. Такое поведение энергии напоминает соответствующую зависимость для нелинейных плоских волн, описываемых уравнением Бюргерса.

3.3. Пример расчета акустического давления в капле акустического фонтана

Рассмотрим в заключение практический пример, связанный с проведенным ранее экспериментом по наблюдению капель в акустическом фонтане [18]. Будем считать диаметр капли равным $2a = 1.5$ мм, а параметры жидкости следующими: скорость звука $c_0 = 1500$ м/с, плотность $\rho_0 = 1000$ кг/м³, параметр акустической нелинейности $\beta = 3.52$, эффективный коэффициент вязкости $b = 3.9 \times 10^{-3}$ Па с (вода). Будем интересоваться режимами, при которых исходная амплитуда давления стоячей волны в центре капли P_0 имеет порядок одного мегапаскаля. Характерные масштабы (30) и (31) при этом $\tau_{nl} = 0.4$ мс (для $P_0 = 1$ МПа) и $\tau_{diss} = 29$ мс, что соответствует $\Gamma \approx 0.014$. Таким образом, нелинейные искажения заметны ($\Gamma \ll 1$) и развиваются за время порядка одной миллисекунды или меньше.

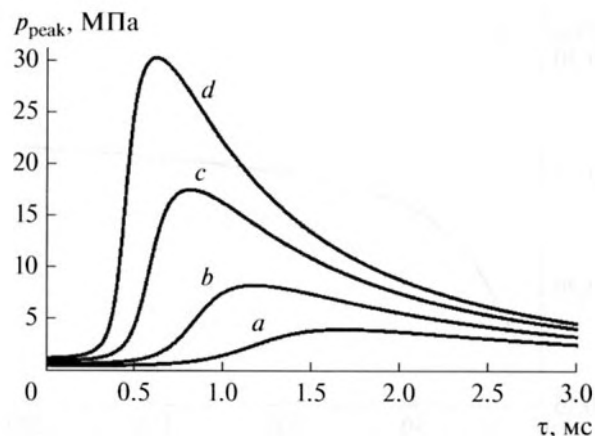


Рис. 6. Зависимость пикового давления p_{peak} от медленного времени τ (мс) в капле воды диаметром 1.5 мм при различных значениях исходной амплитуды давления P_0 (МПа): 0.5 (a), 0.7 (b), 1 (c), 1.3 (d).

На рис. 6 приведены зависимости размерного пикового давления p_{peak} от времени для нескольких значений исходной амплитуды давления в центре капли. Пиковое давление в центре капли сначала растет, достигает некоторого максимума, а потом начинает уменьшаться. Как видно, рост начинается раньше и максимальное пиковое давление p_{max} оказывается выше для более высоких начальных амплитуд давления. Этот факт отмечался выше (см. формулу (42)).

4. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Использованное в данной работе допущение о медленности изменения амплитуд гармоник и соответствующего профиля давления хорошо согласуется с результатами проведенного анализа. Действительно, при $\Gamma \ll 1$ характерные изменения амплитуд происходят на масштабе τ_{nl} . Из выражения (30) видно, что количество периодов колебаний акустического давления в капле за время τ_{nl} составляет $N = 2\rho_0 c_0^2 / (\pi\beta P_0) \gg 1$. Например, для капли воды при $P_0 = 1$ МПа указанная оценка дает $N \approx 400$, т.е. характерное изменение амплитуды происходит за несколько сотен периодов колебаний — действительно, очень медленно.

Из проведенного выше анализа видно, что эволюция нелинейной стоячей волны в сферическом жидком резонаторе с абсолютно мягкой границей имеет ряд ярко выраженных особенностей. В отличие от ранее рассмотренных случаев нелинейных акустических резонаторов с жесткими стенками, нелинейное искажение не приводит к образованию ударных (ступенчатых) участков (рис. 4). Физической причиной этой особенности поведения волн является инвертирование волны как при отражении от поверхности резонатора,

так и в результате превращения сходящейся волны в расходящуюся в центре резонатора. В то же время указанное инвертирование оказывается не в состоянии подавить нелинейные искажения: в рассмотренном резонаторе происходит эффективный процесс генерации гармоник (рис. 1). При этом в процессе нелинейной эволюции стоячая волна приобретает вид попеременно сходящегося и расходящегося импульса с острой вершиной, пиковое давление в котором вблизи центра резонатора может намного превышать исходную амплитуду волны (рис. 4). Наибольшее усиление пикового давления происходит в центре капли, где зависимость акустического давления от времени имеет вид периодической последовательности коротких биполярных импульсов. Согласно (41), такая форма волны с хорошим приближением является преобразованием Гильберта от формы производной пилообразной волны, описываемой уравнением Бюргера.

На практике в результате нелинейного усиления пиковое давление может вырасти существенно, в соответствии с оценкой (42). Так, для рассмотренного выше примера колебания капли акустического фонтана, при $P_0 = 1.3$ МПа за время $\tau \approx 0.6$ мс пиковое давление достигает значения $p_{\max} \approx 30$ МПа (рис. 6). Отрицательное акустическое давление такого уровня превышает максимально достижимый порог прочности воды [23, 24]. Это указывает на возможную роль рассмотренных нелинейных явлений в процессе развития неустойчивости капель акустического фонтана [18].

Отметим в заключение важную специфику нелинейной эволюции акустического поля в рассмотренном резонаторе: типичное для недиспергирующих волн перераспределение энергии в пределах спектра (между гармониками) в сферическом резонаторе приводит к перераспределению энергии и в пространстве. При этом, несмотря на общую убыль энергии, вблизи центра резонатора на определенном временном интервале может достигаться экстремально высокая концентрация энергии.

Работа поддержана грантами РФФИ № 17-02-00261-а и 17-54-33034-ОНКО-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Betchov R.* Nonlinear oscillations of a column of gas // *Physics of Fluids*. 1958. V. 1. № 3. P. 205–212.
2. *Горьков Л.П.* Нелинейные акустические колебания столба газа в закрытой трубе // *Инженерный журнал*. 1963. Т. 3. № 2. С. 246–250.
3. *Chester W.* Resonant oscillations in closed tubes // *J. Fluid Mech*. 1964. V. 18. № 1. P. 44–64.
4. *Островский Л.А.* О разрывных колебаниях в акустическом резонаторе // *Акуст. журн.* 1974. Т. 20. № 1. С. 140–142.
5. *Капер В.В., Руденко О.В., Хохлов Р.В.* К теории нелинейных колебаний в акустических резонаторах // *Акуст. журн.* 1977. Т. 23. № 5. С. 756–765.
6. *Руденко О.В., Хедберг К.М., Энфлю Б.О.* Нелинейные стоячие волны в слое, возбуждаемые периодическим движением его границы // *Акуст. журн.* 2001. Т. 47. № 4. С. 525–533.
7. *Rudenko O.V.* Nonlinear standing waves, resonance phenomena, and frequency characteristics of distributed systems // *Acoust. Phys*. 2009. V. 55. № 1. P. 27–54.
8. *Bednarik M., Cervenka M.* Equations for description of nonlinear standing waves in constant-cross-sectioned resonators // *J. Acoust. Soc. Am*. 2014. V. 135. № 3. P. EL134–EL139.
9. *Ткаченко Л.А., Фадеев С.А.* Генерация высших гармоник при резонансных колебаниях в трубе с открытым концом // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 1. С. 9–16.
10. *Ilinskii Y.A., Lipkens B., Lucas T.S., Van Doren T.W.* Nonlinear standing waves in an acoustic resonator // *J. Acoust. Soc. Am*. 1998. V. 104. № 5. P. 2664–2674.
11. *Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A.* Linear and nonlinear frequency shifts in acoustical resonators with varying cross-sections // *J. Acoust. Soc. Am*. 2001. V. 110. № 1. P. 109–119.
12. *Mortell M.P., Seymour B.R.* Nonlinear resonant oscillations in closed tubes of variable cross-section // *J. Fluid Mech*. 2004. V. 519. P. 183–199.
13. *Kurihara E., Yano T.* Nonlinear analysis of periodic modulation in resonances of cylindrical and spherical acoustic standing waves // *Physics of Fluids*. 2006. V. 18. P. 117107–1–117107–11.
14. *Seymour B.R., Mortell M.P., Amundsen D.E.* Resonant oscillations of an inhomogeneous gas between concentric spheres // *Proc. Royal Soc. London A*. 2011. V. 467. P. 2149–2167.
15. *Chester W.* Acoustic resonance in spherically symmetric waves // *Proc. Royal Soc. London A*. 1991. V. 434. P. 459–463.
16. *Богуславский Ю.Я., Экнадиосянц О.К.* О физическом механизме распыления жидкости акустическими колебаниями // *Акуст. журн.* 1969. Т. 15. № 1. С. 17–24.
17. *Tomita Y.* Jet atomization and cavitation induced by interactions between focused ultrasound and a water surface // *Physics of Fluids*. 2014. V. 26. P. 097105–1–097105–11.
18. *Simon J.C., Sapozhnikov O.A., Khokhlova V.A., Crum L.A., Bailey M.R.* Ultrasonic atomization of liquids in drop-chain acoustic fountains // *J. Fluid Mech*. 2015. V. 766. P. 129–146.
19. *Кузнецов В.П.* Уравнения нелинейной акустики // *Акуст. журн.* 1970. Т. 26. № 4. С. 548–553.
20. *Jordan P.M.* An analytical study of Kuznetsov's equation: diffusive solutions, shock formation, and solution bifurcation // *Physics Letters A*. 2004. P. 77–84.
21. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики: Учебное пособие. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
22. *Hamilton M.F., Blackstock D.T.* Nonlinear Acoustics. Academic Press, AIP, 2008.
23. *Briggs L.J.* Limiting negative pressure of water // *J. Appl. Phys*. 1950. V. 21. P. 721–722.
24. *Maxwell A.D., Cain C.A., Hall T.L., Fowlkes J.B., Xu Z.* Probability of cavitation for single ultrasound pulses applied to tissues and tissue-mimicking materials // *Ultrasound Med. Biol*. 2013. V. 39. № 3. P. 449–465.