

УДК 534.138

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА В ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ

© 2018 г. Л. И. Казаков

299006 Севастополь, ул. Т. Шевченко 29, кв. 219

e-mail: lev-kazakov@rambler.ru

Поступила в редакцию 05.12.2015 г.

После доработки 23.06.2017 г.

В рамках ячеечной модели теоретически исследовано распространение звука в монодисперсных эмульсиях с произвольными объемными концентрациями. Принято, что ячейки эмульсии ограничены тонкими и невесомыми жесткими оболочками, позволяющими реализовать принцип минимума диссипации энергии при вязких звуковых потерях. Получены решения, охватывающие много частных случаев и широкие диапазоны параметров и переменных. Эти решения пригодны для изучения акустических свойств как эмульсий, так и суспензий, морских осадков, туманов, дымов, а также упруго-вязких материалов с твердыми или жидкими включениями, и т.п. Подробно рассмотрено распространение и поглощение звука в эмульсиях и суспензиях. Выполнено сравнение с литературными экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* эмульсии, суспензии, ячеечная модель, жесткая оболочка, принцип минимума диссипации энергии, микронеоднородные среды, фазовая скорость и затухание звука, вязкие потери

DOI: 10.7868/S0320791918030097

### ВВЕДЕНИЕ

Интерес физиков к распространению звука в дисперсных средах (туманы, дождь, снег) возник давно, но серьезные исследования вопроса начались немногим более ста лет назад. Первая теоретическая работа была выполнена в 1910 году С. Сьюэллом, который в своей теории полагал, что малые сферические или цилиндрические твердые взвешенные в воздухе частицы (тумана, дыма) неподвижны, т.е. не участвуют в звуковых колебаниях. Строгое решение задачи о колебаниях частиц взвеси в звуковом поле дал Г. Ламб, рассмотревший взвесь твердых шариков малой концентрации, когда можно не учитывать взаимодействие частиц [1, с. 829–835]. Согласно идее Л.И. Мандельштама процесс дисперсии и поглощения звука в дисперсных средах носит релаксационный нелокальный характер. Он предложил С.М. Рытову с сотрудниками “рассмотреть в качестве модели среды со вторым механизмом релаксации взвесь тяжелых частиц в жидкости” [2]. Так появились работы [3, 4], в которых авторы, используя результаты Буссинеска, Стокса, пришли к известной формуле Кёнига, с ее помощью описали распространение монохроматического звука в малоконцентрированной суспензии, а затем измерили поглощение ультразвука в водной эмульсии ртути, получив хорошее согласие с расчетом. Позднее результат работы [3] был неоднократно подтвержден, в частности в работах [5–7],

причем в [5] и [7] рассмотрены как суспензии, так и эмульсии, а также тепловые потери в них. В работе [6], помимо расчета вязких потерь в малоконцентрированных суспензиях, хорошо подтвержденных измерениями, приведены экспериментальные результаты по поглощению звука в высококонцентрированных (до 40%) суспензиях. Термическую дисперсию скорости и поглощения звука в эмульсиях первым изучил М.А. Исакович [8]. В работе [9] найдено выражение для амплитудного коэффициента поглощения звука в малоконцентрированной эмульсии, обусловленного вязкостями жидкостей.

Все упомянутые исследования относились к малым объемным концентрациям взвешенных частиц, не превышающим нескольких процентов, когда взаимодействием частиц можно пренебречь. В этом диапазоне, как правило, эксперимент подтверждает теорию. При увеличении концентрации теория и эксперимент резко расходятся, как убедительно показано, например, в работах [6, 10]. Автору известна лишь одна сравнительно давняя работа [11], относящаяся к суспензиям произвольной концентрации и основанная на рассмотрении ячеечной модели с кубической упаковкой ячеек, содержащих твердые частицы в виде малых цилиндров в окружении вязкой жидкости. С помощью полученных в [11] формул “можно качественно и отчасти количественно разрешить задачу о распространении звука в суспензиях высокой концентрации”. Термическое затухание

звука в таких суспензиях рассмотрено в это же время в работе [12].

Недавно в Акустическом журнале вышла статья [13], в которой авторы путем довольно искусственных, интересных, но не всегда убедительных построений сочленяют низко- и высокочастотное приближения для комплексной плотности суспензии в рамках ячеечной модели, используя для внешней границы ячейки условие Хаппеля [14] (не лучший выбор, на наш взгляд). Эти построения хороши для качественного рассмотрения вопроса, но не могут заменить точного расчета.

Ниже изложены результаты теории распространения монохроматического звука в ячеечной модели монодисперсной эмульсии вязких жидкостей с произвольной объемной концентрацией сферических частиц. Низко- и высокочастотное приближения этой теории для сферических и цилиндрических капель приведены ранее в работе автора [15] для четырех вариантов граничных условий на внешней границе ячейки. Здесь обоснованно оставлен только один вариант. Теория включает в себя в качестве частных случаев все ранее известные результаты по поглощению звука за счет вязких потерь в суспензиях и эмульсиях малых концентраций. Для малоконцентрированной эмульсии маловязких капель в сильновязкой жидкости получен новый результат, состоящий в независимости от частоты амплитудного коэффициента поглощения звука и иной зависимости его от размера капель (см. формулу (42)).

Эмульсией называют дисперсную систему, в которой капли одной вязкой жидкости распределены в другой вязкой жидкости. Во множестве предельных случаев от эмульсии можно плавным перейти к другим дисперсным образованиям. Так, если вязкость капель устремить к бесконечности, получим суспензию. Если дисперсная фаза представлена пузырьками газа, имеем газовую эмульсию, которая в свою очередь переходит в пену, когда объемная концентрация газа близка к единице, и т.д. Общие уравнения движения изотропной упруго-вязкой несжимаемой среды отличаются от уравнений Навье–Стокса для вязких несжимаемых жидкостей в случае гармонических колебаний лишь тем, что в них вместо вязкости  $\eta$  стоит величина  $i\mu^*/\omega$ , где  $\mu^* = \mu(1 - i\delta)$  – комплексный модуль сдвига;  $\mu$  – модуль сдвига;  $\delta$  – коэффициент сдвиговых потерь;  $\omega$  – круговая частота звука;  $i$  – мнимая единица. Поэтому выполнение для обеих жидкостей или для одной из них в полученных выражениях замены  $\eta \rightarrow i\mu^*/\omega$  делает последние пригодными для описания композиций из упруго-вязких несжимаемых материалов или их сочетаний с вязкими жидкостями. Таким образом можно, например, изучить свойства искусственных сред в виде резины с твердыми сферическими или цилиндрическими включени-

ями. Упруго-вязкие несжимаемые материалы охватывают огромный класс веществ – резины, мягкие пластмассы, смолы, битумы, биологические ткани и т.п. Задачи решены в рамках ячеечной модели, и поэтому результаты предполагаются верными для эмульсий с произвольными объемными концентрациями капель.

### ЯЧЕЕЧНАЯ МОДЕЛЬ ЭМУЛЬСИИ

Рассмотрим монодисперсную эмульсию из одинаковых капель в виде упорядоченной структуры ячеек типа гексагональной плотнейшей упаковки. Каждая капля радиуса  $R$  находится в центре элементарной ячейки в окружении вмещающей жидкости. Гидродинамическое и тепловое взаимодействие капли с соседними каплями осуществляется через воображаемую внешнюю границу ячейки, приближенно аппроксимируемую сферической поверхностью радиуса  $R_1$ .

Обозначим отношение радиусов:  $\xi = \frac{R}{R_1}$ . Радиус  $R_1$  определяют так, чтобы объемная концентрация  $\epsilon$  капель в эмульсии была равна  $\epsilon = \xi^3$ , т.е.

$$R_1 = \frac{R}{\sqrt[3]{\epsilon}}.$$

Таким образом, изучение монодисперсной эмульсии сводят к изучению пробной капли в ячейке. Предположим, что поверхностное натяжение достаточно велико, чтобы капля могла сохранять при движении свою сферическую форму. Тогда целесообразно решать задачу в сферических координатах с началом, помещенным в центр капли, движущейся относительно неподвижной лабораторной системы координат поступательно со скоростью  $U(t)$ , которую требуется найти, в отличие от заданной скорости  $V(t)$  полюсов ячейки. Выбранная система отсчета неинерциальна, и в ней, наряду с возможными “обычными” переменными во времени массовыми силами, на единицу массы жидкости действует сила инерции

$$\mathbf{F} = -d\mathbf{U}/dt.$$

Векторы  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{F}$  будем считать направленными вдоль полярной оси сферической системы координат.

Механизм гидродинамического взаимодействия капель в эмульсии не вполне ясен – неизвестно, например, как задать граничное условие для тангенциальной скорости  $V_\theta$  внешней жидкости на границе ячейки. В литературе использовались различные варианты, основанные на эвристических соображениях [14; 15, с. 46–48; 16, с. 42]. Из четырех известных автору вариантов только два физически состоятельны, это – жесткая оболочка ячейки и условие Хаппеля [14], состоящее в тре-

бовании обращения в нуль касательных напряжений на границе ячейки, что может быть обеспечено оболочкой в виде тонкого слоя идеальной жидкости. Лишь в этих двух случаях совпадают результаты расчета низкочастотных вязких звуковых потерь в суспензиях, полученные двумя разными способами. Вторым условием “правила отбора” примем требование подчинения принципу минимума диссипации энергии, который, таким образом, используем вместо недостающего граничного условия. Оказалось, что для того чтобы вязкие потери в ячейке суспензии были минимальны, внешняя граница ячейки должна быть жесткой оболочкой. Видимо, сказывается уменьшение интенсивности движения из-за трения жидкости о жесткую границу: при свободной поверхности ячейки (условие Хаппеля) потери возрастают в два–три раза. Одним словом, всегда будем считать, что ячейку эмульсии ограничивает жесткая, тонкая и невесомая оболочка. На высоких же частотах, когда глубина проникновения вязкой волны от колеблющейся капли во внешнюю жидкость мала в сравнении с расстоянием между каплями [17, с. 115], взаимодействием последних можно пренебречь и, следовательно, перейти к неупорядоченной эмульсии из независимых капель (без оболочек).

Изучим распространение плоской гармонической звуковой волны в монодисперсной эмульсии. Предположим, что длина волны звука во много раз превышает размеры элементарной ячейки эмульсии. В этом случае эмульсию можно считать “микронеоднородной средой”, которая для звука представляется “акустически однородной” [18, с. 56, 57] и характеризуется эффективными параметрами – плотностью  $\tilde{\rho}$ , скоростью звука  $\tilde{c}$  и другими.

Акустическое сжатие среды, или относительное приращение ее плотности [18, с. 27], равно

$$\tilde{s} = \frac{\delta\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}} = -\frac{\delta V_1}{V_1},$$

где  $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$  – объем ячейки. В приближении линейной акустики  $\tilde{s} \ll 1$ , и поэтому справедлив закон Гука: акустическое сжатие  $\tilde{s}$  пропорционально звуковому давлению  $P$ , т.е.  $\tilde{s} = \tilde{k}P$ . Из двух последних выражений следует

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{s}}{P} = -\frac{1}{V_1} \frac{\partial V_1}{\partial P}.$$

Величину  $\tilde{k}$  называют коэффициентом всестороннего сжатия [17, с. 650] или сжимаемостью [18, с. 28] среды. Обратная величина  $1/\tilde{k}$  есть эффективный модуль всестороннего сжатия эмульсии.

Зная  $\tilde{k}$  и  $\tilde{\rho}$ , найдем скорость звука в эмульсии [18, с. 28]

$$\tilde{c} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}\tilde{\rho}}}$$

и волновое число гармонической звуковой волны

$$\tilde{\kappa} = \frac{\omega}{\tilde{c}} = \omega\sqrt{\tilde{k}\tilde{\rho}}. \quad (1)$$

При гармонических колебаниях зависимость переменных от времени  $t$  представляют множителями  $e^{-i\omega t}$ , например,  $U(t) = Ue^{-i\omega t}$ , где  $U$  – комплексная амплитуда колебательной скорости центра капли.

### ВЯЗКИЕ ПОТЕРИ

Если плотности жидкостей в ячейке разнятся, то  $U$  не совпадает с амплитудой  $V$  колебательной скорости жесткой оболочки, т.е. капля движется относительно вмещающей жидкости. При этом за счет вязкостей обеих жидкостей происходит частотно-зависимая диссипация механической энергии, пропорциональная мнимой части эффективной плотности  $\tilde{\rho}$  (ср. [19, с. 413]). Таким образом,  $\tilde{\rho}$  есть комплексная функция частоты, она найдена в [15] (см. также Приложение):

$$\tilde{\rho}(\omega) = \tilde{\rho}_1(\omega) + i\tilde{\rho}_2(\omega) = \rho \left( 1 + \frac{\rho' - \rho}{\rho} \xi^3 \frac{U}{V} \right), \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность вмещающей жидкости,  $\rho'$  – плотность капли<sup>1</sup>. Обе части комплексной плотности  $\tilde{\rho}$  однозначно взаимосвязаны выражающими принцип причинности дисперсионными соотношениями типа Крамерса–Кронига [15, 19, с. 416; 20, с. 389; 21], т.е. “диспергирующая” среда в то же время является “поглощающей” [20, с. 378]. Это же относится и к сжимаемости эмульсии  $\tilde{k}$ , которая складывается из сжимаемостей фаз  $k$  и  $k'$  и является, вообще говоря, тоже комплексной функцией частоты:

$$\tilde{k}(\omega) = \tilde{k}_1(\omega) + i\tilde{k}_2(\omega),$$

причем наличие  $\tilde{k}_2(\omega)$  обусловлено тепловыми потерями.

Обычно рассматриваемое поглощение звука мало в том смысле, что мало относительное убывание амплитуды звукового давления  $P$  на расстоянии порядка длины волны [17, с. 370]. Это означает, что малы мнимые части  $\tilde{k}$  и  $\tilde{\rho}$ :  $\tilde{k}_2 \ll \tilde{k}_1$  и

<sup>1</sup> Физические величины, относящиеся к жидкости капли, будем отличать штрихами.

$\tilde{\rho}_2 \ll \tilde{\rho}_1$ . В таком случае волновое число  $\tilde{\kappa}$  (1) принимает вид

$$\tilde{\kappa}(\omega) = \tilde{\kappa}_1(\omega) + i\tilde{\kappa}_2(\omega) = \frac{\omega}{\tilde{c}_\Phi(\omega)} + i\tilde{\kappa}_2(\omega),$$

где

$$\tilde{c}_\Phi(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}_1(\omega)\tilde{\rho}_1(\omega)}} \quad (3)$$

– фазовая скорость звука в эмульсии,

$$\tilde{\kappa}_2(\omega) \approx \frac{\omega}{2\tilde{c}_\Phi(\omega)} \left( \frac{\tilde{k}_2(\omega)}{\tilde{k}_1(\omega)} + \frac{\tilde{\rho}_2(\omega)}{\tilde{\rho}_1(\omega)} \right) \quad (4)$$

– амплитудный коэффициент поглощения звука (амплитуда убывает с расстоянием  $x$  как  $e^{-\tilde{\kappa}_2(\omega)x}$ ).

Согласно (3) дисперсию фазовой скорости  $\tilde{c}_\Phi(\omega)$  определяют частотные зависимости вещественных функций  $\tilde{k}_1(\omega)$  и  $\tilde{\rho}_1(\omega)$ . Согласно (4) коэффициент поглощения  $\tilde{\kappa}_2(\omega)$  складывается из коэффициентов термического и вязкого поглощения.

Здесь изучим последнее, в связи с чем будем считать, что дисперсия сжимаемостей фаз и соответственно тепловые потери отсутствуют, и  $\tilde{k}(\omega)$  является вещественной постоянной величиной [18, с. 57]:

$$\tilde{k} = k'\xi^3 + k(1 - \xi^3).$$

При необходимости учета тепловых потерь следует использовать результаты работы [12].

Формула (2) выведена для несжимаемых жидкостей в ячейке. Но таковыми их и следует считать, когда ячейка мала по сравнению с длиной волны звука. В работе [15] приведены лишь низко- и высокочастотное приближения для отношения скоростей  $U/V$ . Выполнив все указанные там вычисления, получим полное выражение в виде

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{1 - iq}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} q = & \frac{2(\rho' - \rho)\omega R^2}{9\eta} \left( 3\eta \left\{ -\frac{4}{3}z\xi + \left[ z \left( 1 - \frac{\xi}{3} + \frac{2}{3}\xi^2 \right) - \frac{z^3}{9}(\xi - \xi^4) \right] \operatorname{ch} z(1 - \xi) - \right. \right. \\ & - \left. \left[ 1 - \frac{2}{3}\xi + \frac{z^2}{3}(1 - \xi - \xi^3) \right] \operatorname{sh} z(1 - \xi) \right\} + 3\eta_* \left\{ -2z\xi + z(1 + \xi^2) \operatorname{ch} z(1 - \xi) - \right. \\ & - \left. \left[ 1 - \xi + \frac{z^2}{3}(1 - \xi^3) \right] \operatorname{sh} z(1 - \xi) \right\} \right) \left( 2\eta \left\{ \left[ z(1 - \xi) + \frac{z^3}{6}(-2\xi + 3\xi^2 - \xi^3) - \frac{z^5\xi^3}{18} \right] \operatorname{ch} z(1 - \xi) - \right. \right. \\ & - \left. \left[ 1 + \frac{z^2}{2} \left( \frac{2}{3} - 2\xi + \xi^2 \right) + \frac{z^4}{6}(\xi^2 - \xi^3) \right] \operatorname{sh} z(1 - \xi) \right\} + 3\eta_* \left\{ \left[ z(1 - \xi) + \frac{z^3}{3}(-\xi + \xi^2) \right] \operatorname{ch} z(1 - \xi) - \right. \\ & \left. \left. - \left[ 1 + \frac{z^2}{3}(1 - 3\xi + \xi^2) + \frac{z^4}{9}\xi^2 \right] \operatorname{sh} z(1 - \xi) \right\} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\eta$  – вязкость вмещающей жидкости,  $\eta'$  – вязкость капли,

$$z = i^{3/2} \frac{\alpha}{\sqrt{2\xi}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\omega\rho'}{2\eta}} 2R = \frac{2R}{\delta_{\text{вязк}}}, \quad (7)$$

где  $\delta_{\text{вязк}} = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho'}}$  – глубина проникновения вязкой волны во вмещающую жидкость [17, с. 112],

$$3\eta'_* = 3\eta'Q(x) + B, \quad (8)$$

где

$$x = \frac{1+i}{2}\alpha', \quad \alpha' = \sqrt{\frac{\omega\rho'}{2\eta'}} 2R = \frac{2R}{\delta'_{\text{вязк}}}, \quad (9)$$

$$\delta'_{\text{вязк}} = \sqrt{\frac{2\eta'}{\omega\rho'}} \quad (10)$$

– глубина проникновения вязкой волны в каплю,

$$Q(x) = \frac{\left( 2 - \frac{x^2}{3} \right) x \cos x - (2 - x^2) \sin x}{(3 - x^2) \sin x - 3x \cos x},$$

$$Q(x) = (1 + 1.89 \times 10^{-4} \alpha'^4 - 3.52 \times 10^{-8} \alpha'^8 + \dots) - i \frac{\alpha'^2}{42} (1 - 1.03 \times 10^{-4} \alpha'^4 + 2.187 \times 10^{-8} \alpha'^8 + \dots)$$

при  $\alpha' \leq 2\pi$ ,

$$Q(x) = \frac{\alpha'}{6} \left[ \left( 1 + \frac{6}{\alpha'^2} + \frac{72}{\alpha'^5} + \dots \right) - i \left( 1 - \frac{6}{\alpha'^2} - \frac{12}{\alpha'^3} - \frac{216}{\alpha'^6} - \dots \right) \right] \quad \text{при } \alpha' \geq 2\pi, \quad (11)$$

$B$  – постоянная следующего происхождения.

Поверхностное натяжение  $\sigma$  на границе раздела жидкостей будет влиять на движение капли

лишь в том случае, если оно переменено вдоль ее поверхности, т.е. когда  $\sigma = \sigma(\theta, t)$ . Эта функция должна зависеть от скорости течения на разделе и быть четной по зенитному углу  $\theta$ . Считая изменение  $\sigma$  малым, разложим его в ряд по косинусам и, ограничившись двумя слагаемыми, запишем

$$\sigma(\theta, t) = \sigma_0 + BV_0(t) \cos \theta,$$

где  $\sigma_0 = \sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{const}$ ,  $B = \text{const}$ ,  $V_0(t) = V_0\left(\frac{\pi}{2}, t\right)$  — скорость жидкостей на экваторе капли. Такое изменение  $\sigma$  может быть вызвано разными причинами, например, изменением вдоль движущейся границы раздела поверхностной концентрации поверхностно-активных веществ (ПАВ), либо поверхностной плотности заряда у заряженной капли, колеблющейся в растворе электролита [22], и др. Так, для заряженной ртутной капли в окружении электролита

$$B = \frac{\epsilon_0^2 (1 + 2\xi^3)}{\chi} \frac{1 - \xi^3 - i \frac{\omega CR}{2\chi} (1 + 2\xi^3)}{1 - \xi^3 - i \frac{\omega CR}{2\chi} (1 + 2\xi^3)},$$

где  $\epsilon_0$  — равновесная плотность поверхностного заряда;  $\chi$  — электропроводность раствора;  $C$  — дифференциальная емкость двойного электрического слоя [15, с. 60].

Использование точного выражения (6) напрямую неудобно: разложения его числителя и знаменателя начинаются с  $z^5$ . После сокращения на  $z^5$  окончательно найдем

$$q = \frac{2(\rho' - \rho)\omega R^2}{9\eta} \times \frac{3\eta \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(\xi) [z(1 - \xi)]^{2m} + 3\eta_* \sum_{m=0}^{\infty} \phi'_m(\xi) [z(1 - \xi)]^{2m}}{2\eta \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(\xi) [z(1 - \xi)]^{2m} + 3\eta_* \sum_{m=0}^{\infty} \psi'_m(\xi) [z(1 - \xi)]^{2m}}. \quad (12)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \phi_m(\xi) &= D(m)(1 - \xi)^3 \left[ 1 + \frac{2m^2 + 7m + 9}{3(m + 2)} \xi + \frac{2m^2 + 10m + 9}{3(m + 2)} \xi^2 + \left(\frac{2}{3}m + 1\right) \xi^3 \right], \\ \phi'_m(\xi) &= D(m)(1 - \xi)^4 \left( 1 + \frac{2m + 7}{2m + 4} \xi + \xi^2 \right), \\ \psi_m(\xi) &= D(m) \left[ 1 + 2m\xi + m(2m + 1)\xi^2 + \frac{2}{3}m(m + 1) \times \right. \\ &\quad \left. \times (2m + 1)\xi^3 + m(2m + 3)\xi^4 + \left(m + \frac{3}{2}\right)\xi^5 \right], \\ \psi'_m(\xi) &= \\ &= D(m) \left[ (1 - \xi^5) + 2m\xi(1 - \xi^3) + \frac{m}{3}(4m - 2)\xi^2(1 - \xi) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$D(m) = \frac{5!(m + 1)(m + 2)}{2(2m + 5)!}. \quad (14)$$

Ряды в (12) зависят от  $z$  только в виде переменной

$$z(1 - \xi) = i^{3/2} \beta, \quad \beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) = \sqrt{\frac{\omega \rho}{\eta}} (R_1 - R), \quad (15)$$

пропорциональной толщине шарового слоя внешней жидкости. Поскольку по (15)

$$[z(1 - \xi)]^{2m} = (-1)^m i^m \beta^{2m},$$

то легко установить, что в (12) каждый из четырех рядов можно представить, например, в виде

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(\xi) [z(1 - \xi)]^{2m} &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \phi_{2m}(\xi) \beta^{4m} - \\ &- i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \phi_{2m+1}(\xi) \beta^{4m+2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Благодаря свойствам  $D(m)$  (14) эти ряды быстро сходятся и удобны для расчетов. Формулы для  $\tilde{c}_\Phi(\omega)$  и  $\tilde{\kappa}_2(\omega)$  можно получить последовательными подстановками

$$((13)-(16)) \rightarrow (12) \rightarrow (5) \rightarrow (2) \rightarrow (3), (4), \quad (17)$$

но делать это в общем виде слишком громоздко. Поэтому целесообразно выполнять по схеме (17) лишь численные расчеты. Формула (12) (с представлением (16)) годится “на все случаи жизни”, вопрос лишь в том, сколько в каждом случае требуется удержать членов ряда. При  $\beta \ll 1$  из (12) следует

$$q = \frac{2(\rho' - \rho)\omega R^2}{9\eta} \frac{3\eta \phi_0(\xi) + 3\eta_* \phi'_0(\xi)}{2\eta \psi_0(\xi) + 3\eta_* \psi'_0(\xi)}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_0(\xi) &= (1 - \xi)^3 \left( 1 + \frac{3}{2}\xi + \frac{3}{2}\xi^2 + \xi^3 \right) = \\ &= 1 - \frac{3}{2}\xi + \frac{3}{2}\xi^5 - \xi^6, \quad \psi_0(\xi) = 1 + \frac{3}{2}\xi^5, \\ \phi'_0(\xi) &= (1 - \xi)^4 \left( 1 + \frac{7}{4}\xi + \xi^2 \right) = \\ &= 1 - \frac{9}{4}\xi + \frac{5}{2}\xi^3 - \frac{9}{4}\xi^5 + \xi^6, \quad \psi'_0(\xi) = 1 - \xi^5. \end{aligned} \quad (19)$$

Функции (19) совпадают с известными результатами для ячеек с жесткими оболочками [14]. Если (см. (7))

$$\frac{2|\rho' - \rho|\omega R^2}{9\eta} = \frac{|\rho' - \rho|}{9\rho} \alpha^2 = \frac{|\rho' - \rho|}{9\rho} \left( \frac{2R}{\delta_{\text{вязк}}} \right)^2 \ll 1, \quad (20)$$

то и  $|q| \ll 1$ . Следовательно, по (5)

$$\frac{U}{V} \approx 1 + iq.$$

Подставив это в (2), получим

$$\bar{\rho}_1(\omega) = \rho' \xi^3 + \rho(1 - \xi^3) = \bar{\rho}(0) \quad (21)$$

– статическое значение плотности эмульсии;

$$\bar{\rho}_2(\omega) = (\rho' - \rho)\xi^3 q(\omega).$$

Тогда по (3) и (4) найдем в низкочастотном приближении<sup>2</sup>

$$q = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left( 1 - \xi^3 + \frac{6}{\alpha^2} (3\xi - \xi^2 + 2\xi^3) - \frac{12}{\alpha^3} (3\xi^2 - 2\xi^3) + i \left[ 1 - \xi^3 + \frac{6}{\alpha} (1 - \xi - \xi^3) - \frac{6}{\alpha^2} (3\xi - \xi^2 + 2\xi^3) \right] + \frac{6\eta'_*}{\alpha\eta} \left\{ \frac{3}{\alpha} (\xi + \xi^3) - \frac{6}{\alpha^2} (\xi^2 - \xi^3) + i \left[ 1 - \xi^3 - \frac{3}{\alpha} (\xi + \xi^3) \right] \right\} \right) \times \\ \times \left( 1 + \frac{6}{\alpha} (1 - \xi) + \frac{6}{\alpha^2} (2 - 3\xi + \xi^2) + \frac{72}{\alpha^4} (\xi - \xi^2) + i \left[ -1 + \frac{6}{\alpha^2} (2 - 3\xi + \xi^2) + \frac{12}{\alpha^3} (2 - 6\xi + 3\xi^2) - \frac{72}{\alpha^4} (\xi - \xi^2) \right] + \frac{6\eta'_*}{\alpha\eta} \left\{ 1 + \frac{3}{\alpha} (1 - \xi) + \frac{18}{\alpha^3} (\xi - \xi^2) - \frac{36}{\alpha^4} \xi^2 + i \left[ \frac{3}{\alpha} (1 - \xi) + \frac{6}{\alpha^2} (1 - 3\xi + \xi^2) - \frac{18}{\alpha^3} (\xi - \xi^2) \right] \right\} \right)^{-1}, \quad (24)$$

где

$$\gamma = \frac{3\rho}{2\rho' + \rho}. \quad (25)$$

При достаточно больших значениях  $\alpha$  отсюда можно получить

$$q \approx i \frac{1-\gamma}{\gamma} \left[ 1 - \xi^3 + \frac{3}{y} \left( \frac{\delta_*}{1 + \delta_*} + \xi^4 \right) \right], \quad (26)$$

где

$$y = z\xi = i^{3/2} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} = (i-1) \frac{\alpha}{2} = (i-1) \frac{R}{\delta_{\text{вязк}}}, \quad (27) \\ \delta_* = -\frac{3\eta'_*}{y\eta}.$$

Выражение (26) справедливо при

$$|y| = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \gg 3.$$

<sup>2</sup> Определение “низкочастотное” довольно условно, т.к. (20) выполнится и при  $\rho' \rightarrow \rho$ , а  $\beta \ll 1$  будет и при  $\xi \rightarrow 1$ .

$$\bar{c}_\Phi(\omega) = \bar{c}_\Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{k\bar{\rho}(0)}}, \quad (22)$$

$$\bar{\kappa}_2(\omega) = \frac{(\rho' - \rho)^2 R^2 \xi^3 \omega^2}{9\eta\bar{\rho}(0)\bar{c}_\Phi(0)} \frac{3\eta\phi_0(\xi) + 3\eta'_*\phi'_0(\xi)}{2\eta\psi_0(\xi) + 3\eta'_*\psi'_0(\xi)}, \quad (23)$$

где  $\eta'_*$  – вещественное число, если дополнительно считать  $\alpha' \ll 1$ ,  $\text{Im } B = 0$  (см. (8)–(11)).

При  $|z(1 - \xi)| = \beta \geq 4$  будет  $\text{th } z(1 - \xi) \approx -1$ , и из (6) следует другое приближение, которое можно назвать среднечастотным. Используя (7), запишем его в виде

В этом случае согласно (5), (7), (26) и (27)имеем<sup>3</sup>

$$\frac{U}{V} \approx \frac{\gamma}{1 - (1 - \gamma)\xi^3} + i \frac{3\gamma(1 - \gamma)\sqrt{\eta} \left( \frac{\delta_*}{1 + \delta_*} + \xi^4 \right)}{\left[ 1 - (1 - \gamma)\xi^3 \right]^2 \sqrt{2\omega\rho R}}. \quad (28)$$

Если  $\alpha' \geq 12$ , то по (11)  $Q(\alpha') \approx (1 - i)\alpha'/6$ . Тогда при  $B = 0$

$$\delta_* \approx \sqrt{\frac{\rho'\eta'_*}{\rho\eta}}. \quad (29)$$

Подставив (28) в (2) и приняв (29), получим в высокочастотном приближении

$$\bar{\rho}_1(\omega) = \rho \left\{ 1 + \frac{3(1 - \gamma)\xi^3}{2 \left[ 1 - (1 - \gamma)\xi^3 \right]} \right\} = \bar{\rho}(\infty), \quad (30)$$

$$\bar{\rho}_2(\omega) = \frac{9(1 - \gamma)^2 \xi^3 \sqrt{\rho\eta} \left( \frac{\sqrt{\rho'\eta'_*}}{\sqrt{\rho\eta} + \sqrt{\rho'\eta'_*}} + \xi^4 \right)}{2\sqrt{2} \left[ 1 - (1 - \gamma)\xi^3 \right]^2 \sqrt{\omega R}}. \quad (31)$$

Тогда по (3) и (4) найдем

<sup>3</sup> В работе [15] в формуле (2.87) для  $U/V$  пропущено слагаемое  $\xi^4$ .

$$\tilde{c}_\Phi(\omega) = \tilde{c}_\Phi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}\tilde{\rho}(\infty)}}, \quad (32)$$

$$\tilde{\kappa}_2(\omega) = \frac{9(1-\gamma)^2 \xi^3 \sqrt{\rho\eta} \left( \frac{\sqrt{\rho'\eta'}}{\sqrt{\rho\eta} + \sqrt{\rho'\eta'}} + \xi^4 \right) \sqrt{\omega}}{4\sqrt{2} [1 - (1-\gamma)\xi^3]^2 \tilde{\rho}(\infty) \tilde{c}_\Phi(\infty) R}. \quad (33)$$

При  $\xi^3 \ll 1$  (33) совпадает с результатом работы [9].

Таким образом, предельные значения скорости звука  $\tilde{c}_\Phi(0)$  (22) и  $\tilde{c}_\Phi(\infty)$  (32) не зависят от частоты, размеров капель и вязкостей фаз. Коэффициент (23) низкочастотного вязкого поглощения звука в эмульсии квадратично зависит от частоты, как и в однородных средах при различных механизмах поглощения (так называемое “нормальное поглощение” – [17, §77; 18, §120]). Его максимум наблюдается при  $\xi^3 \sim 0.1 \dots 0.2$ , что согласуется с известными экспериментальными данными [6, 10, 23]. На высоких частотах коэффициент (33)  $\tilde{\kappa}_2(\omega)$  пропорционален  $\sqrt{\omega}$ , что также подтверждается экспериментом [10, 24]. В обоих случаях  $\tilde{\kappa}_2(\omega)$  зависит от размеров капель,

соответственно, пропорционально  $R^2$  и  $R^{-1}$  (впрочем, см. формулу (42)).

Громоздкость выражений (6), (12), (24) окупается их “точностью”<sup>4</sup> и большой информативностью, охватывающей много частных случаев и широкие диапазоны параметров и переменных. Далее целесообразно перейти к этим частным случаям, что упростит формулы.

Часто можно считать, что

$$|\eta'_*| \gg \eta. \quad (34)$$

Это справедливо, прежде всего, для всех суспензий, а также для следующих эмульсий: типа  $M/B$ , содержащих капли вязкого масла в воде, когда  $\eta' \gg \eta$ , для водяных и масляных туманов и т.п. Условие (34) выполнится также, если  $B \gg 3\eta$ , что может случиться, например, для газовых эмульсий в воде, содержащей ПАВ, для заряженных ртутных капелек в растворе электролита [22, §§74; 83, 102]. В этом случае газовые пузырьки и ртутные капли колеблются, как твердые шарики. При выполнении условия (34) из (12) и (16) имеем

$$q = \frac{2(\rho' - \rho)\omega R^2}{9\eta} \frac{\phi'_0(\xi) - \phi'_2(\xi)\beta^4 + \phi'_4(\xi)\beta^8 - \dots - i \left[ \phi'_1(\xi)\beta^2 - \phi'_3(\xi)\beta^6 + \phi'_5(\xi)\beta^{10} - \dots \right]}{\psi'_0(\xi) - \psi'_2(\xi)\beta^4 + \psi'_4(\xi)\beta^8 - \dots - i \left[ \psi'_1(\xi)\beta^2 - \psi'_3(\xi)\beta^6 + \psi'_5(\xi)\beta^{10} - \dots \right]}. \quad (35)$$

Здесь дисперсная фаза представлена только своей плотностью  $\rho'$ . Формула (35) вполне пригодна для расчета  $q(\omega)$  в широком диапазоне частот. То же можно сказать и о среднечастотном приближении, для суспензий следующем из (24) при справедливости (34), а для эмульсий – при

$$\frac{|\eta'_*|}{\eta} \gg \frac{\alpha}{3\sqrt{2}}, \quad (36)$$

что на высоких частотах при  $B = 0$  соответствует условию

$$\sqrt{\rho'\eta'} \gg \sqrt{\rho\eta}. \quad (37)$$

Дальнейший расчет по схеме (17) приведет к получению значений  $\tilde{c}_\Phi(\omega)$  и  $\tilde{\kappa}_2(\omega)$  для любых частот звукового и ультразвукового диапазонов.

Используя формулы (24), (5) и положив  $\eta' = \infty$ ,  $\xi \rightarrow 0$ , найдем отношение  $U/V$  для одиночной твердой частицы:

$$\frac{U}{V} = \frac{1 + \frac{3}{\alpha} + i \left( \frac{3}{\alpha} + \frac{6}{\alpha^2} \right)}{\frac{1}{\gamma} + \frac{3}{\alpha} + i \left( \frac{3}{\alpha} + \frac{6}{\alpha^2} \right)}, \quad (38)$$

что с учетом (27) можно также представить в виде [15]

$$\frac{U}{V} = \frac{1 - y + \frac{y^2}{3}}{1 - y + \frac{y^2}{3\gamma}}.$$

Это есть не что иное, как известная формула Кёнига (König, 1891 г.), полученная также в [3]. С ее помощью для суспензии с малой концентрацией  $\varepsilon \ll 1$  частиц найдем

$$\tilde{\kappa}_2(\omega) = \frac{2 \left( \frac{\rho'}{\rho} - 1 \right)^2 \varepsilon \omega}{9c} \frac{1 + \frac{\alpha}{2}}{\left( \frac{2}{\alpha} + 1 \right)^2 + \left( 1 + \frac{\alpha}{3\gamma} \right)^2}, \quad (39)$$

где  $c$  – скорость звука в чистой жидкости. Именно этот результат получен (разными способами) в работах [3, 5, 6] и др. При  $\alpha \ll 1$  и  $\alpha \gg 1$  из формулы (39) следуют соответственно выражения низко- и высокочастотного приближений (также как частные случаи формул (23) и (33) при  $\eta' = \infty$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ):

<sup>4</sup> Несмотря на приближенность представления эмульсии ячеечной моделью, последующее решение акустической задачи является точным.

$$\tilde{\kappa}_2(\omega) = \frac{(\rho' - \rho)^2 R^2 \epsilon \omega^2}{9\eta\rho c},$$

$$\tilde{\kappa}_2(\omega) = \frac{9(1 - \gamma)^2 \sqrt{\rho\eta\epsilon}\sqrt{\omega}}{4\sqrt{2}\rho c R}.$$

При  $\rho' = \infty$  ( $\gamma = 0$ ) последняя формула совпадает с результатом Сьюэлла (1910 г.) для неподвижных сферических частиц.

$$q = \frac{(\rho' - \rho)\omega R^2}{3\eta} \frac{\phi_0(\xi) - \phi_2(\xi)\beta^4 + \phi_4(\xi)\beta^8 - \dots - i[\phi_1(\xi)\beta^2 - \phi_3(\xi)\beta^6 + \phi_5(\xi)\beta^{10} - \dots]}{\psi_0(\xi) - \psi_2(\xi)\beta^4 + \psi_4(\xi)\beta^8 - \dots - i[\psi_1(\xi)\beta^2 - \psi_3(\xi)\beta^6 + \psi_5(\xi)\beta^{10} - \dots]}.$$

Соответственно, при выполнении обратных (36) или (37) условий для среднечастотного приближения останется только первая половина формулы (24). В частности, с ее помощью можно получить аналогичное (38) отношение  $U/V$  для одиночной капли маловязкой жидкости (в пределе – идеальной) в вязкой жидкости, когда  $\eta' \ll \eta$ ,  $\xi \rightarrow 0$ :

$$\frac{U}{V} = \frac{1 + \frac{6}{\alpha} + \frac{12}{\alpha^2} + i\left(-1 + \frac{12}{\alpha^2} + \frac{24}{\alpha^3}\right)}{\frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{6}{\alpha}\right) + \frac{12}{\alpha^2} + i\left(-\frac{1}{\gamma} + \frac{12}{\alpha^2} + \frac{24}{\alpha^3}\right)}, \quad (40)$$

или в более компактном виде [15]

$$\frac{U}{V} = \frac{1 - y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}}{1 - y + \frac{y^2}{2\gamma} - \frac{y^3}{6\gamma}},$$

Амплитудный коэффициент поглощения звука для малоконцентрированной ( $\epsilon \ll 1$ ) эмульсии маловязких капель в сильновязкой жидкости (например, касторовое масло или глицерин с нерезонансными пузырьками газа)

$$\tilde{\kappa}_2(\omega) = \frac{4\left(\frac{\rho'}{\rho} - 1\right)^2 \eta \epsilon}{\rho c R^2} \times \left(1 + \frac{4}{\alpha} + \frac{6}{\alpha^2}\right) \times \frac{1}{\left[\frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{6}{\alpha}\right) + \frac{12}{\alpha^2}\right]^2 + \left[-\frac{1}{\gamma} + \frac{12}{\alpha^2} + \frac{24}{\alpha^3}\right]^2}. \quad (41)$$

При  $\alpha \ll 1$  отсюда (как и из (23) при  $\eta' \ll \eta$ ,  $\xi \rightarrow 0$ ) следует

$$\tilde{\kappa}_2(\omega) = \frac{(\rho' - \rho)^2 R^2 \epsilon \omega^2}{6\eta\rho c},$$

что лишь множителем отличается от низкочастотного приближения для суспензий. При  $\alpha \gg 1$  из (41) имеем

Обратное (34) условие  $\eta \gg |\eta'|$  имеет место для эмульсий, например, типа  $B/M$ ; газовых пузырьков или ртутных капель в вязкой жидкости; капель жидких металлов (например, щелочных) в расплавах некоторых солей или оснований, и др. В этом случае из (12) и (16) следует аналогичная (35) формула:

$$\tilde{\kappa}_2(\omega) = \frac{2\left(\frac{\rho'}{\rho} - 1\right)^2 \gamma^2 \eta \epsilon}{\rho c R^2}, \quad (42)$$

т.е. этот показатель для рассматриваемой эмульсии не зависит от частоты, в отличие от высокочастотного приближения (33), и по-иному зависит от радиуса капель. Для однородных веществ такие случаи известны (см., например, [17, с. 374, 381], а также [18, с. 398]). Интересно было бы подтвердить этот результат экспериментально.

Противоречия с формулой (33) здесь нет. Для случая  $\alpha \gg 1$ ,  $\alpha' \geq 12$ ,  $\xi \rightarrow 0$  имеет место зависимость

$$\text{Im} \frac{U}{V} \approx \frac{3\gamma(1 - \gamma)}{(1 + \delta)\alpha} \left[ \delta + \frac{4\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)}{\alpha} \right],$$

где  $\delta = (\rho'\eta'/\rho\eta)^{1/2}$ . Если  $\alpha \gg 4 \times (1 + \delta/2)/\delta$ , то вторым слагаемым можно пренебречь, что приведет к выражению (33) (для частного случая  $\xi^3 \ll 1$ ). Обратное же соотношение  $\delta \ll 4/\alpha$  (при  $\xi^3 \rightarrow 0$ ) обеспечивает справедливость формулы (42).

Сравним низкочастотные потери на одной и той же частоте в  $M/B$  и  $B/M$  эмульсиях с одинаковыми по размеру каплями и их концентрациями  $\xi^3 = 0.5$ . Пусть  $\eta_b$  – вязкость воды,  $\eta_m$  – вязкость масла. С помощью (23) и (19) найдем

$$\frac{\tilde{\kappa}_2(M/B)}{\tilde{\kappa}_2(B/M)} = 0.2455 \frac{\eta_m}{\eta_b} \gg 1. \quad (43)$$

Эта формула верна для капель, диаметр которых в микронах  $(2R)_{\text{мкм}} \ll 97/(f_{\text{кГц}})^{1/2}$ , где  $f_{\text{кГц}}$  – частота звука в килгерцах (чтобы выполнялось условие  $\beta \ll 1$ ). Для касторового масла ( $\eta_m = 987 \times 10^{-3}$  Па с) и воды ( $\eta_b = 1.004 \times 10^{-3}$  Па с) при 20°C имеем

$$\frac{\tilde{\kappa}_2(M/B)}{\tilde{\kappa}_2(B/M)} = 241.3 \gg 1.$$



Для трансформаторного масла ( $\eta_m = 19.8 \times 10^{-3}$  Па с) и воды отношение (43) составит 4.84.

Как видим, эмульсии типа  $M/V$  поглощают звук несравненно сильнее, чем обратные эмульсии  $V/M$ . Это иллюстрирует давнее (1910 г.) наблюдение В. Оствальда, который “установил..., что две эмульсии одинаковой концентрации, но противоположные по типу, обладали совершенно различными свойствами” [25, с. 376].

Свойство (43) может быть использовано в известном акустическом методе “выстукивания” емкости с эмульсией [26, с. 12] для определения фаз эмульсии и регистрации обращения фаз. Подобно кондуктометрическому методу, обычно применяемому для этих целей [26, с. 60], здесь тоже достаточны только качественные измерения прохождения звука.

### ТЕРМИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ

Термические потери рассмотрены в рамках ячеечной модели в работе [12]. Основным результатом этой работы является выражение для эффективной сжимаемости эмульсии:

$$\begin{aligned} \bar{k} = \bar{k}_1 + i\bar{k}_2 = \varepsilon \left( k' - \frac{\alpha'^2 T_0}{\rho' c_p'} \right) + (1 - \varepsilon) \left( k - \frac{\alpha^2 T_0}{\rho c_p} \right) + \\ + \frac{150 T_0 \lambda' \varepsilon \left( \frac{\alpha'}{\rho' c_p'} - \frac{\alpha}{\rho c_p} \right)^2}{\chi} i\Phi(x), \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{100x^2} \left[ \frac{\operatorname{tg} z'}{z'} + \frac{\lambda' \left( \frac{1}{1 - \xi} - \frac{\operatorname{tg}(z_1 - z)}{z_1 - z} \right)}{1 - (1 + z z_1) \frac{\operatorname{tg}(z_1 - z)}{z_1 - z}} \right]^{-1}, \quad (45)$$

$x = \frac{R}{\delta_{\text{тепл}}}$ ,  $\delta_{\text{тепл}} = \sqrt{\frac{2\chi}{\omega}}$  – глубина проникновения тепловой волны во вмещающую жидкость,  $\chi = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  – температуропроводность;  $\lambda$  – теплопроводность,  $c_p$  – удельная изобарная теплоемкость,

$$z = (1 + i)x, \quad z' = \sqrt{\frac{\chi}{\xi}} z, \quad z_1 = \frac{z}{\xi}.$$

В первых двух слагаемых формулы (44) стоят адиабатические значения сжимаемостей компонентов эмульсии, где  $\alpha$ ,  $\alpha'$  – коэффициенты термического расширения компонентов. Вещественная часть  $\operatorname{Re}\Phi(x)$  комплексной функции  $\Phi(x)$  определяет термические звуковые потери,

$\operatorname{Im}\Phi(x)$  определяет термическую дисперсию скорости звука в эмульсии. Термические потери получим, подставив найденные значения  $\bar{k}_1$  и  $\bar{k}_2$  в формулу (4).

### СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАМИ

В работе [24] были измерены в диапазоне частот 20–300 кГц при температуре 20°C скорость и поглощение звука в воде, насыщенной стеклянными бусинками среднего диаметра  $2R = 0.18$  мм =  $1.8 \times 10^{-4}$  м. Плотность такой суспензии (bulk density) составляла  $\bar{\rho}(0) = 1.92 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, пористость  $P = 1 - \xi^3 = 0.365 \pm 0.008$ , откуда  $\xi^3 = 0.635$ . Плотность воды при 20°C  $\rho = 0.9982 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Из формулы (21) найдем плотность бусинок:  $\rho' = 2.450 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. По формулам (25), (7) и (15) найдем соответственно:  $\gamma = 0.5077$ ,  $\alpha = 10.06(f_{\text{кГц}})^{1/2}$ ,  $\beta = 1.1626(f_{\text{кГц}})^{1/2}$ . При  $f_{\text{мин}} = 20$  кГц имеем:  $\alpha = 44.99$ ,  $\beta = 5.19 > 4$  и по (27):  $|\gamma| = 31.81 \gg 3$ . Следовательно, расчет можно вести по формулам (30)–(33) (где  $\eta = \infty$ ), т.е. справедливо высокочастотное приближение. При этом согласно (3), (30) и (32) дисперсией фазовой скорости можно пренебречь. Усреднив измеренные скорости звука (без крайних значений), примем  $\bar{c}_\Phi(\infty) = 1917.2$  м/с. Тогда по формуле (33) найдем коэффициент поглощения звука:

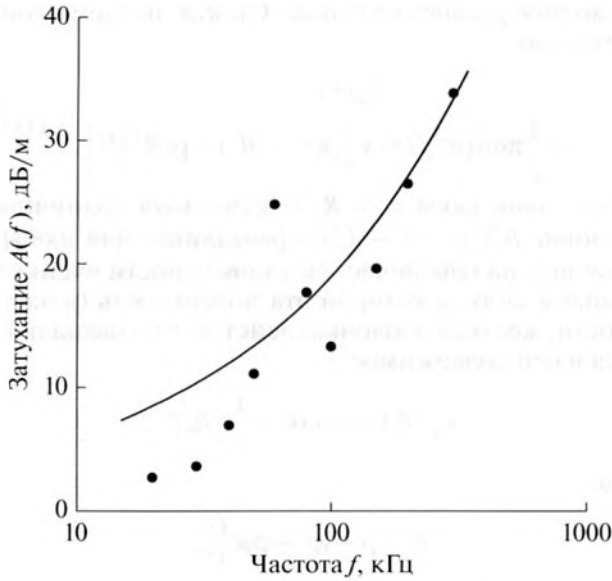
$$\bar{\kappa}_2(f_{\text{кГц}}) = 0.2194 \sqrt{f_{\text{кГц}}},$$

т.е. затухание звука составит

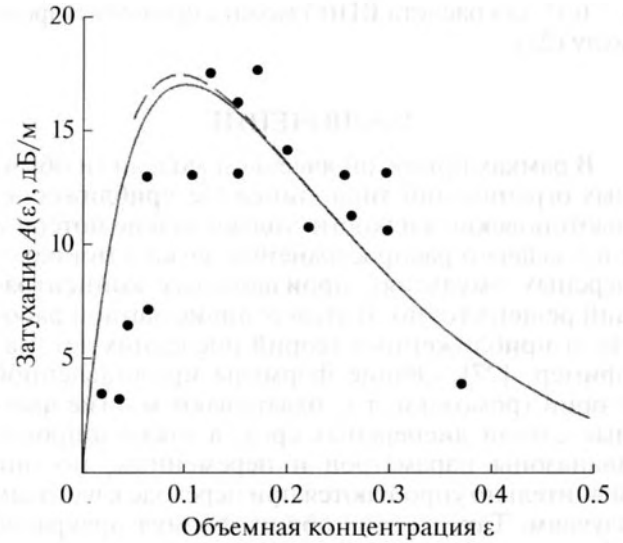
$$A = 8.686 \bar{\kappa}_2 = 1.9057 \sqrt{f_{\text{кГц}}} \text{ [дБ/м]}. \quad (46)$$

На рис. 1 представлено сравнение экспериментальных результатов работы [24] (точки) с рассчитанной по формуле (46) частотной зависимостью затухания звука в суспензии стеклянных бусинок. За исключением частот до 50 кГц и значительного разброса экспериментальных данных (отмечаемого и авторами [24]), совпадение расчета с измерениями вполне удовлетворительное.

На рис. 2 точками показано измеренное в работе [10] затухание звука частоты 100 кГц в суспензии частиц каолинита в воде в зависимости от объемной концентрации частиц. По измерениям автора [10], плотность каолинита  $\rho' = 2.71 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, сжимаемость  $k' = 10^{-11}$  Па<sup>-1</sup>. Скорость звука в воде при 20°C  $c = (k\rho)^{-1/2} = 1482.7$  м/с, откуда сжимаемость воды  $k = 4.557 \times 10^{-10}$  Па<sup>-1</sup>. По формуле (25) вычислим:  $\gamma = 0.4666$ . По приведенной в [10] для каолинита интегральной кривой вероятности случайной величины  $\varphi = -\lg_2(2R)_{\text{мм}}$  найдем средний размер частиц:  $2R = 2.50 \times 10^{-6}$  м = 2.50 мкм. Вычислим: по (7)  $\alpha = 1.397$ ; по (15)  $\beta = 0.988(\xi^{-1} - 1)$ ; по (20)  $2(\rho' - \rho)\omega R^2/9\eta = 0.372$ . При  $\xi^3 \geq 0.01$  будет  $\beta < 4$ . Поэтому расчет следует вести по формуле (35) и далее – по схеме (17).



**Рис. 1.** Частотная зависимость затухания звука в суспензии стеклянных бусинок в воде: • – экспериментальные точки из работы [24]; — — расчет по формуле (33).



**Рис. 2.** Затухание звука частотой 100 кГц в суспензии каолинита в воде в зависимости от объемной концентрации  $\epsilon$  частиц со средним диаметром  $2R = 2.5$  мкм: • – экспериментальные точки из работы [10]; — — расчет по формулам (35), (17); — — расчет по формуле (23).

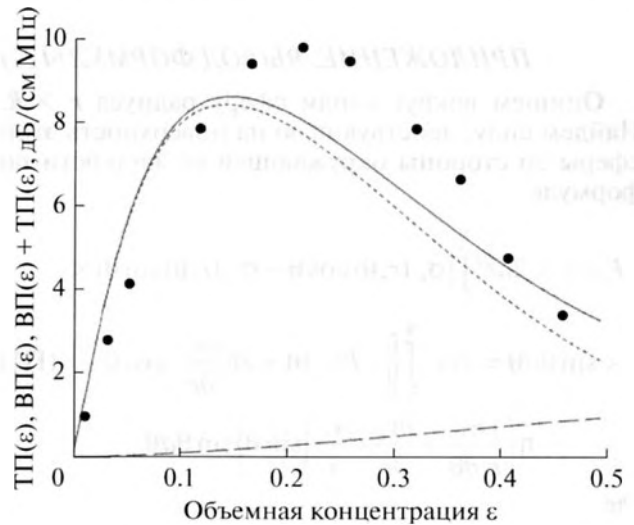
В результате получим показанную на рис. 2 кривую зависимости затухания звука от объемной концентрации  $\epsilon = \xi^3$  частиц каолинита диаметром  $2R = 2.50$  мкм в водной суспензии. Видно, что при  $\xi^3 \geq 0.1$  расчетная кривая хорошо аппроксимирует измеренные в [10] значения затухания звука, а при  $\xi^3 < 0.1$  значительно их превышает. Интересно, что при  $\xi^3 \geq 0.1$  ( $\beta \leq 1$ ) расчет по (35), (17) практически (до десятой и сотых долей децибел на метр) совпадает с расчетом по формуле низкочастотного приближения (выведенной для случая  $\beta \ll 1$ ). Поэтому неудивительно, что полученная попутно зависимость от концентрации  $\xi^3$  фазовой скорости звука в суспензии практически совпадает с (22) и с кривой Урика, показанной в [10] на рис. 10, с. 888.

На рис. 3 приведено сравнение расчетных и экспериментальных значений звуковых потерь в суспензиях рутила ( $\text{TiO}_2$ ) разных объемных концентраций  $\epsilon$  в воде на частоте 10.3 МГц. Экспериментальные данные взяты из работы [27] (рис. 4.6, 6.2). Принято вслед за авторами [27], что средний размер частиц рутила зависит от его концентрации в суспензии согласно рис. 6.3:  $2R(\epsilon) = (0.3 + 0.3478\epsilon)$  мкм. На оси ординат отложены зависимости вязких и тепловых потерь (согласно (4)):

$$\text{ВП}(\epsilon) = \frac{8.686}{100 \times 10.3} \frac{\omega}{2\tilde{c}_\Phi(\omega)} \frac{\tilde{\rho}_2(\omega)}{\tilde{\rho}_1(\omega)} \left[ \frac{\text{дБ}}{\text{см МГц}} \right],$$

$$\text{ТП}(\epsilon) = \frac{8.686}{100 \times 10.3} \frac{\omega}{2\tilde{c}_\Phi(\omega)} \frac{\tilde{k}_2(\omega)}{\tilde{k}_1(\omega)} \left[ \frac{\text{дБ}}{\text{см МГц}} \right].$$

Использованы следующие значения параметров рутила:  $\rho' = 3.92 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup> (по измерениям авторов [27]);  $\alpha' = 21.75 \times 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>;  $\lambda' = 6.53$  Вт/(м К);  $c'_p = 76$  Дж/(кг К);  $\chi' = 21.91 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с. Параметры воды:  $\alpha = 1.82 \times 10^{-4}$  К<sup>-1</sup>;  $\lambda = 0.599$  Вт/(м К);  $c_p = 4.183 \times 10^3$  Дж/(кг К);  $\chi = 14.3 \times 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с. При



**Рис. 3.** Затухание звука частоты 10.3 МГц в суспензии рутила ( $\text{TiO}_2$ ) в воде в зависимости от объемной концентрации  $\epsilon$  частиц со средним диаметром  $2R(\epsilon) = (0.3 + 0.3478\epsilon)$  мкм: • – экспериментальные точки из работы [27]; --- — вязкие потери; — — тепловые потери; — — суммарные потери.

$\epsilon > 0.15$  для расчета ВП( $\epsilon$ ) можно применять формулу (23).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках принятой ячеечной модели (и обычных ограничений типа: линейное приближение, ньютоновские жидкости, только вязкие потери и т.п.) задача о распространении звука в монодисперсных эмульсиях произвольных концентраций решена точно. В этом отличие данной работы от приближенных теорий последних лет, например, [27]. Общие формулы представленной теории громоздки, т.к. охватывают многие частные случаи дисперсных сред, а также широкие диапазоны параметров и переменных, но они значительно упрощаются при переходе к частным случаям. Так, из этих общих формул прекрасно следуют все ранее известные (для  $\epsilon \ll 1$ ), иногда довольно сложные результаты многих авторов: Кёнига, Сьюэлла, Ламба, Рытова, Эпштейна, Урика, Ратинской и других. Для одиночной капли (а это основа всех акустических теорий эмульсий малых концентраций) можно получить, например, все известные формулы для сопротивления капли, твердой сферы, газового пузырька, а также формулы Стокса, Рыбчинского—Адамара и иные. При умеренных и повышенных концентрациях частиц теория неплохо описывает известные экспериментальные данные.

Сказанное дает основание использовать полученные здесь результаты в качестве эталонов сравнения при разработках приближенных акустических теорий концентрированных эмульсий, в которых взаимодействие капель существенно.

### ПРИЛОЖЕНИЕ. ВЫВОД ФОРМУЛЫ (2)

Опишем вокруг капли сферу радиуса  $r > R$ . Найдем силу, действующую на поверхность этой сферы со стороны окружающей ее жидкости по формуле

$$F_{\text{ж}}(r) = 2\pi r^2 \int_0^\pi [\sigma_{rr}(r, \theta) \cos \theta - \sigma_{\theta r}(r, \theta) \sin \theta] \times \\ \times \sin \theta d\theta = 2\pi r^2 \int_0^\pi \left[ -P(r, \theta) + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] \cos \theta - \\ - \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \sin \theta \Big] \sin \theta d\theta, \quad (\text{П1})$$

где

$$v_r = f(r) \cos \theta, \quad v_\theta = \varphi(r) \sin \theta, \\ P = [\rho Fr + \eta \psi(r)] \cos \theta. \quad (\text{П2})$$

Используя систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $f(r)$ ,  $\varphi(r)$ ,  $\psi(r)$ , получающуюся при подстановке (П2) в

исходное уравнение Навье—Стокса, найдем окончательно

$$F_{\text{ж}}(r) = \\ = -i \frac{4}{3} \pi \omega \left\{ \rho r^3 f(r) + [\rho(r^3 - R^3) + \rho' R^3] U \right\}. \quad (\text{П3})$$

Подставив сюда  $r = R_1$  и используя граничное условие  $f(R_1) = V - U$  (справедливое для любых условий на (сферической!) поверхности ячейки), найдем силу, с которой эта поверхность (в частности, жесткая оболочка) действует на находящееся в ней содержимое:

$$F_{\text{ж}}(R_1) = -i \omega V \times \frac{4}{3} \pi R_1^3 \bar{\rho},$$

где

$$\bar{\rho} = \rho + (\rho' - \rho) \epsilon \frac{U}{V},$$

т.е. (2). В [15] есть и другое доказательство (2).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. Гидродинамика / Пер. с англ. под ред. Слэзкина Н.А. М.—Л.: ГИТТЛ, 1947. 928 с.
2. Исакович М.А. Л.И. Мандельштам и распространение звука в микрогетерогенных средах // УФН. 1979. Т. 129. № 3. С. 531—540.
3. Рытов С.М., Владимирский В.В., Галанин М.Д. Распространение звука в дисперсных системах // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. № 5. С. 614—621.
4. Владимирский В.В., Галанин М.Д. Поглощение ультразвука в водной эмульсии ртути // ЖЭТФ. 1939. Т. 9. № 2. С. 233—236.
5. Epstein P.S. On the absorption of sound waves in suspensions and emulsions // Theodore von Karman Anniversary Volume, Pasadena, California. 1941. P. 162—188.
6. Urlick R.J. The absorption of sound in suspensions of irregular particles // J. Acoust. Soc. Am. 1948. V. 20. № 3. P. 283—289.
7. Epstein P.S., Carhart R.R. The absorption of sound in suspensions and emulsions. Water fog in air // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 25. № 3. P. 553—565.
8. Исакович М.А. О распространении звука в эмульсиях // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. № 10. С. 907—912.
9. Ратинская И.А. О затухании звука в эмульсиях // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 2. С. 210—215.
10. Hampton L.D. Acoustic properties of sediments // J. Acoust. Soc. Am. 1967. V. 42. № 4. P. 882—890.
11. Нестеров В.С. Вязко-инерционная дисперсия и затухание звука в суспензии высокой концентрации // Акуст. журн. 1959. Т. 5. № 3. С. 337—344.
12. Бызова Н.Л., Нестеров В.С. Термическое затухание звука в суспензии высокой концентрации // Акуст. журн. 1959. Т. 5. № 4. С. 408—414.
13. Федотовский В.С., Орлов А.И., Лунина С.В., Пильщикова Е.А. Комплексная плотность суспензий в колебательно-волновых процессах // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 2. С. 173—178.

14. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Пер. с англ. под ред. Буевича Ю.А. М.: Мир, 1976. 630 с.
15. Казаков Л.И. Динамика капель в электрокапиллярных акустических преобразователях. Дис. ... к.ф.-м.н. Владивосток, 1985. 114 с.
16. Броунштейн Б.И., Фишбеин Г.А. Гидродинамика, массо- и теплообмен в дисперсных системах. Л.: Химия, 1977. 280 с.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. 2-е изд., перераб. и доп. М.: ГИТТЛ, 1954. 795 с.
18. Исакович М.А. Общая акустика. Учебное пособие. М.: Наука, 1973. 495 с.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Часть 1. 3-е изд., дополн. М.: Наука, 1976. 583 с.
20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. 2-е изд., перераб. и дополн. М.: Наука, 1982. 623 с.
21. Гинзбург В.Л. Об общей связи между поглощением и дисперсией звуковых волн // Акуст. журн. 1955. Т. 1. № 1. С. 31–39.
22. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. 2-е изд., дополн. и перераб. М.: ГИФМЛ, 1959. 699 с.
23. Амент В. Распространение звука в взвешях / Сб. пер. Проблемы современной физики. Гидроакустика. Под ред. Комар А.П. М.: ИЛ, 1954. № 5. С. 147–152.
24. Hovem J.M., Ingram G.D. Viscous attenuation of sound in saturated sand // J. Acoust. Soc. Am. 1979. V. 66. № 6. P. 1807–1812.
25. Клейтон В. Эмульсии, их теория и технические применения / Пер. с англ. под ред. акад. Ребиндера П.А. М.: ИЛ, 1950. 679 с.
26. Ребиндер П.А., Поспелова К.А. Современные представления об устойчивости, образовании и разрушении эмульсий и методы их исследования / В кн. Клейтон В. Эмульсии, их теория и технические применения. М.: ИЛ, 1950. С. 11–71.
27. Dukhin A.S., Goetz P.J. Ultrasound for Characterizing Colloids. Elsevier. 2002. 372 p.