

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДУЛИРОВАННЫЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

© 2018 г. А. И. Землянухин^а, *, А. В. Бочкарев^а, **

^аСаратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
410054 Саратов, ул. Политехническая 77, Россия

*e-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru

**e-mail: ab2009sar@list.ru

Поступила в редакцию 15.09.2017 г.

Выведено квазигиперболическое уравнение, моделирующее осесимметричное распространение изгибных волн в цилиндрической оболочке, взаимодействующей с нелинейно-упругой средой. С использованием корректной асимптотической процедуры исследование волнового процесса сведено к анализу нелинейного уравнения Шредингера. Установлено, что для развития модуляционной неустойчивости необходима “мягкая” нелинейность окружающей оболочку среды. Выявлены режимы, допускающие распространение устойчивых светлых солитонов огибающих.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, изгибные волны, модуляционная неустойчивость, устойчивые солитоны огибающих

DOI: 10.1134/S0320791918040135

ВВЕДЕНИЕ

Исследование волновых процессов в деформируемых системах на протяжении последних десятилетий остается актуальной проблемой теоретической и прикладной нелинейной акустики. Во многом это объясняется возможностью использования свойств и характеристик нелинейных волн деформации в задачах неразрушающего контроля и акустической диагностики материалов.

Нелинейные волны в тонких цилиндрических оболочках исследованы в меньшей степени, чем в стержнях и пластинах [1, 2]. При этом осесимметричные продольные волны изучены гораздо подробнее изгибных и сдвиговых волн. В [3–5] для компоненты продольной деформации и перемещения выведены квазигиперболические уравнения, не интегрируемые методом обратной задачи рассеяния, и при определенных ограничениях на коэффициенты построены классы их точных частных решений.

В настоящее время отмечается существенный прогресс в экспериментальном подтверждении возможности генерации и распространения солитонов продольной деформации в полимерных стержнях [6, 7]. Возникновение и распространение излучающего объемного солитона упругой деформации в твердотельном волноводе впервые экспериментально зарегистрировано в [8]. Результаты наблюдения сдвиговых солитонов в упругой пластине [9] приведены в [10]. Однако именно в тонкой короткой металлической цилиндриче-

ской оболочке были впервые экспериментально обнаружены солитоны огибающих, распространяющиеся в окружном направлении [11].

Большая часть работ о распространении изгибных волн в оболочках выполнена либо в геометрически линейной постановке [12], либо при неучете инерции тангенциальных компонент перемещений (гипотеза Кирхгофа) [13]. Широкий круг вопросов нелинейных многоволновых взаимодействий в тонкостенных элементах конструкций рассмотрен в [14], где, в частности, отмечается, что использование различных моделей оболочек приводит к различным прогнозам о процессе модуляционной неустойчивости осесимметричных волн. В последние годы растет интерес к неклассическим теориям оболочек в задачах нелинейной динамики углеродных нанотрубок [15].

Цель настоящей работы состоит в теоретическом исследовании возможности развития модуляционной неустойчивости осесимметричных изгибных волн, распространяющихся вдоль образующей цилиндрической оболочки. Достижение поставленной цели обеспечивается решением задач моделирования процесса распространения осесимметричных пакетов изгибных волн вдоль образующей цилиндрической оболочки, выводом и качественным анализом квазигиперболического уравнения.

В первом параграфе на основе асимптотического анализа системы уравнений движения элемента оболочки Кирхгофа–Лява в перемещениях

выводится нелинейное квазигиперболическое уравнение. Во втором параграфе это уравнение с использованием корректной асимптотической процедуры трансформируется в интегрируемое нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), проводится анализ модуляционной устойчивости его решений. Третий параграф посвящен установлению условий, допускающих возможность устойчивого распространения решений выведенного НУШ в виде светлого солитона огибающей.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТА ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим тонкостенную круговую бесконечную цилиндрическую оболочку модели Кирхгофа–Лява, направив ось Ox вдоль ее осевой линии, ось Oy в окружном направлении и ось Oz в радиальном направлении от центра. Продольное, окружное и радиальное перемещения элемента срединной поверхности оболочки обозначим соответственно как u , v и w .

Уравнения движения оболочки, взаимодействующей с внешней нелинейно-упругой средой, в осесимметричном случае (при условиях равенства нулю окружного перемещения v , производных по окружной координате y и параметра кривизны в продольном направлении k_x) имеют вид [16]

$$\begin{aligned} u_{xx} - \mu k_y w_x + \frac{h^2}{12} k_y w_{xxx} + w_x w_{xx} - \frac{\gamma(1-\mu^2)}{gE} u_{tt} = 0, \\ \frac{h^2}{12} \left(w_{xxxx} - \frac{3}{2} (w_x^2 w_{xx})_{xx} \right) - \mu k_y u_x + \frac{h^2}{12} k_y u_{xxx} + k_y^2 w - \\ - \frac{1}{2} \mu k_y w_x^2 - \left(w_x \left(u_x - \mu k_y w + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \right)_x + \\ + \frac{\gamma(1-\mu^2)}{gE} w_{tt} + \frac{k_1}{R^2} w - \frac{k_2}{h^2 R^2} w^3 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона, $k_y = 1/R$ – параметр кривизны в окружном направлении, R – радиус кривизны, γ – погонный вес материала оболочки, g – ускорение свободного падения, h – толщина оболочки, нижние индексы t и x обозначают частные производные по времени и координате, k_1 и k_2 – параметры окружающей оболочку нелинейно-упругой среды. Отметим, что рассматривается случай “мягкой” нелинейности внешней среды (два последних слагаемых второго уравнения системы (1) имеют противоположные знаки).

Уравнения (1) содержат несколько дополнительных членов. Слагаемые, подчеркнутые одной чертой, возникают при учете изменения геометрических параметров по толщине оболочки в

рамках модели Кирхгофа–Лява [16, с. 47], а также в конструктивно-неоднородных оболочках [4].

Дважды подчеркнутое слагаемое появляется вследствие использования уточненного выражения для кривизны K , в котором удержаны два первых члена разложения в ряд по w_x :

$$K = \frac{w_{xx}}{(1+w_x^2)^{3/2}} \approx w_{xx} \left(1 - \frac{3}{2} w_x^2 \right).$$

Для геометрически-нелинейных гибких оболочек квадраты углов поворота, связанные с прогибом, имеют тот же порядок, что и линейные деформации в массиве материала [17], вследствие чего во втором уравнении системы (1) удержано трижды подчеркнутое слагаемое, которое обычно отбрасывают.

После перехода к безразмерным переменным U, W, X, T

$$u = \frac{h^2}{l} U, \quad w = hW, \quad x = lX, \quad t = \frac{l^2}{h} \sqrt{\frac{\gamma(1-\mu^2)}{gE}} T \quad (2)$$

и введения безразмерных малого параметра ε и масштабирующего множителя $q = O(1)$:

$$\varepsilon = \frac{h}{R}, \quad q\varepsilon = \frac{h^2}{l^2}, \quad (3)$$

уравнения (1) примут вид

$$\begin{aligned} U_{XX} - q\varepsilon U_{TT} - \frac{\mu}{q} W_X + \frac{\varepsilon}{12} W_{XXX} + W_X W_{XX} = 0, \\ \frac{q}{12} W_{XXXX} + \frac{k_1+1}{q} W + qW_{TT} - \mu U_X + \frac{q\varepsilon}{12} U_{XXX} + \\ + \frac{\mu}{2} W_X^2 + \mu W W_{XX} - q(U_X W_X)_X - \\ - \frac{k_2}{q} W^3 - \frac{3q}{2} W_X^2 W_{XX} - \frac{q^2 \varepsilon}{8} (W_X^2 W_{XX})_{XX} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Видно, что в системе (4) перед слагаемыми, характеризующими инерцию в продольном направлении, изменение геометрии по толщине и кубически-нелинейную добавку в выражении для кривизны, стоит малый параметр ε , то есть они меньше остальных и одного порядка малости между собой. Это означает, что учитывать или не учитывать их надо одновременно. Более того, их учет приводит к тому, что после интегрирования первого уравнения системы (4) по x в уравнении для W остается единственная нелинейность, вызванная влиянием внешней среды. Таким образом, для корректного асимптотического упрощения требуется анализ полной системы (4).

В задачах нелинейной волновой динамики используются несколько подходов, позволяющих перейти от исходной системы нелинейных уравнений в частных производных к одному эволюционному или квазигиперболическому уравнению. В динамических задачах для упругих стерж-

ней и пластин наиболее часто применяется метод связанных нормальных волн [18], сводящий проблему к исследованию системы уравнений для волн, взаимодействующих только за счет нелинейностей. В задачах динамики оболочек эффективность этого метода снижается в связи с тем, что растяжение и изгиб, то есть продольные и нормальные перемещения, связаны уже в линейном приближении. Мы будем использовать подход, предложенный в [19]. Пользуясь тем, что линейная часть системы уравнений (4) имеет решения в виде плоских гармонических волн

$$\begin{aligned} U &= A \exp[i(\Omega T - kX)] + \text{к.с.}, \\ W &= B \exp[i(\Omega T - kX)] + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (5)$$

где “к.с.” означает комплексно-сопряженное слагаемое, для определения амплитуд A, B имеем однородную систему уравнений

$$\begin{aligned} 12q(q\epsilon\Omega^2 - k^2)A + ik(k^2q\epsilon + 12\mu)B &= 0, \\ ikq(k^2q\epsilon + 12\mu)A + \\ + (k^4q^2 - 12q^2\Omega^2 + 12(k_1 + 1))B &= 0, \end{aligned}$$

нетривиальное решение которой

$$A = i \frac{k^4q^2 - 12q^2\Omega^2 + 12(k_1 + 1)}{kq(k^2q\epsilon + 12\mu)} B \quad (6)$$

существует, если выполняется дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} 144q^3\epsilon\Omega^4 - 12q(k^4q^2\epsilon + 12k^2q + 12\epsilon(k_1 + 1))\Omega^2 + \\ + k^6q^2(12 - \epsilon^2) + \\ + 144k^2(k_1 + 1 - \mu^2) - 24k^4q\mu\epsilon = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение уравнения (7) относительно Ω^2 имеет две ветви – высокочастотную и низкочастотную. В данной работе будем рассматривать низкочастотную ветвь. Асимптотическое упрощение функции $\Omega^2(k)$ и выражения (6) при малых ($k \ll 1$) и средних ($k = O(1)$) значениях волнового числа k , проведенное в предположении

$$\frac{1}{5} < \mu < \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{500} < \epsilon < \frac{1}{100}, \quad (8)$$

приводит к двум вариантам:

$$\begin{aligned} \text{I: } k = O(1) \quad \Omega^2 &\approx \frac{k_1 + 1 - \mu^2}{q^2} + \frac{1}{12}k^4, \quad A \approx i \frac{\mu}{kq} B, \\ \text{II: } k \ll 1, \quad \Omega^2 &\approx \frac{(1 - \mu^2)k^2}{q\epsilon}, \quad A \approx i \frac{k_1 + 1}{kq\mu} B. \end{aligned} \quad (9)$$

В случае I выявленная связь между амплитудами продольных и поперечных перемещений (5)

позволяет записать соотношение между самими перемещениями в виде

$$W \approx \frac{q}{\mu} U_x. \quad (10)$$

При условии $kq > \mu$ имеем $|A| < |B|$, что соответствует преимущественно поперечной (изгибно-продольной) волне. Исключая с помощью (10) производные от функции U , входящие в уравнение (4) для поперечного перемещения W , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{12}W_{XXXX} + c_1W + W_{TT} - c_2W_X^2 - \frac{3}{2}W_X^2W_{XX} + \\ + c_3W_{XX} - c_4(W_X^2W_{XX})_{XX} - c_5W^3 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 = \frac{k_1 + 1 - \mu^2}{q^2}, \quad c_2 = \frac{\mu}{2q}, \quad c_3 = \frac{\epsilon\mu}{12q}, \\ c_4 = \frac{q\epsilon}{8}, \quad c_5 = \frac{k_2}{q^2}. \end{aligned}$$

В случае II имеем дело с преимущественно продольной волной. Подстановка связи между перемещениями

$$W \approx \frac{q\mu}{k_1 + 1} U_x$$

в первое из уравнений системы (4) приводит к уравнению

$$c_1U_{XX} - c_2U_{TT} + c_3U_{XXXX} + c_4U_{XX}U_{XXX} = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 = k_1 + 1 - \mu^2, \quad c_2 = q\epsilon(k_1 + 1), \\ c_3 = \frac{\epsilon q \mu}{12}, \quad c_4 = \frac{q^2 \mu^2}{k_1 + 1}. \end{aligned}$$

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ИЗГИБНО-ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН

Построение точных решений для уравнения (11) затруднительно, поэтому проведем его дальнейшее асимптотическое упрощение. Из анализа задач нелинейной акустики известно, что в средах с кубической нелинейностью эффект самовоздействия волны преобладает над эффектом генерации высших гармоник. В этом случае решение отыскивается в виде бегущей модулированной волны с медленно меняющейся малой амплитудой, в результате чего возникает нелинейное уравнение Шредингера (НУШ).

Предположим, что функция W зависит от трех переменных – быстрой фазы $\theta = kX - \omega T$, медленной координаты $\xi = \alpha X$ и медленного време-

ни $\tau = \alpha T$, $\alpha \ll 1$, так что уравнение (11) преобразуется заменами производных вида

$$\begin{aligned} W_{TT} &\rightarrow \alpha^2 W_{\tau\tau} - 2\alpha\omega W_{\theta\tau} + \omega^2 W_{\theta\theta}, \\ W_X &\rightarrow kW_\theta + \alpha W_\xi, \\ W_{XX} &\rightarrow \alpha^2 W_{\xi\xi} + 2k\alpha W_{\theta\xi} + k^2 W_{\theta\theta}, \end{aligned}$$

и так далее. Учитывая, что преобразованное уравнение (11) содержит как квадратичную, так и кубическую нелинейности, будем искать его решение в форме

$$W = \alpha \left[A(\xi, \tau) e^{i\theta} + \bar{A}(\xi, \tau) e^{-i\theta} \right] + \alpha^2 \left[B(\xi, \tau) e^{2i\theta} + \bar{B}(\xi, \tau) e^{-2i\theta} + C(\xi, \tau) \right] + O(\alpha^3), \quad (13)$$

включающей первую и вторую гармоники, а также среднее смещение, описываемое слагаемым $C(\xi, \tau)$ (горизонтальная черта означает комплексное сопряжение).

Выведем уравнение для амплитуды $A(\xi, \tau)$ первой гармоники. Собирая слагаемые, пропорциональные $e^{i\theta}$, и приравнивая нулю множитель при α^1 , получим дисперсионное соотношение

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{1}{12} k^4 - c_3 k^2 + c_1}. \quad (14)$$

Ограничиваясь в дальнейшем положительными значениями ω и k , для фазовой v_{ph} и групповой v_g скоростей имеем

$$v_f = \frac{\omega}{k}, \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{(k^2 - 6c_3)k}{6\omega}. \quad (15)$$

В следующих порядках по α получаем

$$\begin{aligned} \alpha^2 [i(A_\tau + v_g A_\xi)] + \alpha^3 \left[\frac{1}{2\omega} \left(\frac{k^2}{2} - c_3 \right) A_{\xi\xi} - A_{\tau\tau} + \right. \\ \left. + \left(c_4 k^6 - \frac{3}{2} k^4 + 3c_5 \right) A^2 \bar{A} + 4c_2 k^2 \bar{A} B \right] + \\ + O(\alpha^4) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая, что в главном порядке (16) имеем $A_\tau + v_g A_\xi = O(\alpha)$, выразим $A_{\tau\tau}$ через $A_{\xi\xi}$ и придадим (16) следующий вид:

$$\begin{aligned} i(A_\tau + v_g A_\xi) + \alpha \left(\frac{\omega_{kk}}{2} A_{\xi\xi} + \right. \\ \left. + \frac{2c_4 k^6 - 3k^4 + 6c_5}{4\omega} A^2 \bar{A} + \frac{2c_2 k^2}{\omega} \bar{A} B \right) = O(\alpha^2), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\omega_{kk} \equiv \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = \frac{k^2 - 2v_g^2 - 2c_3}{4\omega}. \quad (18)$$

Собирая слагаемые, пропорциональные $e^{2i\theta}$, найдем амплитуду второй гармоники

$$B = -\frac{c_2 k^2}{k^4 - 3c_1} A^2 + O(\varepsilon). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (17) и отбрасывая члены порядка α^2 , получаем НУШ:

$$iA_\tau + \rho A_{\zeta\zeta} + \lambda A^2 \bar{A} = 0, \quad (20)$$

где введена новая бегущая переменная $\zeta = \xi - v_g \tau$, а множители при второй производной и нелинейном слагаемом равны соответственно

$$\rho = \frac{\alpha \omega_{kk}}{2}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2\omega} \left(k^6 c_4 + 3c_5 - \frac{3}{2} k^4 - \frac{4c_2^2 k^4}{k^4 - 3c_1} \right). \quad (21)$$

Заметим, что неучет влияния второй гармоники и среднего члена в разложении (13), практикуемый для упрощения выкладок при асимптотическом анализе уравнений с высокими порядками дисперсии и нелинейностей, может привести к некорректной форме НУШ [20].

Проанализируем знаки множителей ρ и λ (21). Представив первый множитель в виде

$$\rho = \frac{\alpha \omega_{kk}}{2} = \frac{\alpha}{144\omega^3} \left(k^6 + 36c_1 k^2 - \varepsilon \frac{\mu}{q} \left(\frac{3k^4}{2} + 6c_1 \right) \right),$$

легко видеть, что при выполнении условий (8) и $k = O(1)$ можно считать $\rho > 0$.

Запишем с помощью равенств (12) второй множитель в форме

$$\lambda = \frac{\alpha}{2\omega} \left(\varepsilon \frac{k^6 q}{8} + \frac{3k_2}{q^2} - \frac{3}{2} k^4 - \frac{\mu^2 k^4}{q^2 (k^4 - 3c_1)} \right). \quad (22)$$

Зона модуляционной неустойчивости решения НУШ (20) в соответствии с критерием Лайтхилла определяется неравенством $\lambda > 0$ и показана на рис. 1 серым цветом. Зона “всплеска” на графике соответствует резонансу первой и второй гармоник, который наблюдается при $k^4 \approx 3c_1$. Если исключить зону резонанса из рассмотрения, знак λ с учетом малости ε и μ^2 определяется вторым и третьим слагаемыми внутри скобок (22). Следовательно, неравенство $\lambda > 0$ выполняется при

$$k_2 > \frac{1}{2} k^4 q^2. \quad (23)$$

Другими словами, при отрицательных k_2 , то есть в случае “жесткой” нелинейности окружающей оболочку среды, развитие модуляционной неустойчивости и распространение солитонов огибающих невозможно.

Отметим, что с возрастанием волнового числа k ведущими слагаемыми в (22) становятся первое и третье, и для положительности λ достаточно, чтобы $k^2 q > 12/\varepsilon$. Однако последнее неравенство не может удовлетворяться при асимптотическом

ограничении $k = O(1)$ рассматриваемого случая. Таким образом, для модуляционной неустойчивости изгибно-продольной волны существенно наличие внешней нелинейно-упругой среды “мягкого” типа. Уточнения исходной модели оболочки, связанные с учетом изменения геометрии по толщине и сохранением нелинейной добавки в выражении для кривизны, не оказывают практического влияния на процесс развития модуляционной неустойчивости.

УСТОЙЧИВЫЕ ИЗГИБНО-ПРОДОЛЬНЫЕ СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩИХ

Как известно [21], при $\lambda\rho > 0$ НУШ (20) относится к фокусирующему типу и имеет решение в форме “светлого” солитона огибающей

$$A = a \operatorname{sech}(K\zeta - \Omega\tau) \exp[i(\Delta k\zeta - \Delta\omega\tau)], \quad (24)$$

где постоянные параметры $a, K, \Omega, \Delta k, \Delta\omega$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= -\rho(K^2 - \Delta k^2), \quad \Omega = 2\rho K\Delta k, \\ 2\rho K^2 &= a^2\lambda. \end{aligned} \quad (25)$$

Подстановка (24) в (13) дает приближенное решение уравнения (11).

В общем случае скорость $v_{\text{нес}}$ несущей волны и скорость $v_{\text{ог}}$ ее медленно меняющейся амплитуды (огибающей) различны, и такой солитон огибающей в целом не является устойчивой (steady soliton [20]) волной. Кроме того, если линеаризованное уравнение (11) имеет базовое решение в форме плоской волны $\exp[i(kX - \omega T)]$, фазовая скорость $v_{ph} = \omega/k$ которой совпадает с $v_{\text{нес}}$, то не исключены потери энергии солитона огибающей на излучение соответствующей плоской волны, приводящие к уменьшению амплитуды солитона с течением времени. Данный эффект, приводящий к появлению на графике волны осциллирующего “хвоста”, сопровождающего основной “всплеск” уединенной волны, неоднократно наблюдался при численных экспериментах [20, 22].

Анализ фазовой v_{ph} и групповой v_g скоростей (15) показывает, что при увеличении волнового числа k от 0 до ∞ групповая скорость также возрастает от 0 до ∞ , а фазовая скорость сначала уменьшается от ∞ до минимального значения $v_m = \sqrt{c_1/3 - c_3}$ при $k_m = \sqrt[4]{12c_1}$, а затем вновь возрастает до ∞ (рис. 2). В точке минимума фазовая скорость совпадает с групповой: $v_g = v_{ph} = v_m$. Таким образом, в интервале $|v_{ph}| < v_m$ уравнение (11) не имеет решения в форме плоской волны малой амплитуды с фазовой скоростью v_{ph} . Следовательно, решения в форме солитона огибающей могут сохранять амплитуду постоянной, если фазовая скорость несущей волны солитона попадает

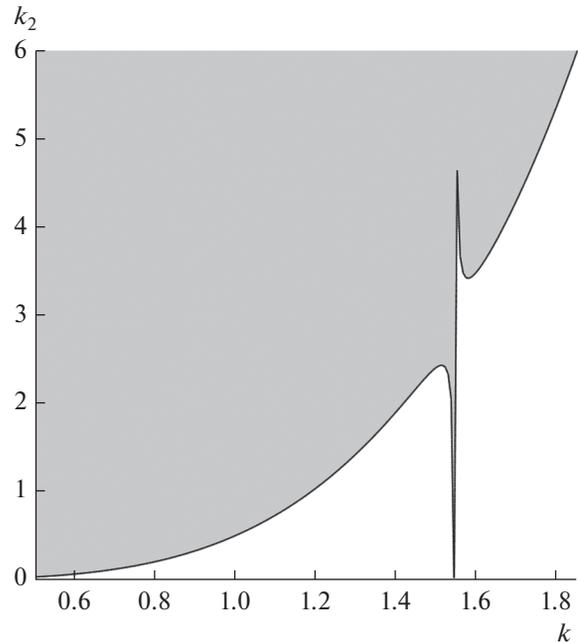


Рис. 1. Область $\lambda > 0$ при $\epsilon = 1/250, q = 1, \mu = 1/4$.

в указанный промежуток — при этом исключаются потери энергии солитона на излучение синхронной плоской волны [20].

Найдем условия, при которых решение (24) представляет собой устойчивую волну. Возвращаясь в (24) от ζ и τ к исходным переменным X и T , подставляя в (13) и удерживая члены порядка α , получим

$$\begin{aligned} W &= \alpha a \operatorname{sech}[\alpha(KX - (\Omega + v_g K)T)] \times \\ &\times \exp[i(k + \alpha\Delta k)X - \\ &- i(\omega + \alpha(\Delta\omega + v_g\Delta k))T] + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (26)$$

Определяя из решения (26) скорости огибающей и несущей

$$v_{\text{ог}} = v_g + \frac{\Omega}{K}, \quad v_{\text{нес}} = \frac{\omega + \alpha(\Delta\omega + v_g\Delta k)}{k + \alpha\Delta k},$$

запишем их для точки минимума v_f , в которой $k = k_m, \omega = k_m v_g$, и приравняем разность скоростей нулю. В результате получим условие для поправки к частоте

$$\Delta\omega = \frac{\Omega(k_m + \alpha\Delta k)}{\alpha K}, \quad (27)$$

при выполнении которого скорости несущей и огибающей одинаковы.

Пренебрегая слагаемыми порядка ϵ , при $k = k_m$ для множителей НУШ имеем

$$\lambda_m = \frac{\alpha(9k_m^2 + 50\mu^2 - 54(k_m + 1))}{6\sqrt{2q}\sqrt{k_m + 1 - \mu^2}}, \quad \rho_m = \frac{\alpha}{\sqrt{6}}. \quad (28)$$

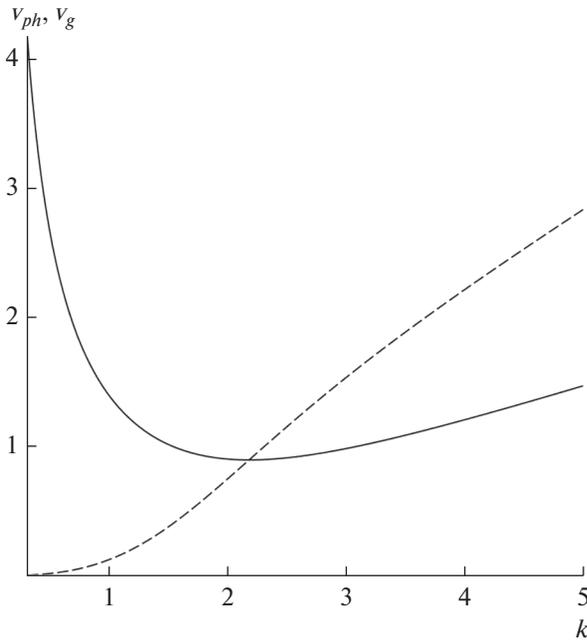


Рис. 2. Фазовая скорость v_{ph} (сплошная линия) и групповая скорость v_g (штриховая линия) при $\varepsilon = 1/250$, $q = k_1 = 1$, $\mu = 1/4$.

Условие $\lambda_m > 0$, при котором существует решение (24), дает связь между параметрами k_1 и k_2 упругой среды:

$$k_2 = (6 + \delta)(k_1 + 1) - \frac{50\mu^2}{9}, \quad (29)$$

где δ – произвольный неотрицательный параметр.

Условие физической реализуемости требует, чтобы наибольшее поперечное смещение $W_{max} = \alpha a$ не превышало точки максимума $W_m = \sqrt{\frac{k_1}{3k_2}}$ кубической зависимости $f(W) = k_1 W - k_2 W^3$, определяющей упругие свойства окружающей среды. Будем считать, что величины W_{max} и W_m совпадают:

$$\alpha a = \sqrt{\frac{k_1}{3k_2}}. \quad (30)$$

НУШ удовлетворительно моделирует поведение решения исходного уравнения на ограниченном временном интервале $\Delta t \sim 1/\alpha$. Это означает, что длина волны огибающей не должна превышать длину волны несущей более чем в $1/\alpha$ раз. С другой стороны, указанные длины не должны быть сравнимыми, поскольку НУШ используют при изучении слабо модулированных периодических решений. Это приводит к тому, что классический солитон огибающей НУШ содержит, как

правило, от 5 до 20 длин волн несущей. Для соблюдения этого потребуем, чтобы волновые числа несущей $k_m + \alpha \Delta k$ и огибающей αK были связаны соотношением

$$\alpha K = Q(k_m + \alpha \Delta k), \quad (31)$$

где Q – параметр относительной ширины волнового пакета, $1/20 < Q < 1/5$.

Исключим из системы уравнений (25), (27), (30) и (31) величины $\Delta \omega$, Δk , Ω , K , a :

$$\frac{k_1 \lambda_m}{6k_2 k_m^2 \rho_m} = \frac{Q^2}{1 + Q^2}. \quad (32)$$

Подставляя (28) и (29) в (32) и пренебрегая величинами Q^2 , μ^2 и ε в сравнении с единицей, получим

$$k_1 \approx \left(\frac{\delta}{8(\delta + 6)Q^2} - 1 \right)^{-1}. \quad (33)$$

Условие физической реализуемости $k_1 > 0$ выполняется при

$$\delta > \frac{48Q^2}{1 - 8Q^2}. \quad (34)$$

Из (34) следует ограничение на минимальную ширину устойчивого волнового пакета: $Q < 1/\sqrt{8} \approx 1/3$, то есть такой пакет включает минимум три длины волны несущей.

Полная скорость волны (26)

$$v_{ог} = v_g + \frac{\Omega}{K} \approx v_m - \frac{1}{\sqrt{6}} k_m Q^2 \quad (35)$$

имеет малую отрицательную поправку к v_m – минимальному значению фазовой скорости плоской волны. Очевидно, что в некоторой окрестности критического волнового числа k_m , в которой выполняется неравенство $v_{ог} < v_m$, волна (26) не будет терять энергию на излучение синхронной плоской волны с той же фазовой скоростью [22]. При выборе значений параметров $\Delta \omega, \Delta k, \Omega, K$, удовлетворяющих системе (25), (27), (30), (31), параметров ω, v_g согласно (14), (15) и при $k = k_m$ выражение (26) определяет устойчивую волну, распространяющуюся без изменения своей формы по крайней мере на тех расстояниях, на которых справедливо асимптотическое представление решения с помощью НУШ. Пример графика такой волны при $Q = 1/8$, $\mu = 1/4$, $\alpha = 1/20$, $q = 1$, $\delta = 2$, $\varepsilon = 1/250$, $T = 0$ показан на рис. 3. При скорости плоской волны $v_g \approx 0.896$ поправка к скорости составляет $\Delta v = \frac{\Omega}{K} \approx -0.014$.

Асимптотическое упрощение уравнения (12) для преимущественно продольных волн (случай II)

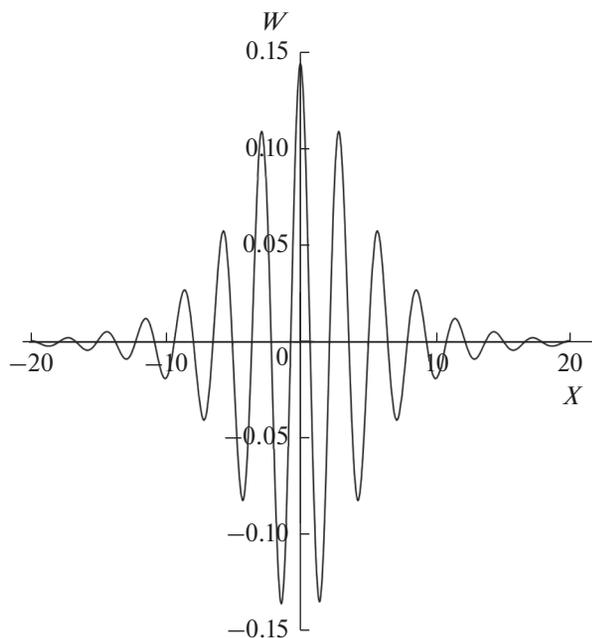


Рис. 3. Устойчивый светлый солитон огибающей.

показывает, что модуляционная неустойчивость в этом случае невозможна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием геометрически нелинейной модели цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява в работе теоретически установлено, что для развития модуляционной неустойчивости осесимметричных изгибных волн, распространяющихся вдоль образующей, необходимо, чтобы нелинейность окружающей оболочку среды была “мягкой”. Выявлены режимы, допускающие распространение устойчивых солитонов огибающих.

Авторы признательны профессору И.В. Андрианову за мотивирующие обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00176-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ерофеев В.И., Кажжаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях: дисперсия, диссипация, нелинейность. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
2. Ерофеев В.И., Клюева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 6. С. 725–740.
3. Порубов А.В. Локализация нелинейных волн деформации. Асимптотические и численные методы исследования. М.: Физматлит, 2009. 208 с.
4. Бочкарев А.В., Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Уединенные волны в неоднородной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с упругой средой // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 2. С. 145–151.
5. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 3. С. 359–363.
6. Дрейден Г.В., Самсонов А.М., Семенова И.В. Наблюдение объемных солитонов деформации в слоистых стержнях из различных материалов // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40. № 24. С. 107–111.
7. Дрейден Г.В., Самсонов А.М., Семенова И.В. Эволюция объемных солитонов деформации в полимерных волноводах на больших расстояниях // ЖТФ. 2008. Т. 78. № 5. С. 8–14.
8. Дрейден Г.В., Самсонов А.М., Семенова И.В., Хуснутдинова К.Р. Наблюдение излучающего объемного солитона деформации в твердотельном волноводе // ЖТФ. 2011. Т. 81. № 6. С. 145–149.
9. Кившарь Ю.С., Сыркин Е.С. Сдвиговые солитоны в упругой пластине // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 1. С. 104–109.
10. Planat M., Houmady M. Observation of soliton-like envelope modulations generated in an anisotropic quartz plate by metallic in interdigital transducers // Appl. Phys. Lett. 1989. V. 55. № 2. P. 103.
11. Wu J., Wheatly J., Putterman S., Rudnick I. Observation of envelope solitons in solids // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. № 24. P. 2744–2747.
12. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San Diego: Academic Press, 1998. 226 p.
13. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. Киев: Выща школа, 2008. 207 с.
14. Ковригин Д.А. Нелинейные многоволновые взаимодействия в тонкостенных элементах конструкций: Дис. ... д-ра техн. наук: 01.02.06: М., 2004. 215 с.
15. Smirnov V., Manevitch L., Strozzi M., Pellicano F. Non-linear optical vibrations of single-walled carbon nanotubes. 1. Energy exchange and localization of low-frequency oscillations // Phys. D. Nonlinear Phenom. 2016. V. 325. P. 113–125.
16. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
17. Филлин А.П. Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1984. 384 с.
18. Островский Л.А., Потанов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003. 400 с.
19. Smirnov V.V., Manevitch L.I., Strozzi M., Pellicano F. The radial breathing mode in CNT – the nonlinear theory of the resonant energy exchange. arXiv preprint, 2015. arXiv:1502.07081.
20. Grimshaw R., Malomed B., Benilov E. Solitary waves with damped oscillatory tails: an analysis of the fifth-order Korteweg–de Vries equation. Physica D. 1994. V. 77. P. 473–485.
21. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука. Физматлит, 2000. 272 с.
22. Grimshaw R., Stepanyants Yu., Alias A. Formation of wave packets in the Ostrovsky equation for both normal and anomalous dispersion // Proc. Roy. Soc. A: Mathematical, Physical and Engineering Science. 2016. V. 472. 20150416. doi 10.1098/rspa.2015.0416