

ВОССТАНОВЛЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ОТРАЖАТЕЛЕЙ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ МЕТОДОМ РАСПОЗНАВАНИЯ СО СЖАТИЕМ

© 2019 г. Е. Г. Базулин^{а, *}, Д. М. Соколов^{а, **}

^аНаучно-производственный центр “ЭХО+” ул. Твардовского 8, Москва, 123458 Россия

*e-mail: bazulin@echoplus.ru

**e-mail: Sokolov@echoplus.ru

Поступила в редакцию 15.01.2019 г.

После доработки 19.02.2019 г.

Принята к публикации 20.03.2019 г.

В статье исследована возможность восстановления изображения отражателей методом Compressive Sensing (CS) по неполному набору эхосигналов, измеренных антенной решеткой в режиме двойного или тройного сканирования. Для сравнения с методом CS были также рассмотрены применяемые в ультразвуковом контроле методы восстановления отражателей: метод корреляции, метод комбинированного SAFT (C-SAFT) и метод максимальной энтропии. Последний метод позволяет восстанавливать изображения со сверхразрешением по неполному набору измеренных эхосигналов. В численных и модельных экспериментах продемонстрирована возможность восстановления изображения отражателей со сверхразрешением при значительном уменьшении объема используемых данных. Восстановленные методом CS изображения сравнивались с изображениями, восстановленными другими методами.

Ключевые слова: ультразвуковой неразрушающий контроль (УЗК), комбинированный SAFT (C-SAFT), двойное сканирование, Full Matrix Capture (FMC), метод максимальной энтропии (МЭ), метод Compressive Sensing (CS)

DOI: 10.1134/S0320791919040038

1. ВВЕДЕНИЕ

Получение информации о внутренней структуре промышленных объектов является актуальной проблемой и относится к классу обратных задач рассеяния, которые состоят в определении количественных характеристик неизвестных несплошностей на основе наблюдения за рассеянным облучающим полем. Для неразрушающего контроля важнейшая задача заключается в классификации обнаруженных отражателей, определении их размеров и координат залегания. Эта информация может быть использована специалистами по прочностным расчетам для оценки эксплуатационного ресурса объекта контроля.

В настоящее время широко используется технология ультразвукового контроля (УЗК) с применением пьезоэлектрических антенных решеток (АР), излучающих и принимающих акустические волны в исследуемом объекте. Широкое применение в практике УЗК нашли две технологии восстановления изображения отражателей с использованием АР: фазированные антенные решетки (ФАР) [1] и цифровая фокусировка антенной решетки (ЦФА) [2]. В работе [3] обе техноло-

гии сравниваются и делается вывод, что ЦФА-технология более перспективна в плане применения разнообразных алгоритмов восстановления изображения отражателей. Режим ЦФА – это технология получения акустических изображений со сплошной фокусировкой во всех точках области восстановления изображения (ОВИ). На первом этапе с помощью АР регистрируются эхосигналы при переборе всех комбинаций излучатель-приемник. Этот режим регистрации называется двойным сканированием (в зарубежных источниках – Full Matrix Capture (FMC)). На втором этапе по измеренным эхосигналам методом комбинационного SAFT (C-SAFT) [4] восстанавливается изображение отражателей.

Недостатком метода ЦФА является большой объем эхосигналов, измеренных АР в режиме двойного сканирования, который растет квадратично количеству ее элементов N_e . К примеру, для линейной 32-х элементной АР количество измеренных эхосигналов равно 1024, а для 64-х элементной – уже 4096. Это приводит к уменьшению скорости контроля из-за регистрации большого объема эхосигналов и их обменом между модуля-

ми ЦФА-дефектоскопа, что может быть достаточно критичным при контроле оборудования атомных электростанций, где время нахождения оператора в условиях повышенной радиации должно быть минимизировано. Один из вариантов уменьшения объема измеренных эхосигналов — это использование прореженной коммутационной матрицы \mathbf{C} размерами $N_e \times N_e$. Если элемент $C_{nm} = 1$, то это означает, что регистрируется эхосигнал, излученный n -м элементом и принятый m -м элементом АР. Для неактивных пар $C_{nm} = 0$. В режиме двойного сканирования все элементы матрицы \mathbf{C} равны единице. В ЦФА-дефектоскопе А1550 [5] коммутационная матрица \mathbf{C} имеет вид треугольной матрицы (Half Matrix Capture (HMC)), в которой от нуля отличны только $N_{tr} = (N_e + 1)N_e/2$ элементов. Для уменьшения объема регистрируемых эхосигналов коммутационную матрицу \mathbf{C} можно случайным образом заполнить N_{tr} единицами. Однако для случая $N_{tr} < 0.3N_e^2$ восстановить изображение отражателей методом ЦФА без заметной потери качества не удается.

Уменьшить объем измеренных эхосигналов и увеличить скорость их регистрации можно с использованием технологии CDMA (Code Division Multiple Access — множественный доступ с кодовым разделением) [6]. В этом случае все элементы АР одновременно излучают импульсы, но каждому элементу приписан свой сигнал из набора псевдоортогональных сигналов. В идеальном случае скорость регистрации эхосигналов может быть сокращена до одного такта, а количество измеренных эхосигналов уменьшено с N_e^2 до N_e . Однако необходимость излучать сложные сигналы усложняет электронный такт дефектоскопа.

Еще одной актуальной задачей УЗК является повышение качества и разрешающей способности изображения отражателей. Для этого разработаны относительно простые методы, например, метод когерентного фактора (CF) [7], метод Кейпона (Capon), Multiple Signal Classification (MUSIC) [8, 9], которые повышают разрешающую способность изображения и уменьшают уровень спеклового шума. Существуют нелинейные методы восстановления изображения отражателей, основанные на алгоритме Гершберга—Папулиса [10], которые позволяют получить разрешающую способность изображения, превышающую рэлеевскую. Особый класс составляют методы, которые также относятся к классу нелинейных, позволяющие получать изображения по неполным данным. К ним относятся метод максимальной энтропии (МЭ) [11] и метод распознавания со сжатием (в зарубежной литературе Compressive Sensing (CS)) [12–14]. Оба алгоритма позволяют

восстановить изображение отражателей со сверхразрешением и с малым уровнем “боковых лепестков” функции рассеивания точки, используя около 10% эхосигналов от полного набора ($N_{tr} < 0.1N_e^2$).

Метод CS позволяет обеспечить дополнительное уменьшение объема данных при их передаче, хранении и восстановлении изображения. Может возникнуть ситуация, что в ОВИ находится только один точечный отражатель, то есть в восстановленной матрице с изображением будет отличен от нуля только один элемент. Если АР измерено 1024 эхосигнала, каждый длиной 1000 отсчетов, то объем измеренных эхосигналов будет равен $N = 1024000$ отсчета. Возникает парадоксальная ситуация — для того чтобы получить ЦФА-изображение, в котором от нуля отличен только один пиксель, нужно зарегистрировать, обработать, передать и запомнить в 1024000 раз больше чисел. Метод CS при определенных условиях позволяет устранить это противоречие. В настоящий момент метод CS пытаются активно применять для получения высококачественных изображений по неполным данным в различных областях: компьютерная томография, УЗК [15], магнитно-резонансная томография [16], фотоакустическая томография [17], радиолокация [18] и многих других.

Данная статья посвящена применению метода CS для решения актуальных задач УЗК, а именно уменьшения объема данных, используемых для восстановления высококачественного изображения отражателей.

2. МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ

В этом разделе рассмотрены несколько линейных и нелинейных методов восстановления изображения отражателей.

2.1. Корреляционный метод, C-SAFT

Решение обратной задачи рассеивания заключается в том, чтобы по известным источникам поля $q(\mathbf{r}_r, t)$, расположенным в области S_r , и по измеренному в области S_r рассеянному полю $p(\mathbf{r}_r, t)$ найти функцию $\epsilon(\mathbf{r})$, описывающую отражающие свойства неоднородности в области S . Формально решение прямой задачи, то есть расчет рассеянного поля $p(\mathbf{r}_r, t) = p(\mathbf{r}_r, t; \mathbf{r}_i)$ по известным функциям $q(\mathbf{r}_r, t)$ и $\epsilon(\mathbf{r})$, можно записать в следующем виде

$$p(\mathbf{r}_r, t) = P(\mathbf{r}_r, \epsilon(\mathbf{r}), q(\mathbf{r}_r, t)). \quad (1)$$

Помещая точечный отражатель в произвольную точку \mathbf{r}_i , то есть полагая $\epsilon(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, можно

оценить вид функции $\epsilon(\mathbf{r})$ по корреляционной формуле

$$\hat{\epsilon}(\mathbf{r}_i) = \int \int \int \int p(\mathbf{r}_r, t) G(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i, t) d\mathbf{r}_r d\mathbf{r}_i dt, \quad (2)$$

$$G(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i, t) = P(\mathbf{r}_r, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), q(\mathbf{r}_i, t)).$$

Функция $G(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i, t)$ зависит от формы излученного импульса $s(t)$ и должна учитывать эффекты отражения, преломления и трансформации типов волн, анизотропии акустических свойств материалов и затухания звуковой волны. Чем точнее удастся решить прямую задачу (1) на основе выбранного варианта описания процесса излучения, распространения и рассеивания ультразвуковой волны, тем точнее можно восстановить изображение отражателей. Смысл функции $\epsilon(\mathbf{r})$, которую иногда называют рассеивающим потенциалом, зависит от типа решаемой задачи.

Часто функцию $s(t)$ заменяют на $\delta(t - t_{\max})$, где t_{\max} — время нарастания импульса, и выбирают одну акустическую схему. Под акустической схемой, которую обозначим как as , будем подразумевать описание лучевой траектории распространения импульса от излучателя до приемника при отражении от неровных границ объекта контроля с учетом трансформации типа волны. В этом случае выражение (2) трансформируется в формулу, описывающую метод C-SAFT [19]

$$\hat{\epsilon}(\mathbf{r}_i; as) = \int \int p(\mathbf{r}_r, t - t_{del}(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_i; as) + t_{\max}) d\mathbf{r}_r dt, \quad (3)$$

где $t_{del}(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_i; as)$ — время пробега импульса от излучателя до точки \mathbf{r}_i и к приемнику для заданной акустической схемы as . Для расчета времени пробега импульса по лучевой траектории можно воспользоваться вариационным принципом Ферма [20] или методом трассировки [21].

Если АР перемещается N_w раз по поверхности объекта контроля, регистрируя эхосигналы в режиме двойного сканирования в каждой точке, то такой режим назовем режимом тройного сканирования. Когерентная сумма парциальных изображений, восстановленных для каждого положения АР согласно (3), позволит получить объединенное (итоговое) изображение отражателей с более высокой фронтальной разрешающей способностью, например, за счет когерентного сложения по формуле

$$I(\mathbf{r}_i; as) = \left| \sum_{w=1}^{N_w} \hat{\epsilon}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_w; as) \right|, \quad (4)$$

где \mathbf{r}_w — вектор, определяющий положение АР на поверхности объекта контроля.

2.2. Метод максимальной энтропии

Если прямая задача линейна или ее удастся линеаризовать, как в случае борновского приближения, то формулу (1) можно записать в матричном представлении в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\mathbf{p} = \mathbf{G}\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{n}, \quad (5)$$

где матрица \mathbf{G} описывает распространение ультразвуковых волн от их источников в области S_i до точечного отражателя в области S и до области приема S_r , вектор \mathbf{n} — шум измерений. Так как матрица \mathbf{G} плохо обусловлена, то один из способов оценки $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ из уравнения (5) сводится к задаче безусловной оптимизации, когда в качестве критерия качества восстановленного изображения выбирается квадрат невязки решения

$$\chi^2(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) = \|\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{p}\|^2 = (\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{p})^T (\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{p}), \quad (6)$$

где символ T обозначает операцию транспонирования. Оценку $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ можно записать в виде

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \underset{\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \in R^{N_{i,x} \times N_{i,z}}}{\operatorname{argmin}} (\chi^2(\hat{\boldsymbol{\epsilon}})), \quad (7)$$

где $N_{i,x}$ и $N_{i,z}$ — размеры матрицы изображения в отсчетах. Решение уравнения (7) существует в явном виде и совпадает с расчетом корреляции, как и формула (2),

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c = 2\mathbf{G}^T \mathbf{p}. \quad (8)$$

Дальнейшее развитие метода (7), так называемая регуляризация по Тихонову А.Н. [22], заключается в добавлении к невязке штрафного функционала, один из вариантов которого имеет вид максимальной энтропии или, так называемой, кросс-энтропии [23]

$$H(\boldsymbol{\epsilon}_i) = -\sum_{i=1}^N \epsilon_i \ln \left(\frac{\epsilon_i}{\mu} \right), \quad (9)$$

где N — количество точек \mathbf{r}_i , в которых рассчитывается изображение, μ — оценка среднего значения интенсивности фона изображения. Таким образом, решение задачи сводится к минимизации невязки следующего выражения

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\alpha = \underset{\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \in R^{N_{i,x} \times N_{i,z}}}{\operatorname{argmin}} (\chi^2(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) - \alpha H(\hat{\boldsymbol{\epsilon}})), \quad (10)$$

где α — параметр регуляризации. Важное свойство функционала в виде энтропии заключается в том, что, используя формулу (10), можно получить изображение отражателей со сверхразрешением, то есть с разрешением выше чем рэлеевское разрешение. Для достижения максимальной скорости решения задачи минимизации (10) нужно пользоваться методами второго порядка [24], для чего требуется формула расчета градиента и гес-

сиана целевой функции $\chi^2(\hat{\epsilon})$. Статья [25] посвящена получению изображения отражателей со сверхразрешением методом МЭ по экосигналам, измеренным ультразвуковой АР решеткой.

2.3. Метод распознавания со сжатием (CS)

Описание метода. Идея метода заключается в переходе от определенной СЛАУ размерностью $N \times N$ согласно (5) к решению недоопределенной СЛАУ размерностью $K \times N$, причем при $K \ll N$. Такой переход можно осуществить, используя матрицу \mathbf{A} размерами $N \times K$ и сводя задачу (5) к уравнению

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{G}\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\epsilon}, \quad \text{где } \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{A}\mathbf{G}, \quad (11)$$

в которой результаты измерений представлены как вектор \mathbf{y} длиной всего K "отсчетов". Для однозначного решения задачи (11) нужно, чтобы сигнал $\boldsymbol{\epsilon}$ обладал определенными свойствами, специальным образом перейти к недоопределенной системе СЛАУ и разработать методы решения задачи (11).

Необходимым условием работы CS-метода, то есть однозначного решения недоопределенного уравнения (11), является разреженность восстанавливаемого сигнала $\boldsymbol{\epsilon}$. Сигнал называется S -разреженным [11], если большинство его элементов равны нулю, то есть

$$\|\boldsymbol{\epsilon}\|_0 = S \ll N, \quad (12)$$

где $\|\boldsymbol{\epsilon}\|_0$ – норма l_0 , представляющая собой количество ненулевых компонент в векторе $\boldsymbol{\epsilon}$ и N – длина вектора $\boldsymbol{\epsilon}$.

Для разреженного сигнала $\boldsymbol{\epsilon}$ можно подобрать специальную матрицу \mathbf{A} размерами $K \times N$, причем K связан с разреженностью S через формулы (16) или (17), см. ниже. Для применимости метода CS, согласно [11], необходимыми и достаточными, являются следующие условия.

1) Сигнал $\boldsymbol{\epsilon}$ должен быть S -разреженным, то есть в базисе \mathbf{G} иметь вид

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \mathbf{G}_i, \quad (13)$$

где среди N отсчетов только S отсчетов $\epsilon_i \neq 0$.

2) Должно выполняться "свойство ограниченной изометрии" (Restricted Isometry Property) [26]

$$\sqrt{1 - \delta} \leq \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{G}\boldsymbol{\epsilon}\|_2}{\|\boldsymbol{\epsilon}\|_2} \leq \sqrt{1 + \delta}, \quad (14)$$

где $\delta \in (0, 1)$ и $\boldsymbol{\epsilon}$ – произвольный ненулевой вектор. Это свойство означает, что после воздействия оператора $\mathbf{A}\mathbf{G}$ на вектор $\boldsymbol{\epsilon}$ l_2 -норма вектора \mathbf{y} не может стать равной нулю или превысить свое значение в ≈ 1.4 раза.

3) Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{G} должны удовлетворять свойству некогерентности, то есть векторы матриц \mathbf{A} и \mathbf{G} должны быть практически ортогональны между собой

$$\mu(\mathbf{A}, \mathbf{G}) = \sqrt{N} \max_{i,j} \frac{|\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{g}_j \rangle|}{\|\mathbf{a}_i\|_2}. \quad (15)$$

Из работы [13] следует, что с высокой долей вероятности точное восстановление S -разреженных векторов по K измерениям будет достигнуто при выполнении следующего условия:

$$K \geq c\mu(\mathbf{A}, \mathbf{G})^2 S \lg N, \quad (16)$$

где c – некоторая положительная константа. Хорошие результаты получаются и для более простого соотношения

$$K = 4S \lg(N/S). \quad (17)$$

Матрица \mathbf{A} , составленная из случайных чисел, с большой вероятностью удовлетворяет второму и третьему из перечисленных выше требований. Существуют различные принципы построения рандомизированных матриц [27]. При проведении исследований использовались следующие типы распределений: равномерное распределение, нормальное распределение и распределение Бернулли. Для разных вариантов формирования матрицы \mathbf{A} численная проверка показала соблюдение условий согласно формулам (14) и (15), необходимым для корректной работы метода CS. Для выбора оптимального распределения матрицы \mathbf{A} оценивалось также качество восстановленных изображений, при одинаковых параметрах и размерностях, но для разных типов распределений при формировании рандомизированной матрицы \mathbf{A} . При этом заметного преимущества одного способа формирования матрицы \mathbf{A} перед другим не было выявлено, однако, в статье [28] утверждается, что наилучшим является вариант построения матрицы с использованием распределения Бернулли.

В концепции CS решение уравнения (11), при условии разреженности сигнала, сводится к задаче оптимизации

$$\|\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{CS}\|_1 \rightarrow \min \quad \text{при } \mathbf{p}_{CS} = \mathbf{A}\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{CS}. \quad (18)$$

Решение задачи (11) возможно различными способами, однако наиболее распространенным является метод линейного программирования, позволяющий производить поиск максимально разреженного вектора $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{CS}$, удовлетворяющего заданному условию.

В постановке задачи при условии наличия шума решение уравнения (11) сводится к решению задачи оптимизации

$$\|\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{CS}\|_1 \rightarrow \min \quad \text{при } \|\mathbf{p}_{CS} - \mathbf{A}\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{CS}\|_2 < \delta, \quad (19)$$

где δ – регуляризирующий параметр, величина которого влияет на точность работы алгоритма. Данный параметр можно определить, воспользовавшись формулой

$$\delta = \sigma\sqrt{K}\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}}}, \quad (20)$$

где σ – величина дисперсии шума [29].

Существует также альтернативная постановка задачи (11), называемая LASSO-задачей [30], подобная методу наименьших квадратов и заключающаяся в минимизации $\|\mathbf{p}_{CS} - \mathbf{A}\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{CS}\|_2$ при условии разреженности вектора $\boldsymbol{\epsilon}$, которую можно представить как

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_{CS} - \mathbf{A}\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{CS}\|_2 \rightarrow \min \\ \text{при } \|\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{CS}\|_1 < \tau, \end{aligned} \quad (21)$$

где τ – параметр, учитывающий разреженность вектора $\boldsymbol{\epsilon}$. Восстановление отражателей по формулам (18) и (21) производилось при использовании библиотеки SPGL1 [31].

Геометрическая интерпретация работы метода CS. Для геометрической интерпретации работы метода CS рассмотрим вариант, когда $N = 2$. Разреженность сигнала $\boldsymbol{\epsilon}$ означает, что он может иметь либо вид $\{\epsilon_1, 0\}$, либо вид $\{0, \epsilon_2\}$, то есть $S = 1$. На левой части рис. 1 кругом показан сигнал, который нужно восстановить по вектору \mathbf{y} размером $K = 1$ и который получен по формуле (18) в результате измерения сигнала (показан на правой части рис. 1 звездой). Так как $N > K$, то матрица Φ имеет нуль-плоскость $\mathbf{N}(\Phi)$, схематически показанную на левой части рис. 1 серой сплошной линией. Если справедливо утверждение $\mathbf{y} = \Phi\boldsymbol{\epsilon}$, то для любого $\boldsymbol{\epsilon}' \in \mathbf{N}(\Phi)$, который показан на рис. 1 кружком, также справедливо $\mathbf{y} = \Phi(\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}')$.

При использовании l_2 -нормы восстановить $\boldsymbol{\epsilon}$ по \mathbf{y} можно, найдя кратчайшее расстояние от центра координат системы $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ до смещенной нуль-плоскости, которая на левой части рис. 1 показана серой пунктирной линией. Решением задачи будет точка соприкосновения “раздувающейся” окружности со смещенной нуль-плоскостью. Полученное решение $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{МНК}}$, отмеченное толстой окружностью, не является разреженным сигналом и не совпадает с точным решением $\boldsymbol{\epsilon}$. Если матрицу \mathbf{A} сконструировать таким образом, что нуль-плоскость будет перпендикулярна оси ϵ_1 , то в этом частном случае будет найдено точное решение $\boldsymbol{\epsilon}$. Однако поиск решения на оси ϵ_2 даст неверный ответ. Если воспользоваться l_1 -нормой, то решением задачи будет нахождение точки соприкосновения “раздувающегося” квадрата со сме-

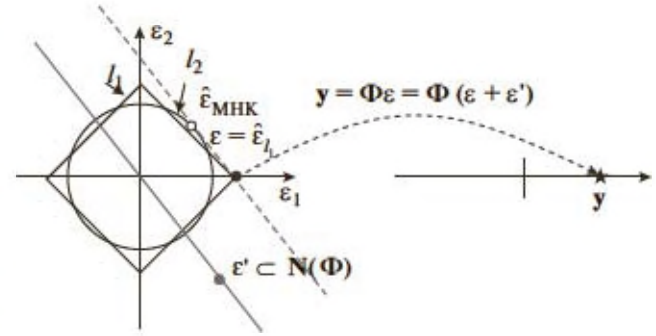


Рис. 1. Геометрическая интерпретация работы метода CS.

щенной нуль-плоскостью. Как видно из рис. 1, найденное решение $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_l$ будет совпадать с искомым $\boldsymbol{\epsilon}$.

Интерпретировать работу метода CS можно и с лингвистической точки зрения. Представим ситуацию, что человека, владеющего двумя языками – языком первобытного племени и русским языком¹, – нужно попросить из множества разложенных перед ним предметов выбрать зонт $\boldsymbol{\epsilon}$. Обращаясь к нему на языке племени, мы опишем искомым предмет так: “Складной домик, под которым бледнолицые люди прячутся от дождя”. Этой информации в виде последовательности из 9 слов (вектор \mathbf{p}) вполне хватает, чтобы найти зонт и решить обратную задачу. Если бы мы обратились к человеку на русском языке, сказав только одно слово “зонт” (вектор \mathbf{y}), то задача поиска также была бы решена.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В численных экспериментах восстанавливались изображения 12 точечных отражателей с коэффициентами отражения 1.0, 0.5 и 0.1, расположенных в вершинах квадратов с ребром 1 мм и центрами в точках (4, 9), (0, 13) и (–4, 17) мм. Предполагалось, что для излучения и приема импульсов использовалась АР с рабочей частотой 5.0 МГц, состоящая из 8-ми точечных элементов на расстоянии друг от друга 2 мм. На рис. 2а показано изображение, восстановленное методом корреляции по формуле (8) при отсутствии шума. Высокий уровень ложных бликов, связанный с грубым шагом в 2 мм между элементами АР при длине волны 1.18 мм, не позволил обнаружить отражатели с коэффициентами отражения 0.1, а обнаруженные отражатели с коэффициентами отражения 0.5 и 1.0 не разрешились между собой. На рис. 2б показано CS-изображение, восстановленное по формуле (18), на котором удалось обна-

¹ Конечно, возможна и обратная ситуация, когда для передачи смысла одного слова на языке первобытного племени понадобится несколько слов на русском языке.

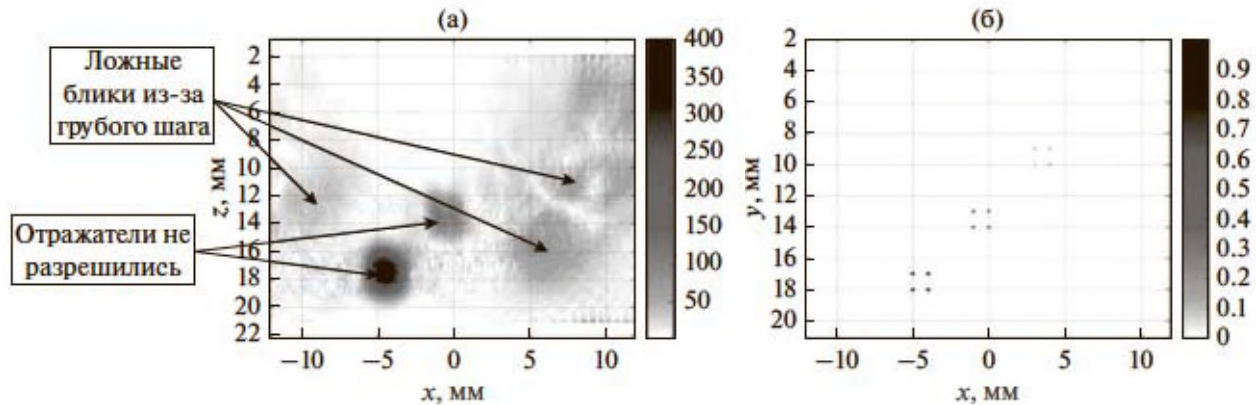


Рис. 2. Изображение 12 точечных отражателей: (а) корреляция, (б) метод CS.

ружить все 12 точечных отражателей и с высокой точностью определить их коэффициент отражения.

Если добавить к эхосигналам шум с равномерным распределением в диапазоне 5% от максимального значения эхосигналов, то изображение, восстановленное по формуле (18), оказывается настолько зашумленным, что обнаружить точечные отражатели совершенно невозможно. Это связано с тем, что алгоритм (18) эффективно работает только при отсутствии шума. Алгоритмы (19) или (21) по зашумленным эхосигналам восстанавливают CS-изображение, по которому сложно уверенно обнаружить все отражатели из-за большого количества ложных бликов. Однако, если использовать N_A рандомизирующих матриц A для восстановления N_A CS-изображений, то после их объединения, например, как сумма или медиана, можно получить изображение, очень близкое к тому, что показано на рис. 2б. Понятно, что такой подход замедляет работу метода CS и снижает степень сжатия D , которую можно определить как

$$D = D_C \frac{N}{KN_A}, \quad (22)$$

где $D_C = N_e^2 / N_r$ – отношение числа полного набора эхосигналов N_e^2 коммутационной матрицы C к числу используемых N_r . Чем больше D , тем больше степень сжатия. Если для восстановления изображения отражателей используются все измеренные эхосигналы, то $D = 1$.

3.1. Требования к объему памяти

Оценим требуемый объем оперативной памяти (ОП), необходимой для работы CS-метода, и сравним его с объемом ОП, требуемым для методов C-SAFT, корреляции и МЭ. Будем исходить из того, что с помощью 32-х элементной АР в режиме двойного сканирования измеряется

1024 эхосигнала, каждый длиной 1024 двухбайтовых чисел. Объем измеренных эхосигналов будет равен 2 Мбайт. Будем полагать, что для методов корреляции, МЭ и CS за счет применения прореженной коммутационной матрицы C используется только четверть эхосигналов ($D_C = 4$). Комплексное изображение восстанавливается на ОВИ размерами 256×256 пикселей, для хранения которого потребуется 0.5 Мбайт ОП. Таким образом, для работы метода C-SAFT нужно выделить всего 2.5 Мбайт для хранения измеренных эхосигналов и ОВИ (см. табл. 1). Для работы метода корреляции по формуле (8) требуется матрица G^T размерами $N \times N$ ($N = 256 \times 256 = 65536$ чисел в вещественном формате), для хранения которой необходимо 16 Гбайт ОП. Методу МЭ для хранения матриц G , G^T и H нужно выделить уже 48 Гбайт ОП. Метод CS использует матрицу G и матрицы A и Φ размерами $N \times K$. Если $K = 1024$, то необходимый объем ОП для хранения матрицы A и Φ равен 0.25 Гбайт.

Таким образом, исходя из размеров рассчитываемых матриц, необходимый объем ОП для расчетов методом МЭ должен быть не менее 64 Гбайт. Отметим, что современный персональный компьютер с ОП объемом 128 Гбайт и более не является исключительным случаем.

Определенные проблемы вызывает скорость расчета матрицы G . Достичь значительного ускорения расчетов (в $\approx 10^3$ раза) можно, используя графические карты с технологией NVIDIA CUDA™ [32], с помощью которых можно распараллелить вычисления элементов матрицы G .

4. МОДЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В данном разделе представлены результаты восстановления изображений несплошностей в образцах с применением описанных выше алго-

Таблица 1. Оценка объема ОП, необходимого для восстановления изображения

Операция/Метод	C-SAFT	Корреляция	МЭ	CS
Эхосигналы, Гбайт	0.002	0.0005	0.0005	0.0005
Изображение, Гбайт	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005
Матрица G , Гбайт	–	–	16.0	16.0
Матрица G^T , Гбайт	–	16.0	16.0	–
Гессиан H , Гбайт	–	–	16.0	–
Матрица A , Гбайт	–	–	–	0.25
Матрица Φ , Гбайт	–	–	–	0.25
Итоговый размер, Гбайт	0.0025	≈ 16.0	≈ 48.0	≈ 16.5

ритмов. Для регистрации эхосигналов использовался ЦФА-дефектоскоп “АВГУРАРТ”, разработанный и изготавливаемый “Научно-производственным центром неразрушающего контроля “ЭХО+” [33].

4.1. Тест перерасеяния, продольная волна

На рис. 3 приведена схема эксперимента с дюралюминиевым образцом, в котором были просверлены 12 отверстий бокового сверления диаметром 0.5 мм. Восстанавливались изображения четырех отверстий, расположенных в вершинах квадрата с ребром 2 мм и центром на глубине ≈ 38 мм. Для регистрации эхосигналов использовалась АР (5 МГц, 32 элемента, размер пьезоэлемента 0.9×10 мм, зазор между пьезоэлементами 0.1 мм), установленная на плексигласовую призму с углом наклона 20° . Квадратом отмечена ОВИ.

На рис. 4 показаны изображения отражателей, восстановленные методами C-SAFT и корреляции по акустической схеме, когда излучается и принимается продольная волна. На рис. 4б окружностями нанесены контуры отверстий, а используемая при восстановлении акустическая схема показана на изображении в правом верхнем углу. Лучи продольной волны показаны стрелками. C-SAFT-изображение было получено по формуле (3) по полному набору из эхосигналов, а корреляционное изображение было получено по формуле (8) с использованием $N_r = 200$ эхосигналов, что составляет 19.5% от полного набора из $N_e^2 = 1024$ эхосигналов. Меньшее количество используемых эхосигналов в корреляционном методе обусловлено тем, что для расчета изображения по формуле (8) в памяти компьютера объе-

мом 64 Гбайт можно было хранить матрицу G^T размерами 20000×20000 элементов. Поэтому из всех измеренных эхосигналов пришлось выделить фрагмент из 100 отсчетов. Это привело к появлению на рис. 4б характерной дуги, которой нет на рис. 4а. Недостаточно высокая разрешающая способность изображений на рис. 4 не позволила определить не только тип отражателей, но и их количество.

На рис. 5а показан результат восстановления изображения методом МЭ по формуле (10) по 200 эхосигналам ($\alpha = 10$, $\mu = 10^{-5}$). Продольная и фронтальная разрешающие способности изображения возросли более чем в два раза в сравнении с изображениями, полученными методами C-SAFT и корреляции (рис. 4). На МЭ-изображении уверенно видны блики трех отверстий. Амплитуда блика четвертого отверстия из-за эффекта затенения оказалась недостаточно большой для его обнаружения. На рис. 5б показано CS-изображение ($\tau = 0.1$, $N_A = 15$), восстановленное по формуле (19)

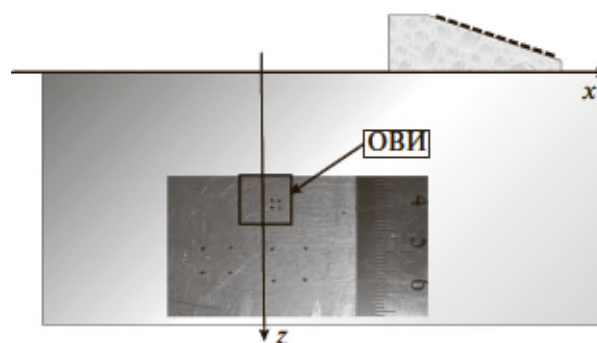


Рис. 3. Изображение теста перерасеяния и АР на призме.

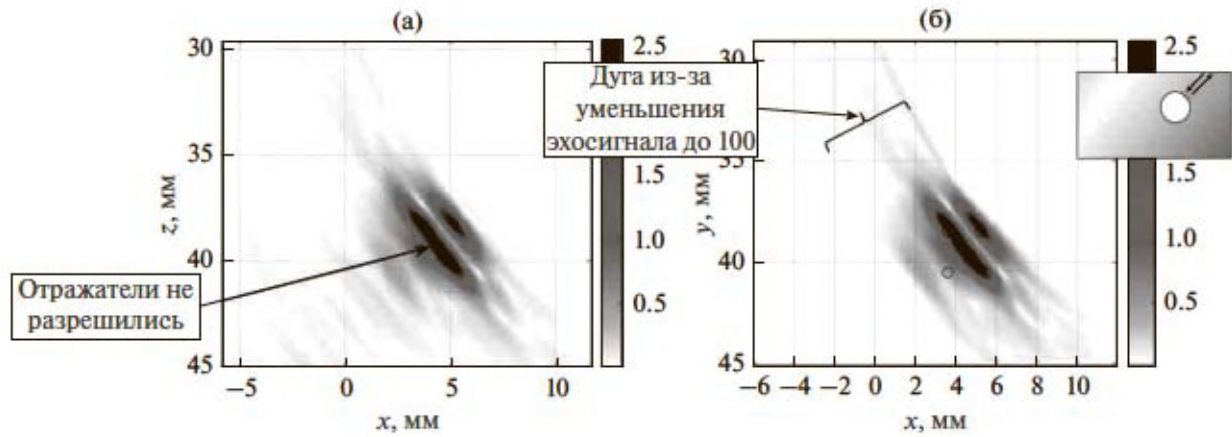


Рис. 4. Изображение самой близкой к поверхности группы отверстий бокового сверления теста перерасеяния: (а) метод C-SAFT, (б) корреляция.

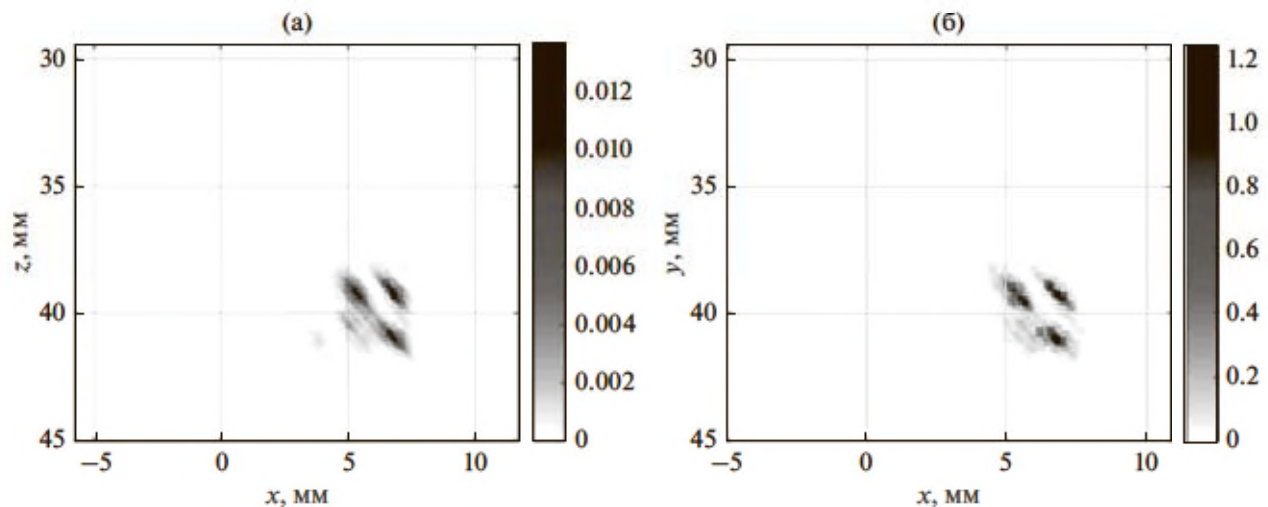


Рис. 5. Изображение самой близкой к поверхности группы отверстий бокового сверления теста перерасеяния: (а) метод МЭ, (б) метод CS.

с матрицей Φ размерами $K \times N$, где $K = 180$. Пятнадцать парциальных CS-изображений объединялись в итоговое изображение как медиана. CS-изображение оказалось достаточно похожим на МЭ-изображение как по величине разрешающей способности, так и по уровню шума. Однако, восстановление 15 парциальных CS-изображений привело к увеличению времени расчетов. Но даже в этом случае степень сжатия достаточно высокая, $D = 35$. В табл. 2 сведены основные параметры изображений, полученные рассмотренными методами. Отношение сигнал/шум оценивалось по отношению максимального значения модуля изображения к его среднему.

4.2. Тест перерасеяния, поперечная волна, технология CDMA

Как упоминалось в разделе 1, для реализации технологии CDMA все элементы AP должны одновременно излучать каждый свой специальный зондирующий импульс $s_n(t)$, а эхосигналы должны одновременно приниматься всеми элементами AP. Эхосигнал $p_m(t)$, измеренный в режиме CDMA m -ым элементом AP, можно представить как

$$p_m(t) = \sum_{n=1}^{N_e} p_{n,m}(t), \quad (23)$$

Таблица 2. Параметры восстановленных изображений методами: C-SAFT, корреляция, МЭ и CS для теста перераспределения

Метод	C-SAFT	Корреляция	МЭ	CS
Степень сжатия D	1	5	5	35
Лучевое разрешение, мм	0.9	0.9	0.4	0.4
Фронтальное разрешение, мм	2.5	2.5	1.2	1.2
Отношение сигнал/шум, дБ	47.0	44.0	70.0	77.0

где $p_{n,m}(t)$ — эхосигнал, измеренный в режиме двойного сканирования, когда излучил n -ый элемент АР, а зарегистрировал эхосигнал элемент с номером m .

Первый вариант восстановления изображения отражателей при одновременном излучении заключается в декодировании эхосигналов $p_m(t)$ для оценки эхосигналов $\tilde{p}_{n,m}(t)$, которые были бы измерены в режиме двойного сканирования. По декодированным эхосигналам $\tilde{p}_{n,m}(t)$ можно восстановить изображение методом C-SAFT по формуле (3) или корреляционным методом по формуле (2) или (8).

Для эффективного декодирования эхосигналов корреляционная функция $R_{n,m}(\tau)$ набора кодирующих сигналов $\{s_n(t)\}_{n=1}^{N_e}$, состоящего из N_e сигналов и предназначенного для возбуждения элементов АР, должна обладать свойством ортогональности

$$R_{n,m}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_n(t)s_m(t+\tau)dt = \delta_{n,m}\delta(\tau), \quad (24)$$

$$n, m = 1, 2, \dots, N_e,$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера. Сигналов для практического использования с таким свойством не известно, однако разработано несколько наборов из N_e кодирующих сигналов $s_n(t)$, которые в той или иной степени приближаются к идеальному набору со свойством (24). Наборы таких сигналов называются псевдоортогональными. К ним относятся фазоманипулированные сигналы, кодированные последовательностью длиной N_e . Закон изменения фазы каждого периода зондирующего сигнала может определяться кодами Касами [34], Голда [35], де Брейна [36], у которых фаза каждого чипа может принимать значения 0 или 180 градусов. Можно использовать последовательности Задова—Чу [37], имеющие специально рассчитанную фазу каждого чипа в диапазоне от

–180 до 180 градусов. Каждый чип может определять фазу одного периода на несущей частоте f_c , но возможен вариант случайного изменения частоты $f_c + \delta f$ от чипа к чипу.

Распространенным методом декодирования сигналов $p_m(t)$ является согласованная фильтрация с кодовым сигналом $s_n(t)$ по формуле

$$\tilde{p}_{n,m}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_m(\tau)s_n(\tau-t)d\tau. \quad (25)$$

Такой алгоритм сжатия сложных сигналов обладает высоким быстродействием и позволяет получать изображения с частотой более 10 Гц, но он не позволяет получить низкий уровень межканальных помех и достичь эффекта сверхразрешения. При декодировании эхосигналов по формуле (25) уровень межканальных помех, то есть среднюю величину функции корреляции $R_{n,m}(\tau)$ для $n \neq m$, можно оценить как $1/\sqrt{N_e}$.

Второй вариант восстановления изображения не предполагает декодирования эхосигналов $p_m(t)$, а изображение отражателей получается методом МЭ (см. раздел 2.2) или методом CS (см. раздел 2.3), когда матрица \mathbf{G} формируется из эхосигналов $p_m(t)$.

Для регистрации эхосигналов использовалась АР (5 МГц, 32 элемента, размер пьезоэлемента 0.75×10 мм, зазор между пьезоэлементами 0.25 мм), установленная на рексолитовую призму с углом наклона 35° . Призма была размещена на образце примерно так же, как показано на рис. 3. Измерения в режиме CDMA проводились для двух положений АР, в каждом из которых использовался свой кодовый набор $\{s_n(t)\}_{n=1}^{N_e}$ из $N_e = 32$ сигналов, сформированных из кодов Касами длиной $N_e = 15$. Несущая частота каждого периода зондирующего сигнала случайно менялась в диапазоне от 3.0 до 7.0 МГц ($\delta f = 2.0$ МГц).

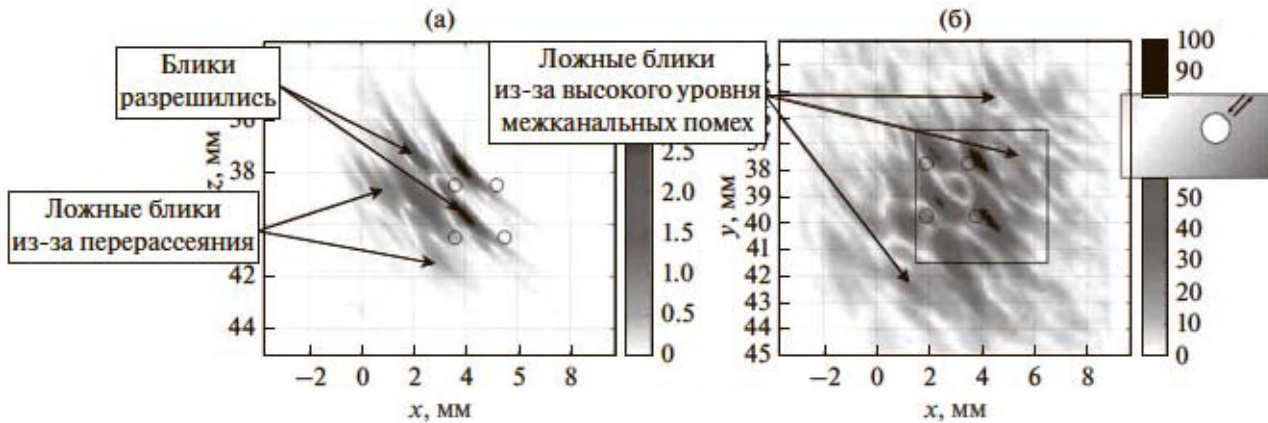


Рис. 6. Изображение самой близкой к поверхности группы отверстий бокового сверления теста перерасеяния: (а) метод C-SAFT простой, сигнал, (б) корреляция, CDMA, коды Касами.

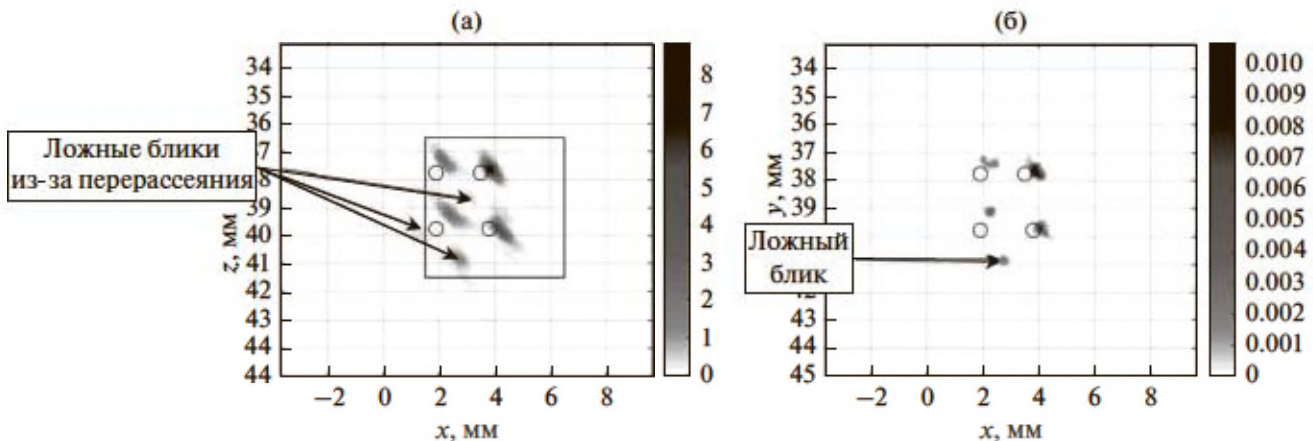


Рис. 7. Изображение самой близкой к поверхности группы отверстий бокового сверления теста перерасеяния: (а) метод МЭ, (б) метод CS

На рис. 6а показано C-SAFT-изображение, восстановленное по формуле (3) по полному набору эхосигналов $p_{n,m}(t)$ на поперечной волне при излучении простого сигнала, и поэтому имеет более высокую разрешающую способность, чем изображение на рис. 4а. Ложные блики, сформированные импульсами, перерасеянными между отверстиями, не позволяют определить тип и количество отражателей. На рис. 6б показано корреляционное изображение, восстановленное по формуле (8) по эхосигналам $p_m(t)$, полученным по технологии CDMA для двух кодовых наборов $\{s_n(t)\}_{n=1}^{N_e}$. Использовалось $N_r = 64$ суммарных эхосигналов $p_m(t)$, что составляет 3.1% от полного набора из 2048 эхосигналов при использовании простого зондирующего сигнала для двух положений АР. Корреляционное изображение имеет ложные блики большой амплитуды, возникшие

из-за высокого межканального шума кодового набора $\{s_n(t)\}_{n=1}^{N_e}$, которые делают это изображение не пригодным для анализа. На рис. 6б окружностями нанесены контуры отверстий, а используемая при восстановлении акустическая схема показана на изображении в правом верхнем углу. Лучи поперечной волны показаны стрелками.

На рис. 7а показано МЭ-изображение, восстановленное по формуле (10) по 64 эхосигналам ($\alpha = 25$, $\mu = 10^{-5}$) с размером матрицы \mathbf{G} , равным $N \times N$, где $N = 25600$. Продольная и фронтальная разрешающие способности изображения возросли более чем в два раза (см. табл. 3) в сравнении с изображениями, полученными методами C-SAFT и корреляции (рис. 6). На МЭ-изображении уверенно видны блики четырех отверстий, но имеется ложный блик, близкий по амплитуде к блику границы отверстия, что затрудняет точное

Таблица 3. Параметры восстановленных изображений методами: C-SAFT, корреляция, МЭ и CS для теста перераспределения в режиме CDMA

Метод по режиму CDMA	C-SAFT	Корреляция	МЭ	CS
Степень сжатия D	1	32	32	182
Лучевое разрешение, мм	0.6	0.6	0.3	0.3
Фронтальное разрешение, мм	1.8	1.8	0.7	0.5
Отношение сигнал/шум, дБ	23.6	11.2	52.4	68.3

Таблица 4. Параметры восстановленных изображений методами: C-SAFT, корреляция, МЭ и CS для трещины с неровным дном при эхо-регистрации

Метод	C-SAFT	Корреляция	МЭ	CS
Степень сжатия D	1	7.1	7.1	51.2
Отношение сигнал/шум, дБ	21.7	11.3	40.1	46.7
Высота паза, мм	4.6	4.7	4.1	4.1

определение числа отражателей. На рис. 7б показано CS-изображение ($\tau = 3$, $N_A = 10$), восстановленное по формуле (21) с матрицей Φ размерами $K \times N$, где $K = 449$. Десять парциальных CS-изображений объединялись в итоговое как медиана. CS-изображение оказалось достаточно похожим на МЭ-изображение как по величине разрешающей способности, так и по уровню шума. В данном примере удалось, за счет замены исходных эхосигналов \mathbf{p} на "информационно обогащенный" вектор \mathbf{u} , достичь очень высокого коэффициента сжатия $D = 182$.

4.3. Модель придонной трещины в образце с неровным дном

На рис. 8 показано фото стального образца толщиной $h = 18$ мм с неровным дном и с моделью придонной трещины в виде паза шириной 0.7 мм с вершиной на глубине 12 мм. Для регистрации эхосигналов использовалась АР (5 МГц, 32 элемента, размер пьезоэлемента 0.5×10 мм,

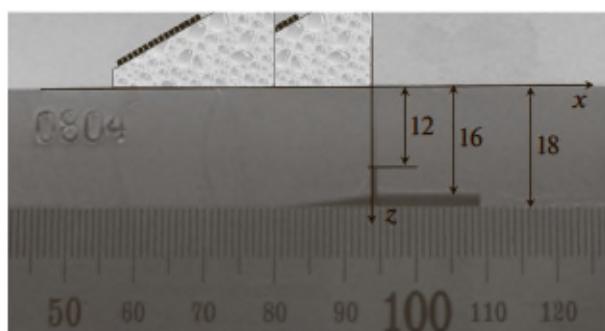


Рис. 8. Фотография образца с моделью трещины и схематическое изображение АР в двух положениях, где измерялись эхосигналы (0 и -13 мм).

зазор между пьезоэлементами 0.1 мм), установленная на рексолитовую призму с углом наклона 35° . Эхосигналы измерялись для двух положений АР: 0 и -13 мм от передней грани призмы до начала трещины, как показано на рис. 8.

На рис. 9 показано изображение трещины, восстановленное методом C-SAFT (формула (3)) и корреляции (формула (8)) при однократном отражении от дна эхосигналов для двух положений АР в предположении, что излучение и прием происходит на поперечной волне. Сплошной линией представлен контур дна и паза образца, а используемая акустическая схема показана на изображении в правом верхнем углу. C-SAFT-изображение (рис. 9а) было получено по полному набору из $2N_e^2$ эхосигналов, а корреляционное изображение (рис. 9б) было восстановлено с использованием $N_e = 288$ эхосигналов, что составляет 14.1% от полного набора из 2048 эхосигналов. Несмотря на то, что удалось восстановить изображение границы трещины, наличие ложных бликов затрудняет анализ изображения, а невысокая разрешающая способность не позволяет определить высоту паза даже с точностью ± 0.5 мм.

На рис. 10 показаны результаты восстановления изображения трещины по 288 эхосигналам методами МЭ по формуле (10) ($\alpha = 7$, $\mu = 10^{-5}$) и методом CS ($\tau = 0.1$, $N_A = 5$). CS-изображение было восстановлено по формуле (21) как медиана парциальных изображений для $N_A = 5$ вариантов рандомизирующей матрицы \mathbf{A} с матрицей Φ размерами $K \times N$, где $K = 400$. Размер матрицы \mathbf{G} равен $N \times N$, где $N = 14400$. При сравнении с изображениями, полученными методом C-SAFT и корреляции (рис. 9), оба метода позволили увеличить лучевую и фронтальную разрешающие способности более чем в два раза, при уменьшении амплитуды ложных бликов более чем на 20 дБ.

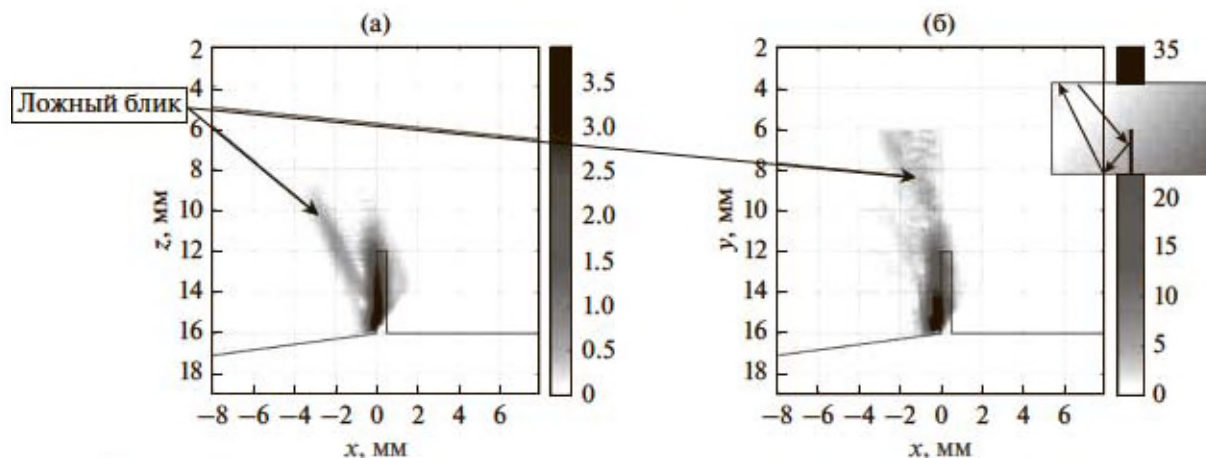


Рис. 9. Изображение модели трещины при однократном отражении от дна: (а) метод C-SAFT, (б) корреляция.

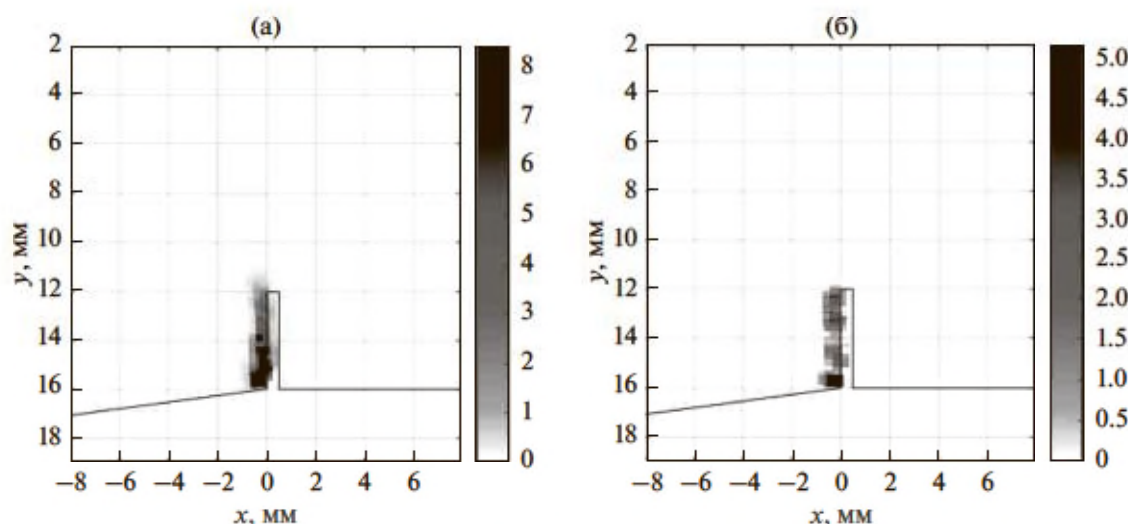


Рис. 10. Изображение трещины в виде паза шириной 0.7 мм с неровным дном по акустической схеме: (а) метод МЭ, (б) метод CS.

Высота трещины оценивалась по координатам точки перегиба среза изображения вдоль оси z для координаты $x = -0.1$ мм (см. табл. 4).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье было проведено сравнение изображений объемных и плоскостных отражателей, восстановленных методом C-SAFT, корреляционным методом, методом МЭ и методом CS, по эхосигналам, измеренным АР. На основе проведенных исследований можно сделать выводы, что CS-метод позволяет:

1) Повысить скорость регистрации эхосигналов в среднем в пять раз за счет уменьшения числа измеряемых эхосигналов. Такого же эффекта можно достичь и при восстановлении изображения отражателей методом МЭ.

2) Дополнительно уменьшить объем данных, по которым в модельном эксперименте удалось

восстановить CS-изображение отражателей, более чем в пять раз.

3) Повысить лучевую и фронтальную разрешающие способности CS-изображения более чем в 2 раза по сравнению с изображениями полученными методами C-SAFT и корреляции. По полученной разрешающей способности CS-изображения соизмеримы с МЭ-изображениями.

4) уменьшить уровень шума более чем на 20 дБ. По достигнутому уровню шума CS-изображения соизмеримы с МЭ-изображениями.

5) Восстановить высококачественное изображение отражателей по эхосигналам, полученным по технологии CDMA.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Advances in Phased Array Ultrasonic Technology Applications. Publisher: Waltham, MA: Olympus NDT, 2007.

2. Воронков В.А., Воронков И.В., Козлов В.Н., Самокрутов А.А., Шевалдыкин В.Г. О применимости технологии антенных решеток в решении задач ультразвукового контроля опасных производственных объектов // В мире неразрушающего контроля. 2011. № 1. С. 64–70.
3. Базулин Е.Г. Сравнение систем для ультразвукового неразрушающего контроля, использующих антенные решетки или фазированные антенные решетки // Дефектоскопия. 2013. № 7. С. 51–75.
4. Парфенов В.И., Голованов Д.Ю. Обнаружение дискретных разреженных сигналов с частотой дискретизации, не превышающей частоту Найквиста // Журн. радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. № 6. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/jun17/1/text.pdf> (дата обращения: 23.03.2019).
5. Высокочастотный ультразвуковой томограф "A1550 IntroVisor" // URL: http://acsys.ru/production/?type_id=16&subtype_id=7&product_id=106 (дата обращения: 23.03.2019).
6. Bazulin A., Bazulin E. Increasing ultrasonic array data acquisition rate through the use of Kasami codes and the maximum entropy method // Applied Physics Research. 2016. V. 8. № 1. P. 47–63. <https://doi.org/10.5539/apr.v8n1p47>
7. Camacho J., Parrilla M., Fritsch C. Phase Coherence Imaging // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Contr. 2009. V. 56. № 5. P. 958–974.
8. Okumura S., Taki H., Sato T. Stabilization techniques for high resolution ultrasound imaging using beam-space Capon method // 2015 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), South Brisbane, QLD. 2015. P. 892–896.
9. Малышкин Г.С., Сидельников Г.Б. Оптимальные и адаптивные методы обработки гидроакустических сигналов (обзор) // Акуст. Журн. 2014. Т. 60. № 5. С. 526–545.
10. Базулин Е.Г. Двумерная адаптивная экстраполяция спектра многочастотных акустических голограмм // Акуст. Журн. 1991. Т. 37. № 1. С. 8–16.
11. Базулин А.Е., Базулин Е.Г. Деконволюция сложных эхосигналов методом максимальной энтропии в ультразвуковом неразрушающем контроле // Акуст. Журн. 2009. № 6. С. 772–783.
12. Граничин О.Н. Рандомизация измерений и l_1 -оптимизация // Стохастическая оптимизация в информатике. 2009. № 5. С. 3–23.
13. Donoho D.L. Compressed sensing // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. P. 1289–1306.
14. Foucart S., Rauhut H. A mathematical introduction to compressive sensing. Basel, Birkhauser, 2013. 585 p.
15. Guarneri G.A., Pipa D.R., Junior F.N., de Arruda L.V.R., Zibetti M.V.W. A sparse reconstruction algorithm for ultrasonic images in nondestructive testing // Sensors. 2015. V. 15. P. 9324–9343.
16. Минаков Е.И., Серегин П.С. Сравнительный анализ методов параллельной реконструкции изображений магнитно-резонансной томографии // Цифровая обработка сигналов. 2012. № 3. С. 23–28.
17. Provost J., Lesage F. The application of compressed sensing for photo-acoustic tomography // IEEE Trans. Med. Imag. 2009. V. 28. № 4. P. 585–594.
18. Knee P. Sparse representations for radar with MATLAB R examples. Synthesis Lectures on Algorithms and Software in Engineering. 2012. V. 4. № 1. P. 1–85.
19. Ковалев А.В., Козлов В.Н., Самокрутов А.А., Шевалдыкин В.Г., Яковлев Н.Н. Импульсный эхо-метод при контроле бетона. Помехи и пространственная селекция // Дефектоскопия. 1990. № 2. С. 29–41.
20. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720 с.
21. Базулин Е.Г. Учет анизотропных свойств сварного соединения при восстановлении изображения отражателей по эхосигналам, измеренным ультразвуковой антенной решеткой // Дефектоскопия. 2017. № 1. С. 11–25.
22. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Изд. 3-е, исправл. М.: Наука, 1986. 288 с.
23. Kullback S. Information Theory and Statistics. New York, 1968. 416 p.
24. Летова Т.А., Пантелеев А.В. Экстремум функций в примерах и задачах. Учебное пособие. М.: Издательство МАИ, 1998. 376 с.
25. Базулин Е.Г. О возможности использования в ультразвуковом неразрушающем контроле метода максимальной энтропии для получения изображения рассеивателей по набору эхосигналов // Акуст. Журн. 2013. Т. 59. № 2. С. 235–254.
26. Candes E.J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing // Comptes Rendus de l'Acad. des Sci. Serie I. 2008. V. 346. 589592.
27. Candes E., Wakin M. People hearing without listening: An Introduction to Compressive Sampling // IEEE Signal Processing Magazine. 2008. V. 25. № 2. P. 21–30.
28. Baraniuk R.G., Davenport M., DeVore R., Wakin M.B. A simple proof of the restricted isometry principle for random matrices (aka the Johnson-Lindenstrauss lemma meets compressed sensing) // Constructive Approximation. 2007.
29. Candes E., Romberg J., Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements // Communications on Pure and Applied Mathematics. 2006. V. 59. Is. 8. P. 1207–1223.
30. Efron B., Hastie T., Johnstone Y., Tibshirani R. Least angle regression // The Annals of Statistics. 2004. V. 32. № 2. P. 407–499.
31. SPGL1: A solver for large-scale sparse reconstruction. URL: <https://www.cs.ubc.ca/~mpf/spgl1/index.html> (дата обращения: 23.03.2019).
32. Технология NVIDIA CUDA™, URL: <https://www.nvidia.ru/object/cuda-parallel-computing-ru.html> (дата обращения: 23.03.2019).
33. Официальный сайт фирмы "ЭХО+" URL: <http://www.echoplus.ru> (дата обращения: 23.03.2019).
34. Kasami T. Weight Distribution Formula for Some Class of Cyclic Codes // Tech. Report No. R-285. Univ. of Illinois, 1966.
35. Gold R. Optimal binary sequences for spread spectrum multiplexing // IEEE Transactions on Information Theory. October 1967. V. 13(4). P. 619–621. <https://doi.org/10.1109/TIT.1967.1054048>
36. de Bruijn N.G. A combinatorial problem // Koninklijke Nederlandse Akademie v. Wetenschappen. 1946. V. 49. P. 758–764.
37. Chu D.C. Polyphase codes with good periodic correlation properties // IEEE Trans. Inform. Theory. July. 1972. P. 531–532. <https://doi.org/10.1109/TIT.1972.1054840>