АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2021, том 67, № 1, с. 98–106

АТМОСФЕРНАЯ И АЭРОАКУСТИКА

УДК 523.5

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДОВ ЛАГРАНЖЕВОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ АНАЛИЗА БАЛАНСА ЭНЕРГИИ В ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЯХ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

В. Ф. Копьев[a], *, С. А. Чернышев[a]

[a]*ФГУП ЦАГИ, Научный центр мирового уровня "Сверхзвук",*
ул. Жуковского 1, Жуковский, Московская область, 140180 Россия

**e-mail: vkopiev@mktsagi.ru*

Поступила в редакцию 23.06.2020 г.
После доработки 23.06.2020 г.
Принята к публикации 08.09.2020 г.

Предложено описание динамики возмущений течений сжимаемого идеального газа в рамках формализма лагранжевой механики. Ключевым моментом является выбор обобщенных координат, которые наиболее естественно описывают динамику системы. Предложенный в работе выбор основных переменных позволяет свести соответствующие уравнения Лагранжа к уравнению для поля смещения и конвективному волновому уравнению для скалярного потенциала. Предложенный подход позволяет записать уравнение баланса акустической энергии через первые вариации возмущений для течений с ненулевой завихренностью. Полученные результаты могут быть использованы для энергетического анализа звукового излучения для течений с локализованными вихрями, струйных течений и течений в каналах.

Ключевые слова: лагранжевый формализм, течение сжимаемого газа, поле смещений, уравнение локального баланса энергии

DOI: 10.31857/S0320791921010019

1. ВВЕДЕНИЕ

Излучение звука аэродинамическими течениями является сложной проблемой, включающей в себя как непосредственно генерацию шума гидродинамическими пульсациями, так и распространение звуковых волн в неоднородном потоке, а также взаимодействие звукового поля с гидродинамическими пульсациями. Теоретические работы, направленные на решение этой проблемы, основаны на разделении членов уравнений, описывающих генерацию и распространение звука (акустические аналогии [1–3]), или на выборе переменных, естественным образом описывающих эти процессы (энтальпия Бернулли и акустический потенциал, энтальпия торможения, описываемая уравнением Блохинцева–Хоу, и завихренность $\mathbf{\Omega}$ [4–7]).

Другим перспективным направлением в проблеме аэродинамической генерации шума является использование методов лагранжевой механики. Методы лагранжевой и гамильтоновой механики с успехом применяются во многих областях механики жидкости и газа [8–12], однако их использование в аэроакустике до сих пор было ограничено. Одной из работ этого направления является [13], где возмущения вихревых течений несжимаемой жидкости были описаны, как лагранжева механическая система. Этот подход позволил, в частности, решить задачу об условиях сохранения квадрупольного момента вихревого течения. С использованием теоремы Нетер были получены условия на стационарное течение, при выполнении которых квадрупольный момент малых возмущений этого течения является интегралом движения. Было показано, что полученные условия выполняются для однородных струйных течений. Этот результат имеет важное значение в аэроакустике в связи с тем, что квадрупольный момент течения, вычисленный в несжимаемом приближении, представляет собой главный член разложения компактного акустического источника по числу Маха [14, 15].

Ключевым моментом в представлении непрерывных систем с помощью лагранжиана является выбор обобщенных координат. В работе [13] в качестве основной переменной, описывающей возмущения, было выбрано поле смещения, которое представляет собой эйлерову переменную, определяемую через разность траекторий жидких частиц в возмущенном и невозмущенном течениях [16, 17]. Это позволило описать возмущения несжимаемой жидкости, как лагранжеву механическую систему. Целью настоящей работы является обобщение этого подхода на случай сжимаемого газа.

Для случая возмущений в потоке сжимаемого газа поле смещения впервые использовалось в работе Галбруна [18]. Подход, основанный на решении уравнений Галбруна, использовался в ряде теоретических и численных работ, посвященных распространению акустических возмущений в потоках [19–22]. Недостатком этого подхода является то, что звуковые волны описываются векторным волновым уравнением, в том числе и в области потенциального потока, где для описания распространения акустических волн векторное представление избыточно.

Этого недостатка лишен другой подход [23–25], где для описания возмущений в течениях сжимаемого газа используются две основные переменные, одна из которых является векторной, а другая скалярной. Векторная переменная представляет собой поле смещения, описывающее гидродинамические возмущения в области с ненулевой завихренностью, а скалярная переменная описывает акустические возмущения, совпадая с потенциалом скорости в области потенциального течения. Этот подход используется в настоящей работе, где поле смещения и скалярный потенциал выбраны в качестве обобщенных координат при представлении динамики возмущений течений сжимаемого газа, как лагранжевой механической системы.

Сведение уравнений движения к лагранжевой форме дает возможность применения многих результатов общей теории лагранжевой механики полевых систем [26–29]. В настоящей работе эти методы используются для получения уравнения баланса акустической энергии через первые вариации возмущений для течений с ненулевой завихренностью. Уравнение баланса энергии представляет большой интерес для анализа распространения акустических волн на фоне стационарного потока. Проблема состоит в том, что первые вариации плотности и потока энергии для возмущений стационарных течений обращаются в ноль, а нетривиальные вторые вариации включают в себя не только квадраты первых вариаций переменных, но и члены, выражающиеся через вторые вариации переменных. В то же время, для анализа акустических процессов желательно оставаться в рамках линейных возмущений, поскольку анализ нелинейных звуковых волн на фоне неоднородного течения представляет собой очень сложную задачу.

Решение этой проблемы основано на том, что в непрерывных системах тензор энергии–импульса определяется неоднозначно [30, 31]. В частности, вторые вариации плотности и потока энергии могут быть переопределены так, чтобы выражаться только через первые вариации переменных [32], причем сделать это можно различным образом. Для случая потенциального течения величины плотности и потока акустической энергии были получены в работах [32, 33], для случая жесткого однородного канала они были получены в работах [34, 35]. В общем случае завихренного течения исключение вторых вариаций переменных из выражений для плотности и потока энергии является сложной задачей [36]. Однако, если рассматриваемая система является лагранжевой, то решение этой задачи удается получить сравнительно просто, поскольку плотность и поток акустической энергии выражаются непосредственно через лагранжиан системы. Этот подход был использован, в частности, в работе [19] для системы, описывающейся уравнением Галбруна. В настоящей работе выражения плотности и потока акустической энергии получены для возмущений завихренных течений сжимаемого газа в переменных поля смещения и скалярного потенциала.

В разделе 2 выписываются основные уравнения, описывающие возмущения течений сжимаемого газа с использованием переменных поля смещения и скалярного потенциала. Это а) уравнение, описывающее динамику поля смещения, б) конвективное волновое уравнение для скалярного потенциала и в) уравнение, связывающее скалярный потенциал с возмущениями энтальпии. В разделе 3 динамика возмущений безграничного течения записана в лагранжевой форме. Корректность этого выражения проверяется эквивалентностью уравнений Лагранжа и исходных уравнений для динамики возмущений. В разделе 4 показано, что предложенное лагранжево описание справедливо не только для безграничных течений, но и для течений, ограниченных неподвижными стенками. В разделе 5 представлены общие выражения для плотности и потока энергии в течениях сжимаемого газа, а также рассмотрен метод получения энергетических характеристик для непрерывной лагранжевой системы. В разделе 6 получено уравнение локального баланса акустической энергии для течений с ненулевой завихренностью. Члены этого уравнения выражены только через первые вариации возмущений, что позволяет проводить энергетический анализ в рамках линейной постановки задачи. Полученное уравнение является обобщением уравнений баланса энергии для акустических возмущений в потенциальных потоках [32, 36] на случай потоков с ненулевой завихренностью.

Полученные результаты могут быть использованы для анализа фундаментальных задач аэроакустики, в том числе, связанных с излучением и рассеянием звука локализованными вихрями, распространением звуковых волн в неоднородных каналах с потоком, генерацией и распространением акустических возмущений в сдвиговых течениях. Кроме того, привлечение развитых методов лагранжевой механики полевых систем может дать новый взгляд на проблемы аэродинамической генерации шума в турбулентных течениях.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматриваются изэнтропические течения сжимаемого идеального газа. В этом случае уравнения неразрывности и импульса записываются в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \nabla h = 0, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{v}, \rho$ — поля скорости и плотности. Изменение энтальпии dh в общем случае определяется через другие термодинамические переменные соотношением $dh = TdS + \frac{1}{\rho}dp$, где T, S, p — температура, энтропия и давление. В случае изэнтропического течения $S = \text{const}$ и, соответственно, $dh = \frac{1}{\rho}dp$.

Далее будем рассматривать линейные возмущения стационарных течений, которые в соответствии с (2.1)–(2.2) описываются уравнениями

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_1 \mathbf{V}_0) + \nabla(\rho_0 \mathbf{v}_1) = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{V}_0\nabla)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1\nabla)\mathbf{V}_0 + \nabla h_1 = 0, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{V}_0, \rho_0$ — стационарные поля скорости и плотности, $\mathbf{v}_1, \rho_1, h_1$ — возмущения скорости, плотности и энтальпии. Далее для сокращения записи нижние индексы 1 в обозначениях возмущений будут опускаться везде, кроме раздела 5, где использование индексов оговорено отдельно.

Используя операцию ротора, преобразуем уравнение импульсов (2.4) в уравнение Гельмгольца для возмущений завихренности

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{v}) + \nabla \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}_0) = 0, \tag{2.5}$$

где $\mathbf{\Omega}_0 = \nabla \times \mathbf{V}_0$ — стационарное поле завихренности, $\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ — возмущение завихренности.

Будем рассматривать изозавихренные возмущения стационарных течений. Другими словами, будем полагать, что завихренность возмущенного течения может быть получена из исходного стационарного течения смещением жидких частиц при условии изозавихренности. Это условие означает, что при перемещении жидких частиц сохраняется циркуляция завихренности по любому жидкому контуру (вмороженность завихренности). Условие изозавихренности всегда выполняется в течении идеальной жидкости (теорема Кельвина) [37–40]. Вместе с тем это условие позволяет выделить целый класс возмущений, не привязываясь к динамике течения, и получить общее соотношение, связывающее возмущения завихренности с полем смещения [16, 17],

$$\mathbf{\Omega} = \nabla \times (\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{\Omega}_0), \tag{2.6}$$

где поле смещения $\boldsymbol{\eta}$ определяется, как разность между положениями жидких частиц в возмущенном и невозмущенном течениях [11, 17]. Это выражение можно рассматривать как формальное определение поля смещения в завихренной жидкости (определение поля смещения для потенциального случая см. ниже). Введенный класс изозавихренных возмущений можно использовать для рассмотрения динамики возмущений, поскольку при своем движении возмущения не выходят из этого класса. Вместе с тем, класс изозавихренных возмущений является достаточно широким для описания основных особенностей акустического излучения.

Из (2.6) следует выражение для возмущений скорости

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{\Omega}_0 + \nabla\varphi, \tag{2.7}$$

где φ — скалярная переменная, которая в случае потенциального потока совпадает с потенциалом возмущений скорости. Потенциальная часть выражения (2.7) отлична от нуля как вне, так и внутри вихря, даже в случае несжимаемой жидкости. В случае несжимаемой жидкости потенциальную часть можно исключить, выразив ее через поле смещения с помощью интеграла Био–Савара,

$$\nabla\varphi = \nabla \times \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla' \times [\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{\Omega}_0]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' - \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{\Omega}_0. \tag{2.8}$$

Из условия неразрывности среды следует уравнение, связывающее поле смещения с возмущением плотности [19],

$$\rho = -\nabla(\rho_0 \boldsymbol{\eta}). \tag{2.9}$$

Таким образом, физические переменные возмущений скорости и плотности выражается через новые переменные $\boldsymbol{\eta}$ и φ [25]. Эти переменные будут далее рассматриваться как основные переменные, выражающие динамику возмущений. Выбор этих переменных обладает рядом преимуществ перед использованием стандартных физических переменных. В частности, он оказывается удобным для представления возмущений течений сжимаемого газа, как лагранжевой механической системы.

Получим уравнения, определяющие динамику движения в новых переменных. Подставляя (2.6) в (2.5), получим

$$\nabla\times\left(\left(\frac{\partial\boldsymbol{\eta}}{\partial t}+(\mathbf{V}_0\nabla)\,\boldsymbol{\eta}-(\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{V}_0-\mathbf{v}\right)\times\boldsymbol{\Omega}_0\right)=0. \quad (2.10)$$

Отсюда следует

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{\eta}}{\partial t}+(\mathbf{V}_0\nabla)\,\boldsymbol{\eta}-(\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{V}_0-\mathbf{v}\right)\times\boldsymbol{\Omega}_0+\nabla\Phi=0, \quad (2.11)$$

где $\Phi(\mathbf{r},t)$ – произвольная скалярная функция, появление которой связано с тем, что к полю смещения $\boldsymbol{\eta}$ может быть добавлено любое тривиальное смещение $\boldsymbol{\eta}_T$, не дающее возмущений физических переменных завихренности и скорости [41]. Из (2.6) следует, что тривиальное смещение $\boldsymbol{\eta}_T$ удовлетворяет уравнению $\nabla\times(\boldsymbol{\eta}_T\times\boldsymbol{\Omega}_0)=0$. При выборе скалярной функции $\Phi=0$ уравнение для поля смещения может быть записано в виде

$$\frac{\partial\boldsymbol{\eta}}{\partial t}+(\mathbf{V}_0\nabla)\,\boldsymbol{\eta}-(\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{V}_0-\mathbf{v}=0. \quad (2.12)$$

Отметим, что это уравнение справедливо как для несжимаемой жидкости [17], так и для сжимаемого газа [21]. Также отметим, что уравнение (2.12) определяет поле смещения в том числе и для потенциальных течений, у которых завихренность $\boldsymbol{\Omega}_0=0$, что позволяет использовать эту переменную в потенциальных потоках, минуя (2.6) (см. например [42]).

Получим далее уравнения, определяющие эволюцию скалярного потенциала φ. Подставляя (2.9) и (2.11) в (2.4), а также выражая возмущение энтальпии через возмущение плотности $h=\frac{c_0^2}{\rho_0}\rho$, где c_0 – скорость звука в невозмущенном течении, получим уравнение, связывающее потенциал φ с возмущением плотности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\mathbf{V}_0\nabla)\,\varphi-\Phi+\frac{c_0^2}{\rho_0}\rho=0. \quad (2.13)$$

Из уравнения (2.13) и уравнения неразрывности (2.3) получим конвективное волновое уравнение для скалярного потенциала

$$\begin{aligned}&\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{D\varphi}{Dt}\right)-\frac{1}{\rho_0}\nabla(\rho_0\nabla\varphi)=\\&=\frac{1}{\rho_0}\nabla(\rho_0(\boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{\Omega}_0))+\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{c_0^2}\Phi\right),\end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}_0\nabla$. Уравнение (2.14) с $\Phi=0$ использовалось, в частности, в работах [23–25]. Еще одно независимое уравнение получается подстановкой (2.9) в (2.13)

$$\frac{\rho_0}{c_0^2}\left(\frac{D\varphi}{Dt}-\Phi\right)=\nabla(\rho_0\boldsymbol{\eta}). \quad (2.15)$$

Уравнения (2.11), (2.14), (2.15) составляют полную систему уравнений, описывающую вихревые и акустические возмущения в изэнтропическом течении.

В случае несжимаемой жидкости $c_0\to\infty$, $\rho_0=\mathrm{const}$, динамика вихревых возмущений определяется уравнением (2.11), в то время как уравнения (2.14), (2.15) сводятся к условиям бездивергентности для возмущений скорости $\nabla\mathbf{v}=0$ и поля смещения $\nabla\boldsymbol{\eta}=0$.

3. ЛАГРАНЖИАН ВОЗМУЩЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА В БЕЗГРАНИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Выбирая переменные $\boldsymbol{\eta}$, φ, Φ в качестве обобщенных координат, запишем лагранжиан для возмущений течений сжимаемого идеального газа в безграничном пространстве

$$\begin{aligned}L=&\frac{1}{2}\int\rho_0\dot{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{\Omega}_0)\,d\mathbf{r}+\frac{1}{2}\int\rho_0\times\\&\times((\mathbf{V}_0\nabla)\,\boldsymbol{\eta}-(\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{V}_0)(\boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{\Omega}_0)\,d\mathbf{r}-\\&-\frac{1}{2}\int\rho_0(\boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{\Omega}_0)(\boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{\Omega}_0)\,d\mathbf{r}-\\&-\int\rho_0(\boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{\Omega}_0)\nabla\varphi d\mathbf{r}-\frac{1}{2}\int\rho_0(\nabla\varphi)^2\,d\mathbf{r}+\\&+\frac{1}{2}\int\frac{\rho_0}{c_0^2}(\dot\varphi+\mathbf{V}_0\nabla\varphi)^2\,d\mathbf{r}-\int\rho_0\boldsymbol{\eta}\nabla\Phi d\mathbf{r}-\\&-\int\frac{\rho_0}{c_0^2}\Phi(\dot\varphi+\mathbf{V}_0\nabla\varphi)\,d\mathbf{r}+\frac{1}{2}\int\frac{\rho_0}{c_0^2}\Phi^2 d\mathbf{r}.\end{aligned} \quad (3.1)$$

Непосредственной проверкой убедимся, что лагранжиан (3.1) описывает динамику возмущений вихревых течений сжимаемого газа. Вычисляя вариационные производные по обобщенным координатам, получим уравнения Лагранжа

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\boldsymbol{\eta}}}-\frac{\delta L}{\delta\boldsymbol{\eta}}=\\&=\rho_0\left(\frac{\partial\boldsymbol{\eta}}{\partial t}+(\mathbf{V}_0\nabla)\,\boldsymbol{\eta}-(\boldsymbol{\eta}\nabla)\,\mathbf{V}_0-\mathbf{v}\right)\boldsymbol{\Omega}_0+\\&+\rho_0\nabla\Phi=0,\end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot\varphi}-\frac{\delta L}{\delta\varphi}=\rho_0\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{c_0^2}\left(\frac{D\varphi}{Dt}-\Phi\right)\right)-\nabla(\rho_0\mathbf{v})=0, \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot\Phi}-\frac{\delta L}{\delta\Phi}=\frac{\rho_0}{c_0^2}\left(\frac{D\varphi}{Dt}-\Phi\right)-\nabla(\rho_0\boldsymbol{\eta})=0. \quad (3.4)$$

Уравнения Лагранжа (3.2)–(3.4) совпадают с уравнениями (2.11), (2.14), (2.15). Это означает, что лагранжиан (3.1) правильно описывает динамику возмущений.

В случае несжимаемой жидкости выражение (3.1) приводится к виду

$$\begin{gathered} L=\frac{1}{2}\rho_0\int\dot{\boldsymbol\eta}(\boldsymbol\eta\times\boldsymbol\Omega_0)\,d\mathbf r+\\ +\frac{1}{2}\rho_0\int((\mathbf V_0\nabla)\boldsymbol\eta-(\boldsymbol\eta\nabla)\mathbf V_0)(\boldsymbol\eta\times\boldsymbol\Omega_0)\,d\mathbf r-\\ -\frac{1}{2}\rho_0\int v^2d\mathbf r-\rho_0\int\boldsymbol\eta\nabla\Phi d\mathbf r. \end{gathered}\tag{3.5}$$

Сравним это выражение с лагранжианом, полученным в работе [13]. Используя интегрирование по частям, для убывающих на бесконечности возмущений преобразуем (3.5) к виду

$$\begin{gathered} L=\frac{1}{2}\rho_0\int\dot{\boldsymbol\eta}(\boldsymbol\eta\times\boldsymbol\Omega_0)\,d\mathbf r+\\ +\frac{1}{2}\rho_0\int((\mathbf V_0\nabla)\boldsymbol\eta-(\boldsymbol\eta\nabla)\mathbf V_0-\mathbf v)(\boldsymbol\eta\times\boldsymbol\Omega_0)\,d\mathbf r+\\ +\rho_0\int\Phi\nabla\boldsymbol\eta d\mathbf r. \end{gathered}\tag{3.6}$$

Третье слагаемое в (3.6) выражает собой условие неразрывности $\nabla\boldsymbol\eta=0$, которое не было включено в лагранжиан [13], а рассматривалось как дополнительное уравнение связи. Кроме того, в работе [13] возмущение скорости $\mathbf v$ было выражено через поле смещения с использованием интеграла Био-Савара (2.8), что можно было сделать в связи с тем, что рассматривалось течение несжимаемой жидкости. В отличие от этого, в настоящей работе выражение для возмущения скорости (2.7) включает в себя дополнительную переменную φ с целью учета степени свободы, связанной со сжимаемостью. С этими оговорками выражение для лагранжиана, полученное в работе [13], соответствует выражению (3.6).

4. ЛАГРАНЖИАН ВОЗМУЩЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ТЕЧЕНИИ СО СТЕНКАМИ

Покажем, что лагранжиан (3.1) описывает динамику возмущений течения сжимаемого идеального газа не только в безграничном пространстве, но и в течении, ограниченном неподвижными непроницаемыми стенками.

Рассмотрим некоторую систему в ограниченной области A с лагранжианом вида $L=\int\Lambda(\dot q,q,q_{,k})\,d\mathbf r$, где $q_{,k}\equiv\partial q/\partial r^k$, $\Lambda(\dot q,q,q_{,k})$ – некоторая функция от поля q, описывающего состояние системы, и производных этого поля по координатам и времени. Вариационная производная по q от лагранжиана L запишется в виде

$$\frac{\delta L}{\delta q(\mathbf r)}=\int\limits_A\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\delta(\mathbf r'-\mathbf r)+\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial}{\partial r'^k}\delta(\mathbf r'-\mathbf r)\right)d\mathbf r'.\tag{4.1}$$

Используя интегрирование по частям, получим

$$\frac{\delta L}{\delta q(\mathbf r)}=\frac{\partial\Lambda}{\partial q}-\frac{\partial}{\partial r^k}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}+\oint n'^k\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\delta(\mathbf r'-\mathbf r)\,dS',\tag{4.2}$$

где поверхностный интеграл берется по границе области A, $\mathbf n$ – вектор нормали к границе. В безграничной системе поверхностный интеграл в (4.2) обращается в ноль. Для ограниченной системы этот интеграл дает в уравнениях Лагранжа дополнительный член, отличный от нуля на границах области. Этот член накладывает на динамику системы дополнительные граничные условия вида $n^k\dfrac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}=0$.

Для системы с лагранжианом (3.1), рассматриваемой в ограниченной области, граничные условия имеют вид

$$n^k\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta^i_{,k}}=\frac{1}{2}\rho_0(\mathbf n\mathbf V_0)(\boldsymbol\eta\times\boldsymbol\Omega_0)^i=0,\tag{4.3}$$

$$n^k\frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi_{,k}}=-\rho_0\mathbf n\left(\mathbf v-\mathbf V_0\frac{1}{c_0^2}\left(\frac{D\varphi}{Dt}-\Phi\right)\right)=0,\tag{4.4}$$

$$n^k\frac{\partial\Lambda}{\partial\Phi_{,k}}=-\rho_0\mathbf n\boldsymbol\eta=0.\tag{4.5}$$

Условия (4.3)–(4.5) выполняются на неподвижной твердой стенке, где нормальные компоненты скорости и поля смещения равны нулю. Это означает, что лагранжиан (3.1) описывает динамику возмущений течения сжимаемого идеального газа в произвольной области, ограниченной неподвижными стенками с условием непротекания.

5. ПЛОТНОСТЬ И ПОТОК ЭНЕРГИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Для безграничного течения энергия является интегралом движения:

$$E_{\text{tot}}=\int E\,d\mathbf r=\text{const}.\tag{5.1}$$

В этом выражении плотность энергии имеет вид [43]

$$E=\rho\left(\frac{V^2}{2}+\varepsilon\right),\tag{5.2}$$

где $\rho,\mathbf V,\varepsilon$ – плотность, скорость и внутренняя энергия течения, интеграл (5.1) берется по бесконечному объему. Переменные без индексов в разделе 5 обозначают полные поля, а не малые возмущения, как в других разделах статьи.

Поскольку $\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \int \frac{\partial E}{\partial t} d\mathbf{r} = 0$, то поле $\frac{\partial E}{\partial t}$ всегда может быть представлено, как дивергенция некоторого векторного поля, то есть

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \mathbf{S} = 0. \tag{5.3}$$

Величина потока энергии $\mathbf{S}$, соответствующая плотности энергии (5.2), определяется выражением [43]

$$\mathbf{S} = \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + h \right). \tag{5.4}$$

Уравнение баланса энергии (5.3) представляет большой интерес для анализа физических процессов в течениях. В частности, при исследовании распространения акустических волн на фоне стационарного потока можно рассмотреть уравнение баланса энергии для малых возмущений. При этом плотность энергии (5.2) представляется в виде разложения по амплитуде возмущений

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + \ldots .$$

Первая и вторая вариации плотности энергии имеют вид

$$E_1 = \rho_1 \frac{V_0^2}{2} + \rho_0 \mathbf{V}_0 \mathbf{v}_1 + \rho_1 h_0, \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} E_2 = \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1 + \rho_1 \mathbf{V}_0 \mathbf{v}_1 + \rho_0 \mathbf{V}_0 \mathbf{v}_2 + \\ + \rho_2 \frac{V_0^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{c_0^2}{\rho_0} \rho_1^2 + \rho_2 h_0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

где индексами 0, 1, 2 обозначены, соответственно, средние поля, их первая и вторая вариации.

Проблема состоит в том, что для гармонических колебаний средняя по времени первая вариация плотности энергии (5.5) оказывается равной нулю, а нетривиальная вторая вариация (5.6) включает в себя не только квадраты первых вариаций переменных, но и члены, выражающиеся через вторые вариации переменных. Это же касается и выражений для потока энергии. В то же время, для анализа акустических процессов желательно оставаться в рамках линейных возмущений, поскольку решение нелинейной задачи для звуковых волн на фоне неоднородного течения представляет собой очень сложную задачу.

Решение этой проблемы основано на том, что для непрерывной системы тензор энергии-импульса может быть определен неоднозначным образом [30]. В частности, при сохранении интеграла энергии величины плотности и потока энергии могут быть переопределены следующим образом: $\hat{E} = E + \nabla \mathbf{W}$, $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S} - \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}$, где $\mathbf{W}$ – произвольное векторное поле [21]. Легко видеть, что для модифицированных величин $\hat{E}$ и $\hat{\mathbf{S}}$ так же, как и для исходных, выполняется как интегральный закон сохранения (5.1), так и уравнение локального баланса (5.3). Задача состоит в том, чтобы подобрать такое поле $\mathbf{W}$, при котором величины $\hat{E}$ и $\hat{\mathbf{S}}$ выражаются только через произведения первых вариаций переменных. В этом случае величины $\hat{E}$ и $\hat{\mathbf{S}}$ удобно рассматривать как определения плотности и потока акустической энергии [32, 36]. В общем случае завихренного течения выбор поля $\mathbf{W}$, позволяющий исключить вторые вариации переменных из выражений для плотности и потока энергии, является сложной задачей. Однако, если рассматриваемая система является лагранжевой, то решение этой задачи удается получить особенно просто. Поскольку плотность и поток энергии выражаются через лагранжиан системы, а лагранжиан линейной системы содержит только члены, квадратичные по возмущениям, то плотность и поток энергии также будут содержать только члены, квадратичные по первым вариациям.

В том случае, когда лагранжиан системы имеет вид $L = \int \Lambda(\dot{q}, q, q_{,k}) d\mathbf{r}$, где $q_{,k} \equiv \partial q / \partial r^k$, $\Lambda(\dot{q}, q, q_{,k})$ – некоторая функция от поля q, описывающего состояние системы, и производных этого поля по координатам и времени, плотность и поток энергии системы могут быть записаны в виде [30, 31]

$$E = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} \dot{q} - \Lambda, \quad S^i = \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \dot{q}. \tag{5.7}$$

Уравнения (5.7) используются в настоящей работе для получения плотности и потока акустической энергии для звуковых волн в завихренных потоках.

6. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА АКУСТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ЗАВИХРЕННОМ ТЕЧЕНИИ

Воспользуемся выражениями (5.7) для того, чтобы записать локальный баланс энергии через первые вариации для системы с лагранжианом (3.1). Подставляя (3.1) в (5.7), получим выражения плотности и потока энергии, не содержащие вторых вариаций,

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} (\boldsymbol{\eta} \times \boldsymbol{\Omega}_0) + \frac{1}{2} (\rho_0 \mathbf{v} + \rho \mathbf{V}_0) \nabla \varphi - \\ - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\rho_0 \boldsymbol{\eta} \Phi), \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{V}_0 \left(\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} (\boldsymbol{\eta} \times \boldsymbol{\Omega}_0) \right) - \\ - (\rho_0 \mathbf{v} + \rho \mathbf{V}_0) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho_0 \boldsymbol{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Выражения (6.1) и (6.2) зависят от выбора калибровочной функции Φ. В частности, если в уравнениях (2.11), (2.14), (2.15), описывающих динамику возмущений, выбрана калибровка $\mathbf{\Phi} = 0$, то эти выражения приводятся к виду

$$E = \frac{1}{2}\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}(\boldsymbol{\eta} \times \boldsymbol{\Omega}_0) + \frac{1}{2}(\rho_0 \mathbf{v} + \rho \mathbf{V}_0)\nabla\varphi - \frac{1}{2}\rho\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{6.3}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{V}_0 \left(\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}(\boldsymbol{\eta} \times \boldsymbol{\Omega}_0)\right) - (\rho_0 \mathbf{v} + \rho \mathbf{V}_0)\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{6.4}$$

В частности, для случая потенциального потока выражения (6.3) и (6.4) имеют вид

$$E = \frac{1}{2}\rho_0 (\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}\rho \mathbf{V}_0 \nabla\varphi - \frac{1}{2}\rho\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{6.5}$$

$$\mathbf{S} = -\rho_0 \nabla\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho \mathbf{V}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{6.6}$$

Уравнения (6.5) и (6.6) соответствуют выражениям, впервые полученным в работе [33], а также Блохинцевым для случая коротких волн [32]. Полный вывод этих выражений можно найти в [36].

В случае отсутствия среднего течения выражения (6.3) и (6.4) сводятся к хорошо известным выражениям для акустической энергии и ее потоку в покоящейся среде [32]:

$$E = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} p^2, \tag{6.7}$$

$$\mathbf{S} = p\mathbf{v}, \tag{6.8}$$

где p — возмущение давления.

Как было отмечено выше, неоднозначность определения плотности и потока энергии позволяет по-разному выразить эти величины через первые вариации основных переменных. Таким образом, акустическая энергия и ее поток могут быть определены различным образом, при условии их согласованности через уравнение баланса (5.3). Действительно, используя преобразование $\hat{E} = E + \nabla \mathbf{W}$, $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S} - \dfrac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}$, где $\mathbf{W}$ — любая квадратичная функция первых вариаций переменных, мы получим другое представление акустической энергии, для которой так же, как и для исходного представления, выполняется уравнение локального энергетического баланса (5.3). В частности, выбирая $\mathbf{W} = -\frac{1}{2}\rho_0\varphi \mathbf{v} - \frac{1}{2}\rho\varphi \mathbf{V}_0$, из (6.3) и (6.4) получим выражения

$$\hat{E} = \frac{1}{2}\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}(\boldsymbol{\eta} \times \boldsymbol{\Omega}_0) + \frac{1}{2}\left(\varphi\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right), \tag{6.9}$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{V}_0 \left(\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}(\boldsymbol{\eta} \times \boldsymbol{\Omega}_0)\right) + \frac{1}{2}\mathbf{V}_0\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\varphi - \rho\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\rho_0\left(\varphi\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right). \tag{6.10}$$

Выражения (6.9), (6.10) для плотности и потока акустической энергии через переменные $\boldsymbol{\eta}$, φ получены впервые. Представляется, что они обладают большим потенциалом в качестве инструмента энергетического анализа особенностей генерации звука в завихренном потоке. Преимуществом, в частности, является то, что выражение (6.9) для плотности энергии представляет собой сумму двух членов, $\hat{E} = \hat{E}_{\text{vort}} + \hat{E}_{\text{ac}}$, которые имеют ясный физический смысл. Первый из этих членов локализован по завихренности (этот член соответствует выражению для энергии возмущений течения несжимаемой жидкости [41]), а второй пропорционален возмущению плотности и, в соответствии с этим, обращается в ноль для несжимаемой жидкости. В свою очередь, в выражении для потока энергии (6.10) первые два члена представляют собой перенос энергии средним течением, а третий член для гармонических по времени колебаний в покоящейся среде дает средний по времени поток энергии $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle = \langle p\,\mathbf{v} \rangle$, что соответствует известному выражению для потока акустической энергии (6.8).

Проиллюстрируем возможности использования полученных выражений применительно к задаче излучения звука собственным колебанием локализованного вихревого течения при малых числах Маха $M = a\Omega_0/c$, где a — размер области вихревого течения, c — скорость звука. Будем полагать, что вихрь является акустически компактным звуковым источником, т.е. $ka \ll 1$, где $k = \omega/c$, ω — частота колебаний вихря, которая с учетом потери энергии на излучение может иметь комплексное значение. Для таких колебаний единственным параметром, который может меняться за счет потери энергии на излучение, является амплитуда колебаний.

Выделим область A радиуса $R \gg a$ и рассмотрим баланс энергии применительно к этой области. Оказывается, всегда можно выбрать размер этой области так, что средний поток энергии на ее границе будет определяться величиной $\langle p\,\mathbf{v} \rangle$, а интеграл энергии будет определяться только первым членом в (6.9). Действительно, примем ограничение на размер области A, полагая $1 \ll kR \ll (ka)^{-5}$. Считая, что вихревое течение имеет ненулевой квадрупольный момент, оценим звуковое поле на границе области как

$$\varphi = O\left(k^2\frac{D}{R}\right)\exp(ikR)\exp\left(-\frac{\delta}{c}R\right), \tag{6.11}$$

где D — величина квадрупольного момента, δ — инкремент (или декремент, в зависимости от знака энергии), связанный с потерей энергии колебаний вихря за счет акустического излучения [44]. Убывающий экспоненциальный множитель в (6.11) отражает тот факт, что амплитуда колебаний вихря со временем изменяется, а звуковая волна, пришедшая на границу области A, $r = R$ в момент времени t, была излучена в момент $t - R/c$.

В дальней области величина для потока энергии (6.10) сводится к выражению $p\mathbf{v}$. Подставляя в это выражение звуковое поле (6.11), получим средний за период колебаний поток энергии через границу области A

$$S_R = \oint \langle \hat{\mathrm{S}} \rangle d\mathbf{s} = O\left(\rho_0 c D^2 k^6\right) \exp\left(-2\frac{\delta}{c}R\right). \qquad (6.12)$$

Интеграл энергии в соответствии с (6.9) содержит в себе два слагаемых. Первое слагаемое представляет собой энергию вихревого течения, которая при малых числах Маха может быть вычислена в приближении несжимаемой жидкости и которую можно оценить, как $\int \hat{E}_{\mathrm{vort}} d\mathbf{r} = O\left(\rho_0 a^{-5} D^2\right)$. Второе слагаемое связано с акустическими возмущениями. Для звукового поля (6.11) вклад этих возмущений в интеграл энергии составляет $\int \hat{E}_{\mathrm{ac}} d\mathbf{r} = O\left(\rho_0 k^6 D^2\right) \int_0^R \exp\left(-2\frac{\delta}{c}r\right) dr$. При малых значениях инкремента, $\delta \ll c/R$ отсюда следует $\int \hat{E}_{\mathrm{ac}} d\mathbf{r} = O\left(\rho_0 k^6 D^2 R\right)$, то есть энергия звуковой волны, находящейся внутри области A, растет линейно с увеличением размера области R. Поскольку $kR \ll (ka)^{-5}$, то легко убедиться, что основной вклад в энергию возмущений, заключенных в области A, вносит вихревая составляющая, т.е. $E_R = \int \hat{E}_{\mathrm{vort}} d\mathbf{r} = O\left(\rho_0 a^{-5} D^2\right)$, а вкладом звуковой волны в энергию можно пренебречь.

Применяя уравнение энергетического баланса $\frac{dE_R}{dt} + S_R = 0$ к области A и учитывая квадратичную зависимость обоих членов от амплитуды, можно оценить величину инкремента (декремента) вихревых колебаний, связанного с акустическим излучением $\delta/\omega = O\left(k^5 a^5\right)$. Таким образом, полученные в работе выражения для плотности и потока энергии позволяют сравнительно просто получить важные характеристики процессов, в которых реализуется связь акустической и вихревой моды.

Приведенные оценки подтверждают интуитивно понятное предположение, используемое в [44], что при малом числе Маха поток акустической энергии, вычисленный по известному выражению $p\mathbf{v}$ на основании теории Лайтхилла, и несжимаемая энергия возмущений вихря с медленно меняющейся амплитудой колебаний связаны уравнением энергетического баланса.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе дано описание изэнтропических возмущений течений сжимаемого идеального газа в рамках формализма лагранжевой механики. Предложенный подход позволяет записать уравнение баланса акустической энергии через первые вариации поля смещения $\boldsymbol{\eta}$ и потенциала скорости φ. Полученные результаты могут быть использованы для анализа фундаментальных задач аэроакустики, в том числе, связанных с излучением и рассеянием звука локализованными вихрями, и вихрями в присутствии границ, распространением звуковых волн в неоднородных каналах с течением, генерацией и распространением акустических возмущений в сдвиговых течениях. Кроме того, привлечение развитых методов лагранжевой механики полевых систем может дать новый взгляд на проблемы аэродинамической генерации шума и способствовать их решению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lighthill M.I.* On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound // Proc. R. Soc. 1952. V. A222. № 1148. P. 1–32.
2. *Powell A.* Theory of vortex sound // J. Acoust. Soc. Am. 1964 V. 36. P. 177–195.
3. *Goldstein M.E.* A Generalized Acoustic Analogy // J. Fluid Mech. 2003. V. 488. P. 315–333.
4. *Yates J.E.* Application of the Bernoulli Enthalpy Concept to the Study of Vortex Noise and Jet Impingement Noise // NASA CR 2987, 1978. 81 p.
5. *Howe M.S.* Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of flutte // J. Fluid Mech. 1975. V. 71. P. 625–673.
6. *Moring W.* Modelling low Mach number noise // in: Mechanics of Sound Generation in Flows. Ed. Miiller E.-A. Springer, Berlin, 1979. P. 85–96.
7. *Леонтьев Е.А., Мунин А.Г.* Некоторые проблемы аэроакустики // В сб.: Современные проблемы аэромеханики. М.: Машиностроение, 1987. С. 138–153.
8. *Гончаров В.П., Павлов В.И.* Гамильтоновая вихревая и волновая динамика. М.: ГЕОС, 2008. 431 с.
9. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // УФН. 1997. Т. 167. № 11. С. 1137–1167.
10. *Ильгисонис В.И.* Лагранжева гидродинамика. М.: Изд-во МГУ, 2010. 96 с.
11. *Morrison P.J.* Hamiltonian description of the ideal fluid // Review of Modern Physics. 1998. V. 70. № 2. P. 467–521.
12. *Salmon R.* Hamiltonian fluid mechanics // Ann. Rev. Fluid Mech. 1988. V. 20. P. 225–256.

13. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Развитие методов лагранжевой и гамильтоновой механики применительно к задачам аэроакустики // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 677–688.
14. *Crow S.C.* Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem // Studies in Applied Mathematics. 1970. V. 49. № 1. P. 21–44.
15. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* О разложения звукового поля по числу Маха в проблеме генерации звука локализованными вихрями // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 4. С. 622–627.
16. *Chandrasekhar S.* Ellipsoidal Figures of Equilibrium. New Heaven, Conn., Yale Univ. Press, 1969.
17. *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic Stability. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
18. *Galbrun H.* Propagation d'une Onde Sonore dans l'Atmosphère Terrestre et Théorie des Zones de Silence, Paris: Gauthier-Villars, 1931. 352 p.
19. *Brazier J.P.* Acoustic Energy for Sheared Flows // AIAA Paper. 2010. AIAA–2010–3862.
20. *Peyret C., Elias G.* Finite-element method to study harmonic aeroacoustics problems // J. Acoust. Soc. Am. 2001. V. 110. № 2. P. 661–668.
21. *Godin O.A.* Reciprocity and energy theorems for waves in a compressible inhomogeneous moving fluid // Wave Motion. 1997. V. 25. P. 143–167.
22. *Treyssede F., Gabard G., Ben Tahar M.* A mixed finite element method for acoustic wave propagation in moving fluids based on an Eulerian-Lagrangian description // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113. № 2. P. 705–716.
23. *Goldstein M.E.* Unsteady vortical and entropic distortions of potential flows round arbitrary obstacles // J. Fluid Mech. 1978. V. 89. № 3. P. 433–468.
24. *Bergliaffa S.E.P., Hibberd K., Stone M., Visser M.* Wave equation for sound in fluids with vorticity // Physica D. 2004. V. 191. P. 121–136.
25. *Mercier J.-F., Pagneuxy V.* An iterative approach for Aeroacoustics in a non-potential-flow // AIAA Paper. 2013. AIAA–2013–2134.
26. *Hayes W.D.* Conservation of action and modal wave action // Proc. R. Soc. 1970. V. A320. P. 187–208.
27. *Whitham G.B.* Non-linear dispersive waves // Proc. R. Soc. 1965. V. A283. P. 238–261.
28. *Bretherton F.B., Garrett C.I.R.* Wavetrains in inhomogeneous moving media // Proc. R. Soc. 1968. V. A302. P. 529–554.
29. *Andrews D.G., McInyre M.E.* On wave-action and its relatives // J. Fluid Mech. 1978. V. 89. № 4. P. 647–664.
30. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
31. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: ИЛ, 1958. 931 с.
32. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.–Л.: Гостехиздат, 1946. 220 с.
33. *Чернов Л.А.* Плотность и поток акустической энергии в движущейся среде // ЖТФ. 1946. Т. 16. № 6. С. 733–736.
34. *Cantrell R.H., Hart R.W.* Interaction between sound and flow in acoustic cavities: mass, momentum and energy consideration // J. Acoust. Soc. Am. 1964. V. 36. № 4. P. 697–706.
35. *Moring W.* Energy flux in duct flow // J. Sound Vibr. 1971. V. 18. P. 101–109.
36. *Голдстейн М.Е.* Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981. 294 с.
37. *Фридман А.А.* Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. М.–Л.: Гостехиздат, 1934. 367 с.
38. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
39. *Арнольд В.И.* Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости // ПММ. 1965. Т. 29. № 5. С. 846–851.
40. *Moffatt H.K.* Structure and stability of solutions of the Euler equations: A Lagrangian approach // Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. 1990. V. 333. № 1631. P. 321–342.
41. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Колебания вихревого кольца, возникновение в нем турбулентности и генерации звука // УФН. 2000. Т. 170. № 7. С. 713–742.
42. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А., Юдин М.А.* Развитие начальных возмущений в задаче о движении цилиндра, обтекаемого циркуляционным потоком // Известия РАН МЖГ. 2019. № 6. С. 75–83.
43. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
44. *Копьев В.Ф., Леонтьев Е.А.* Некоторые замечания к теории Лайтхилла в связи с излучением звука компактными вихрями // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 2. С. 184–189.