

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 681.7:534.91

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ НА ИСТОЧНИК
В АКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ И ПРЕДЕЛ УГЛОВОГО РАЗРЕШЕНИЯ

© 2021 г. А. Г. Сазонтов^{a, b, *}, И. П. Смирнов^{a, b}

^aИнститут прикладной физики РАН,
ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, Нижегородская обл., 603155 Россия
^bНижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Ашхабадская ул. 4, Нижний Новгород, Нижегородская обл., 603105 Россия

*e-mail: sazontov@ipfran.ru

Поступила в редакцию 20.09.2020 г.

После доработки 20.09.2020 г.

Принята к публикации 22.12.2020 г.

Построен адаптивный алгоритм пониженного ранга, позволяющий определить направления на источники звука с помощью горизонтальной антенной решетки, работающей в волноводе с неточно известными параметрами. Представлены результаты статистического моделирования, демонстрирующие высокую разрешающую способность предложенного метода и приемлемую точность оценивания углового положения источников без использования априорной информации о глубине их погружения и расстояния до приемной антенны. На основе критерия Смита найден теоретический предел углового разрешения в зависимости от входного отношения сигнал/шум и объема входной выборки.

Ключевые слова: акустический волновод с неточно известными параметрами, оценивание направлений на источники сигналов, адаптивный алгоритм NM-RARE, предел углового разрешения, статистическое моделирование

DOI: 10.31857/S0320791921020076

ВВЕДЕНИЕ

Оценка углового положения источника в мелководном канале с помощью горизонтальной линейной антенны является одной из важных прикладных задач гидроакустики. Как известно (см., например, [1–3]), ее решение, основанное на методе сканирования, приводит к заметным ошибкам в определении направления на источник, растущим с увеличением угла прихода (отсчитываемого от нормали к апертуре антенны) и числа распространяющихся нормальных волн. Традиционные алгоритмы (типа метода Кейпона, MUSIC, максимума правдоподобия) позволяют получить несмещенные оценки угловых координат (при условии точно известных параметров волновода), однако в процессе локализации они используют трудоемкую процедуру одновременного поиска по глубине, дальности и азимутальному углу, что требует больших вычислительных затрат. В этой связи возникает необходимость разработки устойчивых методов оценивания, позволяющих определить направление на источник без знания глубины его погружения и расстояния до приемной антенной решетки (АР).

Один из способов решения такого рода обратной задачи был предложен в работе [4] (см.

также [5], где приведена альтернативная формулировка алгоритма). Соответствующая процедура оценивания, получившая название метода подпространственного пересечения или метода SI (“subspace intersection”), опирается на априорное знание волновых чисел распространяющихся нормальных волн. Однако в изменчивых и всегда не полностью известных условиях морской среды несоответствие (рассогласование) между расчетной моделью канала и реальным акустическим волноводом может приводить к значительному ухудшению работоспособности данного способа локализации.

В последнее десятилетие в теории обработки сигналов антенными решетками интенсивно развивается направление, связанное с определением минимального углового расстояния между источниками, при котором они могут быть корректно локализованы с использованием алгоритмов сверхразрешения. На сегодняшний день существуют три общепринятых критерия, позволяющих определить указанное расстояние. Первый, предложенный Коксом [6], представляет собой необходимое условие одновременного существования двух близко расположенных минимумов целевой функции. Однако такое рассмотрение не

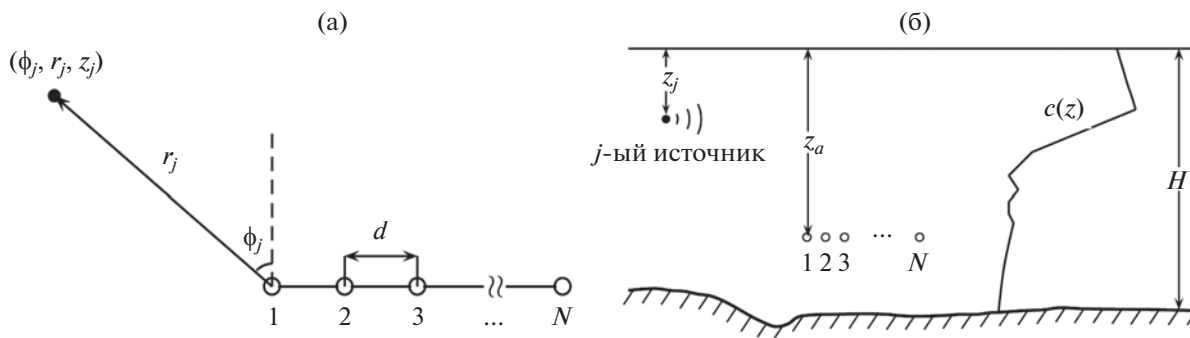


Рис. 1. Взаимное расположение источника и горизонтальной антенны в волноводе: (а) – вид сверху, (б) – вид сбоку.

является универсальным, поскольку зависит от конкретного вида используемого метода оценивания. В этой связи наибольшее распространение получил критерий, основанный на статистической проверке гипотез о наличии одного или двух сигналов в принятой смеси [7–9], а также критерий Смита [10], в соответствии с которым источниками считаются разрешенными, если угловое разнесение между ними превосходит среднеквадратичную ошибку оценивания этого разнесения.

В настоящей работе построен адаптивный алгоритм пониженного ранга NM-RARE (“normal mode based rank reduction”), предназначенный для определения угловых положений источников в волноводе с неточно известными параметрами. Проводимое рассмотрение основано на наихудшем сценарии приема, учитывающем отличие ожидаемой реплики от истинной, и позволяющем минимизировать эффекты рассогласования различной природы [11, 12]. Представлены результаты сравнительного анализа эффективности данного способа оценивания с методом сканирования и методом подпространственного пересечения. На основе критерия Смита найден теоретический предел углового разрешения в зависимости от отношения сигнал/шум и объема входной выборки.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим акустический волновод, в котором звуковое поле создается J источниками, излучающими детерминированные узкополосные сигналы $s_j(t)$ ($j = 1, \dots, J$) с одинаковой несущей частотой. Прием осуществляется линейной горизонтальной АР, состоящей из N элементов, расположенных на горизонте z_a . Положение j -го источника определяется глубиной его погружения z_j , расстоянием r_j до приемной АР и азимутальным углом ϕ_j , отсчитываемым от нормали к апер-

туре АР. Геометрия задачи показана на рис. 1. (Начало координат по дальности выбрано в месте установки первого элемента АР.)

В узкополосном приближении поле на входе АР характеризуется N -мерным вектором наблюдения \mathbf{x}_l :

$$\mathbf{x}_l = \sum_{j=1}^J \mathbf{g}(\phi_j, \theta_j) s_j(l) + \mathbf{n}_l, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (1)$$

Здесь l – номер выборочного отсчета, $\theta_j = (r_j, z_j)^T$ (верхний индекс T означает операцию транспонирования), $\mathbf{g}(\phi_j, \theta_j) = [G(\mathbf{r}_1, z_a | \mathbf{r}_j, z_j), \dots, G(\mathbf{r}_N, z_a | \mathbf{r}_j, z_j)]^T$ – вектор отклика АР при приеме сигнала от j -го источника, $\{G(\mathbf{r}_n, z_a | \mathbf{r}_j, z_j)\}_{n=1}^N$ – функции Грина среды распространения, \mathbf{n}_l – вектор аддитивного белого шума, а L – объем входной выборки. Задача состоит в построении адаптивного алгоритма обработки, позволяющего по принятой выборке $\{\mathbf{x}_l\}_{l=1}^L$ оценить угловые положения источников без знания их пространственных координат, и определении наименьшего углового разнесения, при котором источники могут быть корректно разрешены.

При дальнейшем анализе будем считать, что \mathbf{n}_l является случайным гауссовым вектором с нулевым средним значением и характеризуется ковариационной матрицей $\langle \mathbf{n}_l \mathbf{n}_l^+ \rangle = \sigma_n^2 \mathbf{I}_N$, где σ_n^2 – неизвестный уровень шума, \mathbf{I}_N – единичная матрица размерности $N \times N$, а $(\cdot)^+$ и $\langle \cdot \rangle$ означают операции эрмитового сопряжения и статистического усреднения, соответственно.

В рамках волнового подхода функция Грина $G(\mathbf{r}_n, z_a | \mathbf{r}_j, z_j)$ может быть представлена в виде суперпозиции конечного числа M распространяющихся нормальных мод. При расположении источников в дальней зоне антенны (когда $|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_j| \approx r_j - d(n-1)\sin(\phi_j)$, где d – межэлемент-

ное расстояние) эта функция записывается следующим образом

$$G(\mathbf{r}_n, z_a | \mathbf{r}_j, z_j) = \sum_{m=1}^M e^{ik_m d(n-1)\sin\phi_j} b_m(\boldsymbol{\theta}_j), \quad (2)$$

$$b_m(\boldsymbol{\theta}_j) = \frac{\varphi_m(z_j)\varphi_m(z_a)}{\sqrt{8\pi k_m r_j}} e^{ik_m r_j + i\pi/4}.$$

Здесь $\varphi_m(z_a)$ и $\varphi_m(z_j)$ – собственные функции m -ой моды на глубине расположения приемной АР и j -го источника излучения, соответственно, а k_m – горизонтальное волновое число.

С использованием модового описания для вектора отклика АР имеем:

$$\mathbf{g}(\phi, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{U}(\phi) \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}), \quad (3)$$

где $\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})$ – вектор размерности $M \times 1$, компонентами которого являются амплитуды мод, определяемые формулой (2), а $\mathbf{U}(\phi)$ – матрица размерности $N \times M$ вида

$$\mathbf{U}(\phi) = [\mathbf{u}_1(\phi) \cdots \mathbf{u}_M(\phi)], \quad \text{где}$$

$$\mathbf{u}_m(\phi) = (1, e^{ik_m d \sin(\phi)}, \dots, e^{ik_m d(N-1)\sin(\phi)})^T,$$

$$m = 1, \dots, M.$$

При $M < N$ ранг матрицы $\mathbf{U}(\phi)$ равен M (при условии, что векторы $\{\mathbf{u}_m(\phi)\}_{m=1}^M$ линейно независимы).

С учетом (3) исходный вектор наблюдения (1) может быть переписан следующим образом

$$\mathbf{x}_l = \mathbf{G}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l + \mathbf{n}_l, \quad l = 1, 2, \dots, L.$$

Здесь $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_J)^T$ – искомый вектор направлений размерности $J \times 1$, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1^T, \dots, \boldsymbol{\theta}_J^T)^T$ – вектор размерности $2J \times 1$, определяющий пространственные положения источников, $\mathbf{G}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{U}(\phi_1)\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_1), \dots, \mathbf{U}(\phi_J)\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_J)]$ – передаточная матрица канала размерности $N \times J$, а $\mathbf{s}_l = [s_1(l), \dots, s_J(l)]^T$ – вектор комплексных огибающих излученных сигналов размерности $J \times 1$.

Одним из наиболее распространенных способов локализации является метод MUSIC [13]. Эта процедура основана на использовании информации, содержащейся в системе собственных векторов $\{\hat{\boldsymbol{\psi}}_{i=1}^N$ выборочной матрицы $\hat{\Gamma}_x = (1/L) \sum_{l=1}^L \mathbf{x}(l)\mathbf{x}^+(l)$:

$$\hat{\Gamma}_x \hat{\boldsymbol{\psi}}_i = \hat{\lambda}_i \hat{\boldsymbol{\psi}}_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_N$ – положительные собственные числа, пронумерованные в порядке убывания, т. е. $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_N$. Первые J старших собственных векторов формируют сигнальное подпростран-

ство $\hat{\Psi}_s = [\hat{\boldsymbol{\psi}}_1 \cdots \hat{\boldsymbol{\psi}}_J]$, а $N - J$ оставшихся векторов – шумовое $\hat{\Psi}_n = [\hat{\boldsymbol{\psi}}_{J+1}, \dots, \hat{\boldsymbol{\psi}}_N]$.

Для рассматриваемого сценария положения источников могут быть найдены из условия

$$(\hat{\phi}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \arg \min_{\phi, \boldsymbol{\theta}} \|\hat{\Psi}_n^+ \mathbf{g}(\phi, \boldsymbol{\theta})\|^2 \equiv$$

$$\equiv \arg \min_{\phi, \boldsymbol{\theta}} \mathbf{g}^+(\phi, \boldsymbol{\theta}) \hat{\Pi}_n \mathbf{g}(\phi, \boldsymbol{\theta}), \quad (4)$$

где $\hat{\Pi}_n = \hat{\Psi}_n \hat{\Psi}_n^+$ – проекционная матрица на шумовое подпространство. Процедура оценивания сводится к поиску J минимумов целевой функции $\mathbf{g}^+(\phi, \boldsymbol{\theta}) \hat{\Pi}_n \mathbf{g}(\phi, \boldsymbol{\theta})$ в трехмерной области параметров. Последнее требует больших вычислительных затрат.

Ниже нас будет интересовать оценка угловых координат источников в волноводе. Тогда, рассматривая модовый вектор $\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})$ (зависящий от неинформационного параметра $\boldsymbol{\theta}$) как неизвестный и принимая во внимание представление (3), переформулируем критерий MUSIC (4) следующим образом

$$\hat{\phi} = \arg \min_{\phi} \{\min_{\mathbf{b}} \mathbf{b}^+ \mathbf{C}(\phi) \mathbf{b}\}, \quad (5)$$

где $\mathbf{C}(\phi) = \mathbf{U}^+(\phi) \hat{\Pi}_n \mathbf{U}(\phi)$ – матрица размерности $M \times M$, ранг которой равен $\text{rank}\{\mathbf{C}\} = \text{rank}\{\hat{\Pi}_n\} = \min(N - J, M)$, и при

$$N > M + J \quad (6)$$

совпадает с числом распространяющихся нормальных волн M .

Входящий в (5) неизвестный вектор \mathbf{b} может быть найден лишь с точностью до произвольного комплексного множителя, поэтому для однозначного определения \mathbf{b} можно наложить на него дополнительное ограничение $\|\mathbf{b}\|^2 = 1$ (исключающее тривиальное решение $\mathbf{b} = 0$). В этом случае минимум квадратичной формы $\mathbf{b}^+ \mathbf{C}(\phi) \mathbf{b}$ реализуется при условии совпадения \mathbf{b} с собственным вектором, отвечающим наименьшему собственному значению $\lambda_{\min}\{\mathbf{C}(\phi)\}$ матрицы $\mathbf{C}(\phi)$. В результате угловые положения источников могут быть найдены из следующего критерия:

$$\hat{\phi} = \arg \max_{\phi} P_{\text{NM-RARE}}(\phi), \quad (7)$$

$$P_{\text{NM-RARE}}(\phi) = 1/\lambda_{\min}\{\mathbf{C}(\phi)\}.$$

Метод оценивания (7) аналогичен алгоритму пониженного ранга RARE [14, 15], используемому в технике частично калиброванных АР, в котором роль числа подрешеток играет число мод M , а вектор амплитудно-фазовой калибровки соответствующих подрешеток заменяется вектором \mathbf{b} . Важно подчеркнуть, что матрица \mathbf{C} не содержит

информации о глубине источников и их удалении от АР; следовательно, критерий (7) позволяет определить направления на источники путем одномерного поиска J максимумов выходной мощности процессора NM-RARE.

2. ПОСТРОЕНИЕ АДАПТИВНОЙ ПРОЦЕДУРЫ NM-RARE

Приведенный алгоритм (7) предполагает априорное знание матрицы направлений $\mathbf{U}(\phi)$. Однако на практике в качестве этой матрицы (вследствие неполной информации о канале распространения) используется некоторая оценочная матрица $\mathbf{U}_0(\phi)$, рассчитываемая для номинальных акустических характеристик волновода. При наличии рассогласования между $\mathbf{U}(\phi)$ и $\mathbf{U}_0(\phi)$ предложенный способ оценивания нуждается в уточнении.

При построении адаптивной процедуры NM-RARE, основанной на наихудшем сценарии приема, будем предполагать возможность контролируемого отклонения ожидаемой матрицы $\mathbf{U}_0(\phi)$ от истинной $\mathbf{U}(\phi)$: норма Фробениуса матрицы рассогласования не должна превышать заданную величину: $\|\mathbf{U}(\phi) - \mathbf{U}_0(\phi)\|_F^2 \leq \varepsilon$, где ε – положительный параметр регуляризации. Адаптация к неизвестным условиям приема состоит в нахождении робастной матрицы $\mathbf{U}(\phi, \varepsilon)$, удовлетворяющей указанному ограничению, условию нормировки и обеспечивающей минимум целевой функции $\mathbf{b}^+ \mathbf{U}^+(\phi) \hat{\Pi}_n \mathbf{U}(\phi) \mathbf{b}$ для всех возможных значений нормированных векторов \mathbf{b} :

$$\min_{\mathbf{U}} \{ \mathbf{b}^+ \mathbf{U}(\phi)^+ \hat{\Pi}_n \mathbf{U}(\phi) \mathbf{b} \} \quad (8)$$

$$\text{при } \|\mathbf{U}(\phi) - \mathbf{U}_0(\phi)\|_F^2 \leq \varepsilon, \quad \|\mathbf{U}(\phi)\|_F^2 = M.$$

Решение оптимизационной задачи (8) может быть найдено с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа аналогично тому, как это сделано в [16, 17]. В итоге искомые положения источников находятся из условия максимума выходной мощности адаптивного процессора NM-RARE:

$$\hat{\phi} = \arg \max_{\phi} P_{\text{NM-RARE}}(\phi, \varepsilon), \quad (9)$$

$$P_{\text{NM-RARE}}(\phi, \varepsilon) = 1/f(\phi, \varepsilon) \lambda_{\min}\{\mathbf{C}_0(\phi)\},$$

где

$$\mathbf{C}_0(\phi) = \mathbf{U}_0^+(\phi) \hat{\Pi}_n \mathbf{U}_0(\phi), \quad f(\phi, \varepsilon) = 1 - \varepsilon/(2M) + \sqrt{(\varepsilon/M)(1 - \varepsilon/4M)[1 - V_0(\phi)]/V_0(\phi)},$$

$$V_0(\phi) = M^{-1} \text{Tr}[\mathbf{U}_0^+(\phi) \hat{\Pi}_n \mathbf{U}_0(\phi)],$$

а $\text{Tr}(\cdot)$ означает след матрицы. При $\varepsilon = 0$ функция $f(\phi, \varepsilon) = 1$ и, следовательно, неадаптивный метод

NM-RARE является частным случаем предложенного способа оценивания.

Отметим также, что в процессе поиска азимутальных углов параметр регуляризации ε должен удовлетворять неравенству $\varepsilon < 2M[1 - \sqrt{1 - V_0(\phi)}]$, поскольку в противном случае целевая функция всюду обращается в нуль.

3. ГРАНИЦА КРАМЕРА–РАО И ПРЕДЕЛ УГЛОВОГО РАЗРЕШЕНИЯ

Обозначим через $\hat{\boldsymbol{\phi}} = (\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_J)^T$ оценку вектора угловых координат источников (полученную без использования информации о глубинах их погружения и расстояний до приемной АР). Ковариационная матрица ошибки этого вектора удовлетворяет неравенству

$$\langle (\boldsymbol{\phi} - \hat{\boldsymbol{\phi}})(\boldsymbol{\phi} - \hat{\boldsymbol{\phi}})^T \rangle \geq \text{CRB}(\boldsymbol{\phi}),$$

где $\text{CRB}(\boldsymbol{\phi})$ – нижняя граница Крамера–Рао, определяющая предел точности измерения соответствующих координат. Для рассматриваемого сценария (когда форма огибающих излученных сигналов и векторы модовых амплитуд являются неинформативными параметрами) матрица $\text{CRB}(\boldsymbol{\phi})$ размерности $J \times J$ дается выражением

$$\text{CRB}(\boldsymbol{\phi}) = \frac{\sigma_n^2}{2L} \text{Re}(\mathbf{F} - \mathbf{K}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{K}^+)^{-1}, \quad (10)$$

в котором блоки $\mathbf{F} \in C^{J \times J}$, $\mathbf{K} \in C^{J \times MJ}$ и $\boldsymbol{\Sigma} \in C^{MJ \times MJ}$ равны

$$\mathbf{F} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}}^+ \mathbf{\Pi}_G^+ \mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}} \circ \mathbf{R}_s^T, \quad \mathbf{K} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}}^+ \mathbf{\Pi}_G^+ \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} \circ (\mathbf{1}_M^T \otimes \mathbf{R}_s^T), \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}}^+ \mathbf{\Pi}_G^+ \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} \circ (\mathbf{1}_M \mathbf{1}_M^T \otimes \mathbf{R}_s^T).$$

Здесь $\mathbf{\Pi}_G^+ = \mathbf{I}_N - \mathbf{G}(\mathbf{G}^+\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^+ \in C^{N \times N}$, $\hat{\mathbf{R}}_s = (1/L) \times \sum_{l=1}^L \mathbf{s}_l \mathbf{s}_l^+ \in C^{J \times J}$ – выборочная сигнальная матрица, $\mathbf{1}_M = (1, \dots, 1)^T$ – вектор размерности $M \times 1$ с единичными компонентами, а символы \circ и \otimes означают произведение Адамара и Кронекера, соответственно. Матрицы $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}} \in C^{N \times J}$ и $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} \in C^{N \times MJ}$, входящие в (10), определены соотношениями

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\phi}} = \left[\frac{d\mathbf{U}(\phi_1)}{d\phi_1} \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_1), \dots, \frac{d\mathbf{U}(\phi_J)}{d\phi_J} \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_J) \right], \quad (12)$$

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} = [\mathbf{D}_1 \dots \mathbf{D}_M], \quad \mathbf{D}_m = [\mathbf{U}(\phi_1) \mathbf{e}_m, \dots, \mathbf{U}(\phi_J) \mathbf{e}_m], \quad (13)$$

$$m = 1, \dots, M,$$

где $\mathbf{e}_m = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, 1, 0, \dots, 0)^T$ представляет собой m -ый столбец единичной матрицы размерности $M \times M$. Вывод формулы (10) приведен в Приложении.

В случае, когда глубины погружения источников и их расстояния до приемной АР известны априори (следовательно, известны векторы соответствующих модовых амплитуд), формула (10) упрощается и переходит в классическое выражение, полученное в работе [18] применительно к детерминированной модели излучаемых сигналов:

$$\mathbf{CRB}_{\text{det}}(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{\sigma_n^2}{2L} \text{Re}(\mathbf{D}_\Phi^+ \Pi_G^\perp \mathbf{D}_\Phi \circ \hat{\mathbf{R}}_s^T)^{-1}. \quad (14)$$

Заметим, что в отличие от (14) соотношение (10) содержит слагаемое $-\mathbf{K}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{K}^T$. Поскольку согласно (11) $\boldsymbol{\Sigma}$ является неотрицательно определенной эрмитовой матрицей, то $\mathbf{K}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{K}^T \geq 0$ и, следовательно, справедливо неравенство $\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\varphi}) \geq \mathbf{CRB}_{\text{det}}(\boldsymbol{\varphi})$. Последнее отражает очевидный факт, в соответствии с которым введение в модель дополнительного неизвестного параметра приводит к потере точности искомой оценки (т.е. увеличению ее дисперсии).

Ниже основное внимание будет уделено решению задачи локализации двух акустических источников с близкими угловыми положениями. В рассматриваемой ситуации матрица Крамера–Рао размерности 2×2 может быть представлена в виде

$$\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}), \quad \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\varphi}) = (2L/\sigma_n^2) \text{Re}(\mathbf{F} - \mathbf{K}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{K}^+)$ имеет смысл информационной матрицы Фишера. Отметим, что для обращения $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\varphi})$ можно воспользоваться формулой

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 - \mu} \begin{pmatrix} 1/f_{11} & -\mu/f_{12} \\ -\mu/f_{21} & 1/f_{22} \end{pmatrix},$$

в которой $\mu = f_{12}f_{21}/f_{11}f_{22}$. В свою очередь, выборочная сигнальная матрица $\hat{\mathbf{R}}_s$, входящая в $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\varphi})$, в данном случае записывается следующим образом

$$\hat{\mathbf{R}}_s = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2 \rho} \\ \sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2 \rho}^* & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\rho = \frac{(1/L) \sum_{l=1}^L s_1(l) s_2^*(l)}{\sigma_1 \sigma_2},$$

где $\sigma_{1,2}^2 = (1/L) \sum_{l=1}^L |s_{1,2}(l)|^2$ – уровни излучения, а параметр ρ описывает степень корреляции между излученными сигналами.

Нас будет интересовать минимальное угловое расстояние между источниками $\delta = |\phi_1 - \phi_2|$, при

котором они могут быть одновременно корректно локализованы. Согласно критерию Смита [10], два источника разрешимы, если δ превосходит среднеквадратичную дисперсию оценки соответствующего углового расстояния:

$$\delta \geq \sqrt{\text{var}(\delta)}. \quad (15)$$

В свою очередь, дисперсия $\text{var}(\delta)$, фигурирующая в (15), удовлетворяет неравенству $\text{var}(\delta) \geq \mathbf{CRB}(\delta)$, где $\mathbf{CRB}(\delta)$ – соответствующая граница Крамера–Рао, равная [19]

$$\mathbf{CRB}(\delta) = \mathbf{CRB}(\phi_1) - 2\mathbf{CRB}(\phi_1, \phi_2) + \mathbf{CRB}(\phi_2),$$

а $\mathbf{CRB}(\phi_1) = [\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\varphi})]_{1,1}$, $\mathbf{CRB}(\phi_1, \phi_2) = [\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\varphi})]_{1,2}$, $\mathbf{CRB}(\phi_2) = [\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\varphi})]_{2,2}$.

Предел углового разрешения находится из условия равенства обеих частей критерия (15) и замены $\text{var}(\delta)$ на $\mathbf{CRB}(\delta)$. В результате искомая величина δ является наименьшим положительным корнем уравнения

$$\delta^2 = \mathbf{CRB}(\delta). \quad (16)$$

Отметим, что для заданной геометрии АР найденное таким образом δ зависит от угла прихода, отношения сигнал/шум, объема входной выборки и степени коррелированности излучаемых сигналов.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Приведем результаты статистического моделирования, иллюстрирующие работоспособность предложенного алгоритма (9) и сравним его эффективность с традиционным методом сканирования и методом SI, согласно которому векторы сигнального подпространства $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_s$ и векторы модового подпространства $\mathbf{U}(\phi)$ при $\phi \in (\phi_1, \dots, \phi_J)$ становятся линейно зависимыми. В результате искомые положения источников могут быть найдены из условия пересечения соответствующих подпространств [5]:

$$\hat{\phi} = \arg \max_{\phi} P_{SI}(\phi), \quad (17)$$

$$P_{SI}(\phi) = 1/\lambda_{\min} \{ \hat{\boldsymbol{\Psi}}_s^+ \mathbf{P}_U^\perp(\phi) \hat{\boldsymbol{\Psi}}_s \},$$

где $\lambda_{\min} \{ \cdot \}$ означает минимальное собственное значение матрицы, стоящей в скобках, а $\mathbf{P}_U^\perp(\phi) = \mathbf{I}_N - \mathbf{U}(\phi)[\mathbf{U}^+(\phi)\mathbf{U}(\phi)]^{-1}\mathbf{U}^+(\phi)$ – проекционная матрица размерности $N \times N$.

Подчеркнем, что метод сканирования не учитывает волноводный характер распространения звука, а процедура (17) опирается на априорное знание среды распространения.

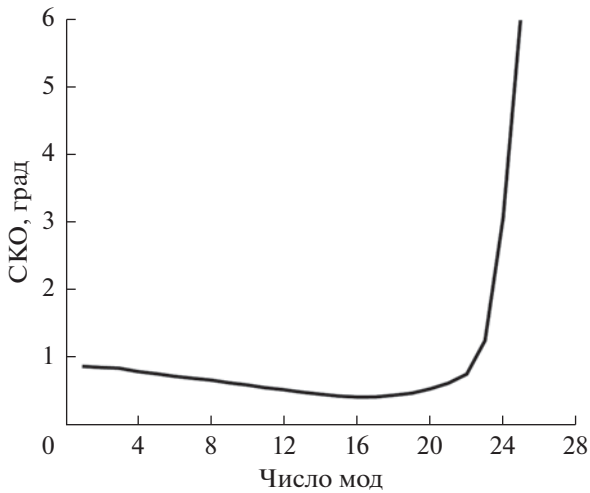


Рис. 2. Среднеквадратическая ошибка оценивания угловых положений источников в зависимости от числа используемых мод.

В качестве примера рассмотрим мелководный канал глубины $H = 160$ м с характерной летней гидрологией, изображенной на рис. 1б, в котором звуковое поле создается двумя детерминированными источниками одинаковой мощности, излучающими узкополосные сигналы с несущей частотой 250 Гц. В рамках численного эксперимента дно моделировалось жидким поглощающим полупространством с плотностью $\rho_b = 1.8$ г/см³, скоростью звука $c_b = 1750$ м/с и коэффициентом поглощения $\beta = 0.13$ дБ/λ, а при расчете ожидаемой матрицы $U_0(\phi)$ в качестве номинальных геоакустических параметров дна использовались значения $H = 162.5$ м, $\rho_b = 1.75$ г/см³, $c_b = 1725$ м/с и $\beta = 0.1$ дБ/λ. Для рассматриваемой несущей частоты и указанных акустических характеристик канала полное число мод M составляло 28.

Предполагалось, что источники находятся на горизонтах 40 и 70 м и удалены соответственно на расстояния 15 и 10 км от горизонтальной приемной антенны, состоящей из $N = 20$ элементов, расположенных через 3 м на глубине 155 м. Направление на первый источник $\phi_1 = 30^\circ$, а угловое положение второго задавалось в виде $\phi_2 = \phi_1 + \delta$, где $\delta \in (0.2^\circ \dots 6^\circ)$. При вычислениях коэффициент корреляции ρ брался равным 0.4, а входные отношения сигнал/шум, определяемые соотношениями

$$SNR_j = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_n^2} \|g(\phi_j, \theta_j)\|^2 / N, \quad j = 1, 2,$$

считались одинаковыми, т. е. $SNR_1 = SNR_2 = SNR$.

Обратим внимание, что для данных N , J и M условие (6) не выполняется, и для реализации

предложенного метода необходимо ограничить число мод, участвующих в процессе локализации (причем максимально допустимое значение используемых мод не должно превышать $N - J = 18$). Ниже при построении матрицы $U_0(\phi)$ учитывались первые 16 нормальных волн волновода. В частности, при таком выборе M применение алгоритма (9) для $\epsilon = 0.25$ обеспечивает минимум среднеквадратических ошибок (СКО) оценивания угловых положений источников, отстоящих друг от друга на расстояние $\delta = 6^\circ$, как показано на рис. 2. Соответствующие ошибки рассчитывались по формуле

$$СКО(\hat{\phi}) = \sqrt{(QJ)^{-1} \sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^J (\hat{\phi}_j^{(q)} - \phi_j)^2},$$

в которой $\hat{\phi}_j^{(q)}$ – оценка угловой координаты j -го источника для q -ой реализации вектора наблюдения, $J = 2$, а общее число независимых реализаций Q бралось равным 1000. Выборочная ковариационная матрица формировалась по $L = 100$ временным отсчетам, а входное SNR составляло 0 дБ.

Для используемых методов оценивания на рис. 3а и 3б изображены угловые зависимости нормированной (на максимальное значение) мощности на выходе АР, принимающей сигналы от двух источников, разнесенных друг относительно друга на расстояние 6° и 2° , соответственно. Кривая 1 на рис. 3 отвечает традиционному способу сканирования, кривая 2 – методу SI, а кривая 3 соответствует алгоритму NM-RARE (9). Из рис. 3б видно, что в данном примере лишь адаптивный метод в состоянии различить два источника и одновременно оценить искомые направления.

Одной из важных характеристик алгоритма является достигаемая с его помощью вероятность разрешения источников с близкими углами прихода. В качестве оценки соответствующей вероятности используется величина

$$\hat{P}_{RES} = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q p_q,$$

$$p_q = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j=1}^2 |\hat{\phi}_j^{(q)} - \phi_j| < |\phi_1 - \phi_2|; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На рис. 4а для рассматриваемых способов обработки представлены результаты расчета P_{RES} в зависимости от величины углового расстояния между источниками. Очевидно, что наилучшие потенциальные возможности демонстрирует предложенный метод локализации (9), позволяющий с вероятностью 0.9 разрешить источники,

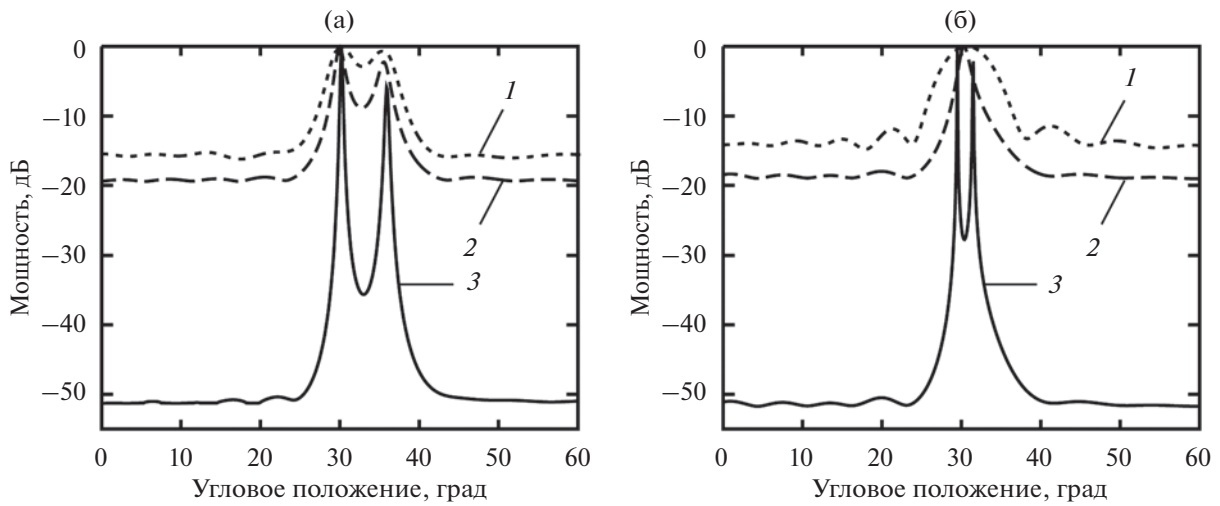


Рис. 3. Угловая зависимость выходной мощности АР, принимающей сигналы от двух источников, разнесенных друг относительно друга на расстояние (а) – 6° и (б) – 2° .

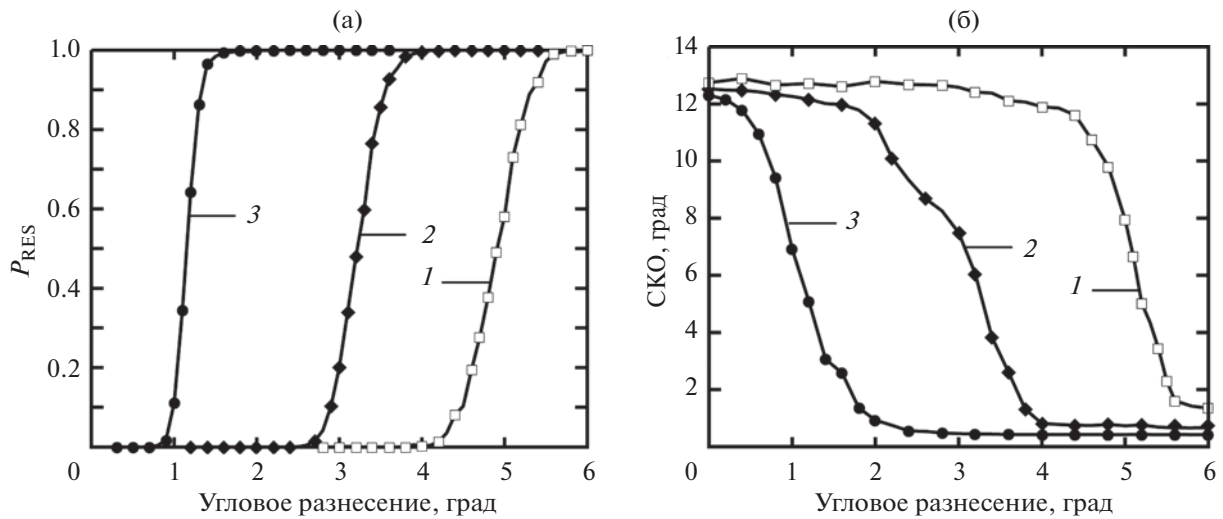


Рис. 4. (а) – Вероятность разрешения и (б) – среднеквадратическая ошибка оценивания в зависимости от углового расстояния между источниками.

отстоящие друг относительно друга на величину порядка 1.5° .

На рис. 4б показано поведение среднеквадратической ошибки измерения угловых координат в зависимости от расстояния между источниками. Из приведенных кривых следует, что применение алгоритма NM-RARE позволяет значительно повысить точность оценивания по сравнению с неадаптивными методами.

В заключение этого раздела приведем результаты расчета предела углового разрешения, являющегося наименьшим положительным корнем уравнения (16). Для рассматриваемой постановки задачи на рис. 5а изображена зависимость вели-

чины δ от входного SNR (при этом выборочная ковариационная матрица формировалась по $L = 100$ временным отсчетам), а на рис. 5б – зависимость δ от числа выборок L при SNR = 0 дБ. Параметром кривых является угловое положение ϕ_1 фиксированного источника. Из этого рисунка видно, что минимально возможное расстояние между источниками является монотонно убывающей функцией SNR и L , при этом разрешающая способность антенны снижается с ростом угла прихода. Важно подчеркнуть, что полученный предел разрешения является фундаментальной величиной, независящей от вида используемого алгоритма.

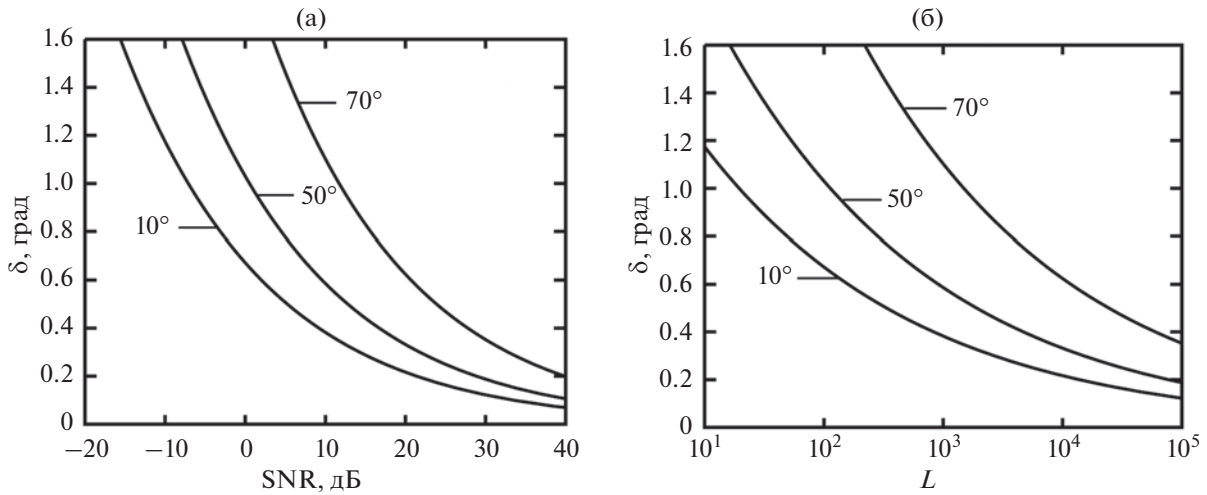


Рис. 5. Зависимость δ от входного (а) – SNR и (б) – объема выборки L для различных угловых положений φ_1 фиксированного источника.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построен робастный алгоритм NM-RARE, позволяющий определить угловые положения источников без знания их пространственных координат в канале с неточно известными параметрами. Приведены результаты математического моделирования предложенного метода, иллюстрирующие приемлемую точность оценивания направлений на источники и высокую вероятность углового разрешения в сравнении с известными неадаптивными способами, предполагающими априорное знание акустических характеристик волновода.

На основе критерия Смита определено наименьшее угловое расстояние между источниками, при котором возможна их корректная локализация, в зависимости от входного отношения сигнал/шум и объема входной выборки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-19-00383).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВЫВОД ФОРМУЛЫ (10)

Для рассматриваемой постановки задачи выборочный вектор наблюдения \mathbf{x}_l является комплексным гауссовым вектором со средним значением $\mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l$ и ковариационной матрицей $\sigma_n^2\mathbf{I}_N$.

Обозначим через $\boldsymbol{\alpha}$ вектор, содержащий $(1 + 2M + 2L)J$ неизвестных параметров сигнальной компоненты вектора наблюдения

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\varphi}^T, \boldsymbol{\eta}^T, \text{Re}\{\mathbf{s}_1\}^T, \dots, \text{Re}\{\mathbf{s}_L\}^T, \text{Im}\{\mathbf{s}_1\}^T, \dots, \text{Im}\{\mathbf{s}_L\}^T]^T,$$

где $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\xi}^T, \boldsymbol{\zeta}^T)^T$, а $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1^T \dots, \boldsymbol{\xi}_M^T)^T$ и $\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta}_1^T, \dots, \boldsymbol{\zeta}_M^T)^T$ – векторы размерности $MJ \times 1$, составленные из реальных и мнимых коэффициентов комплексных амплитуд мод:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_m &= [\text{Re}\{b_m(\boldsymbol{\theta}_1)\}, \dots, \text{Re}\{b_m(\boldsymbol{\theta}_J)\}]^T, \\ \boldsymbol{\zeta}_m &= [\text{Im}\{b_m(\boldsymbol{\theta}_1)\}, \dots, \text{Im}\{b_m(\boldsymbol{\theta}_J)\}]^T, \\ m &= 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Как известно (см., например, [20]), при приеме детерминированного сигнала, регистрируемого на фоне белого шума, нижняя граница Крамера–Рао, определяющая потенциально достижимую точность оценки вектора $\boldsymbol{\alpha}$, не зависит от уровня шума и дается выражением

$$\text{CRB}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\sigma_n^2}{2} \left\{ \sum_{l=1}^L \text{Re}\{\mathbf{W}_l^+ \mathbf{W}_l\} \right\}^{-1}, \quad (\text{П1})$$

в котором

$$\mathbf{W}_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\varphi}^T}, \frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\xi}^T}, \frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\zeta}^T}, \frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \text{Re}\{\mathbf{s}_l\}^T}, \frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_l}{\partial \text{Im}\{\mathbf{s}_l\}^T} \end{bmatrix}, \quad (\text{П2})$$

а $\mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{U}(\varphi_1)\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_1), \dots, \mathbf{U}(\varphi_J)\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_J)]$.

Рассчитаем производные, входящие в (П2). Для первого блока, фигурирующего в правой части (П2), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\varphi}^T} = \left[\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l}{\partial \phi_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l}{\partial \phi_J} \right],$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l}{\partial \phi_j} = \mathbf{d}_{j, s_j(l)}, \quad \mathbf{d}_j = \frac{d\mathbf{U}(\phi_j)}{d\phi_j} \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_j)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\varphi}^T} = [\mathbf{d}_{1, s_1(l)}, \dots, \mathbf{d}_{J, s_J(l)}] \equiv \mathbf{D}_\varphi \mathbf{S}_l,$$

где \mathbf{D}_φ определяется формулой (12), а $\mathbf{S}_l = \text{diag}(s_l)$.

Далее,

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\xi}^T} = \left[\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l}{\partial \xi_1^T}, \dots, \frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l}{\partial \xi_M^T} \right],$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l}{\partial \xi_m^T} = \left[\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l}{\partial \text{Re}\{b_m(\boldsymbol{\theta}_1)\}}, \dots, \frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l}{\partial \text{Re}\{b_m(\boldsymbol{\theta}_J)\}} \right].$$

Учитывая, что $\partial \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_j) / \partial \text{Re}\{b_m(\boldsymbol{\theta}_j)\} = \mathbf{e}_m$, где \mathbf{e}_m представляет собой m -ый столбец единичной матрицы размерности $M \times M$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\xi}_m^T} = [\mathbf{U}(\phi_1) \mathbf{e}_m s_1(l), \dots, \mathbf{U}(\phi_J) \mathbf{e}_m s_J(l)] \equiv \mathbf{D}_m \mathbf{S}_l,$$

где \mathbf{D}_m дается соотношением (13). Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\xi}^T} = [\mathbf{D}_1 \mathbf{S}_l, \dots, \mathbf{D}_M \mathbf{S}_l] \equiv \mathbf{H}_l.$$

Аналогичные вычисления для третьего блока в (П2) приводят к результату

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l}{\partial \boldsymbol{\xi}^T} = i \mathbf{H}_l.$$

Наконец, для последних двух слагаемых в (П2) следует

$$\frac{\partial \mathbf{G} \mathbf{s}_l}{\partial \text{Re}\{s_l\}^T} = \mathbf{G}, \quad \frac{\partial \mathbf{G} \mathbf{s}_l}{\partial \text{Im}\{s_l\}^T} = i \mathbf{G}.$$

Таким образом, матрица \mathbf{W}_l представима в виде

$$\mathbf{W}_l = [\mathbf{D}_\varphi \mathbf{S}_l, \mathbf{H}_l, i \mathbf{H}_l, \mathbf{G}, i \mathbf{G}]. \quad (\text{П3})$$

Ниже нас будет интересовать минимальная дисперсия оценки угловых координат источников, для чего удобно преобразовать матрицу (П1) к блочно-диагональному виду. Для этого заметим, что при фиксированном номере выборочного отсчета l матрица \mathbf{W}_l зависит от неизвестного вектора $\boldsymbol{\alpha}_l = [\boldsymbol{\varphi}^T, \boldsymbol{\eta}^T, \text{Re}\{s_l\}^T, \text{Im}\{s_l\}^T]^T$. Следуя идее

работ [14, 21], удобно ввести в рассмотрение вектор $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_l$ вида

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_l = [\boldsymbol{\varphi}^T, \boldsymbol{\eta}^T, \text{Re}\{\mathbf{V}_l\} \boldsymbol{\varphi} + \text{Re}\{\mathbf{T}_l\} \boldsymbol{\eta} + \text{Re}\{s_l\}, \\ \text{Im}\{\mathbf{V}_l\} \boldsymbol{\varphi} + \text{Im}\{\mathbf{T}_l\} \boldsymbol{\eta} + \text{Im}\{s_l\}]^T,$$

где $\mathbf{V}_l = (\mathbf{G}^+ \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^+ \mathbf{D}_\varphi \mathbf{S}_l$, $\mathbf{T}_l = (\mathbf{G}^+ \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^+ \boldsymbol{\Delta}_l$, а $\boldsymbol{\Delta}_l = [\mathbf{H}_l, i \mathbf{H}_l]$.

Соответствующий вектор связан с $\boldsymbol{\alpha}_l$ соотношением

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_l = \mathbf{C}_l \boldsymbol{\alpha}_l, \quad \text{где } \mathbf{C}_l = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \text{Re}\{\mathbf{V}_l\} & \text{Re}\{\mathbf{T}_l\} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \text{Im}\{\mathbf{V}_l\} & \text{Im}\{\mathbf{T}_l\} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Для нового вектора

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = [\boldsymbol{\varphi}^T, \boldsymbol{\eta}^T, \text{Re}\{\tilde{\mathbf{s}}_1\}^T, \dots, \text{Re}\{\tilde{\mathbf{s}}_L\}^T, \\ \text{Im}\{\tilde{\mathbf{s}}_1\}^T, \dots, \text{Im}\{\tilde{\mathbf{s}}_L\}^T]^T,$$

где $\tilde{\mathbf{s}}_l = \mathbf{s}_l + \mathbf{V}_l \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{T}_l \boldsymbol{\eta}$, граница Крамера–Рао может быть рассчитана по формуле

$$\text{CRB}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{\sigma_n^2}{2} \left\{ \sum_{l=1}^L (\mathbf{C}_l^{-1})^T \text{Re}\{\mathbf{W}_l^+ \mathbf{W}_l\} \mathbf{C}_l^{-1} \right\}^{-1}. \quad (\text{П4})$$

Для невырожденной матрицы \mathbf{C}_l существует обратная, равная

$$\mathbf{C}_l^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\text{Re}\{\mathbf{V}_l\} & -\text{Re}\{\mathbf{T}_l\} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\text{Im}\{\mathbf{V}_l\} & -\text{Im}\{\mathbf{T}_l\} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Тогда, привлекая (П3), нетрудно найти, что

$$\mathbf{W}_l \mathbf{C}_l^{-1} = [\mathbf{D}_\varphi \mathbf{S}_l - \mathbf{G} \mathbf{V}_l, \boldsymbol{\Delta}_l - \mathbf{G} \mathbf{T}_l, \mathbf{G}, i \mathbf{G}] \equiv \\ \equiv [\mathbf{P}_G^\perp \mathbf{D}_\varphi \mathbf{S}_l, \mathbf{P}_G^\perp \mathbf{H}_l, i \mathbf{P}_G^\perp \mathbf{H}_l, \mathbf{G}, i \mathbf{G}], \quad (\text{П5})$$

где $\mathbf{P}_G^\perp = \mathbf{I}_N - \mathbf{G}(\mathbf{G}^+ \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^+$. Подставляя (П5) в (П4) и принимая во внимание, что $\mathbf{G}^+ \mathbf{P}_G^\perp = \mathbf{0}$, для $\text{CRB}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$ получим

$$\text{CRB}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{\sigma_n^2}{2L} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\varphi\varphi} & \mathbf{J}_{\varphi\eta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{\varphi\eta}^T & \mathbf{J}_{\eta\eta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{ss} \end{pmatrix} \right)^{-1}. \quad (\text{П6})$$

Здесь $\mathbf{J}_{\varphi\varphi} = \text{Re}\{\mathbf{F}\}$, $\mathbf{J}_{\varphi\eta} = [\text{Re}\{\mathbf{K}\} - \text{Im}\{\mathbf{K}\}]$, $\mathbf{J}_{\eta\eta} = \begin{pmatrix} \text{Re}\{\boldsymbol{\Sigma}\} & -\text{Im}\{\boldsymbol{\Sigma}\} \\ \text{Im}\{\boldsymbol{\Sigma}\} & \text{Re}\{\boldsymbol{\Sigma}\} \end{pmatrix}$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= L^{-1} \sum_{l=1}^L \mathbf{S}_l^+ \mathbf{D}_\varphi^+ \Pi_G^\perp \mathbf{D}_\varphi \mathbf{S}_l \in C^{J \times J}, \\ \mathbf{K} &= L^{-1} \sum_{l=1}^L \mathbf{S}_l^+ \mathbf{D}_\varphi^+ \Pi_G^\perp \mathbf{H}_l \in C^{J \times MJ}, \\ \Sigma &= L^{-1} \sum_{l=1}^L \mathbf{H}_l^+ \Pi_G^\perp \mathbf{H}_l \in C^{MJ \times MJ}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\text{Re}\{\mathbf{K}\} - \text{Im}\{\mathbf{K}\}] \begin{pmatrix} \text{Re}\{\Sigma\} & -\text{Im}\{\Sigma\} \\ \text{Im}\{\Sigma\} & \text{Re}\{\Sigma\} \end{pmatrix}^{-1} \times \\ & \times \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{K}\}^T \\ \text{Im}\{\mathbf{K}\}^T \end{bmatrix} = \text{Re}(\mathbf{K}\Sigma^{-1}\mathbf{K}^+). \end{aligned}$$

$$\text{а } \mathbf{J}_{\text{ss}} = \begin{pmatrix} \text{Re}\{\mathbf{G}^+\mathbf{G}\} & -\text{Im}\{\mathbf{G}^+\mathbf{G}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{G}^+\mathbf{G}\} & \text{Re}\{\mathbf{G}^+\mathbf{G}\} \end{pmatrix}.$$

Учитывая известное матричное соотношение $\text{diag}\{\mathbf{a}\}\mathbf{P}\text{diag}\{\mathbf{b}\} = \mathbf{P} \circ (\mathbf{a}\mathbf{b}^T)$, в котором символ \circ означает произведение Адамара (или поэлементное умножение матриц: $[\mathbf{A} \circ \mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij}[\mathbf{B}]_{ij}$), выражение для \mathbf{F} можно представить в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (1/L) \sum_{l=1}^L \mathbf{S}_l^+ \mathbf{D}_\varphi^+ \Pi_G^\perp \mathbf{D}_\varphi \mathbf{S}_l = \\ &= \mathbf{D}_\varphi^+ \Pi_G^\perp \mathbf{D}_\varphi \circ \sum_{l=1}^L \mathbf{s}_l^* \mathbf{s}_l^T / L \equiv \mathbf{D}_\varphi^+ \Pi_G^\perp \mathbf{D}_\varphi \circ \hat{\mathbf{R}}_s^T, \end{aligned} \quad (\text{П7})$$

где $\hat{\mathbf{R}}_s = (1/L) \sum_{l=1}^L \mathbf{s}_l \mathbf{s}_l^+$ – выборочная сигнальная матрица. При написании (П7) учтено, что для диагональной матрицы \mathbf{S}_l справедливо равенство $\mathbf{S}_l = \mathbf{S}_l^T$ и, следовательно, $\mathbf{S}_l^+ = \mathbf{S}_l^*$, где $(\cdot)^*$ означает операцию комплексного сопряжения.

Аналогично, для матриц \mathbf{K} и Σ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\mathbf{D}_\varphi^+ \Pi_G^\perp \mathbf{D}_1 \circ \hat{\mathbf{R}}_s^T \dots \mathbf{D}_\varphi^+ \Pi_G^\perp \mathbf{D}_M \circ \hat{\mathbf{R}}_s^T] \equiv \\ &\equiv \mathbf{D}_\varphi^+ \Pi_G^\perp \mathbf{D}_\eta \circ (\mathbf{1}_M^T \otimes \hat{\mathbf{R}}_s^T), \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1^+ \Pi_G^\perp \mathbf{D}_1 \circ \hat{\mathbf{R}}_s^T & \dots & \mathbf{D}_1^+ \Pi_G^\perp \mathbf{D}_M \circ \hat{\mathbf{R}}_s^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_M^+ \Pi_G^\perp \mathbf{D}_1 \circ \hat{\mathbf{R}}_s^T & \dots & \mathbf{D}_M^+ \Pi_G^\perp \mathbf{D}_M \circ \hat{\mathbf{R}}_s^T \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \mathbf{D}_\eta^+ \Pi_G^\perp \mathbf{D}_\eta \circ (\mathbf{1}_M \mathbf{1}_M^T \otimes \hat{\mathbf{R}}_s^T), \end{aligned}$$

где $\mathbf{1}_M$ – вектор размерности $M \times 1$ с единичными компонентами, $\mathbf{D}_\eta = [\mathbf{D}_1 \dots \mathbf{D}_M]$, а символ \otimes означает произведение Кронекера.

Интересующая нас ковариационная матрица дисперсий оценок угловых положений источников находится путем обращения левого верхнего блока в (П6) размерности $J \times J$:

$$\begin{aligned} \text{CRB}(\varphi) &= \frac{\sigma_n^2}{2L} (\mathbf{J}_{\varphi\varphi} - \mathbf{J}_{\varphi\eta} \mathbf{J}_{\eta\eta}^{-1} \mathbf{J}_{\eta\varphi}^T)^{-1} = \\ &= \frac{\sigma_n^2}{2L} \text{Re}(\mathbf{F} - \mathbf{K}\Sigma^{-1}\mathbf{K}^+)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{П8})$$

При получении (П8) использован результат работы [18], в соответствии с которым

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елисеевнин В.Л.* О работе горизонтальной линейной антенны в мелком море // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 1. С. 44–49.
2. *Buckingham M.J.* On the response of a towed array to the acoustic field in shallow water // IEEE Proc. 1984. V. 131. Part F. № 3. P. 298–307.
3. *Елисеевнин В.Л.* Определение направления на источник в волноводе с помощью горизонтальной линейной антенны // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 2. С. 208–211.
4. *Lakshminath S., Anand G.V.* Subspace intersection method of high-resolution bearing estimation in shallow ocean // Signal Processing. 2004. V. 84. P. 1367–1384.
5. *Pang J., Lin J., Zhang A., Huang X.* Subspace intersection method of bearing estimation based on least square approach in shallow ocean // In Proc. ICASSP, Las Vegas, NV, USA, 31 March–4 April, 2008. P. 2433–2436.
6. *Cox H.* Resolving power and sensitivity to mismatch of optimum array processors // J. Acoust. Soc. Am. 1973. V. 54. № 3. P. 771–785.
7. *Liu Z., Nehorai A.* Statistical angular resolution limit for point sources // IEEE Trans. Signal Processing. 2007. V. 55. № 11. P. 5521–5527.
8. *Amar A. and Weiss A.J.* Fundamental limitations on the resolution of deterministic signals // IEEE Trans. Signal Processing. 2008. V. 56. №. P. 5309–5318.
9. *El Korso M.N., Boyer R., Renaux A., Marcos S.* On the asymptotic resolvability of two point sources in known subspace interference using a GLRT-based framework // Signal Processing. 2012. V. 92. P. 2471–2483.
10. *Smith S.T.* Statistical resolution limits and the complexified Cramer–Rao bound // IEEE Trans. Signal Processing. 2005. V. 53. № 5. P. 1597–1609.
11. *Robust Adaptive Beamforming / Eds. by Li J. and Stoica P.* John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. 2006. 422 p.
12. *Сазонтов А.Г., Малеханов А.И.* Согласованная пространственная обработка сигналов в подводных звуковых каналах (Обзор) // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 233–253.
13. *Schmidt R.O.* Multiple emitter location and signal parameter estimation // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1986. V. 34. № 3. P. 276–280.
14. *Pesavento M., Gershman A.B., Wong K.M.* Direction finding in partly calibrated sensor arrays composed of multiple subarrays // IEEE Trans. Signal Processing. 2002. V. 50. № 9. P. 2103–2115.
15. *See C.M.S., Gershman A.B.* Direction-of-arrival estimation in partly calibrated subarray-based sensor arrays // IEEE Trans. on Signal Processing. 2004. V. 52. № 2. P. 329–338.

16. *Сазонтов А.Г., Смирнов И.П., Чащин А.С.* Локализация когерентного источника излучения в мелководном канале с использованием частично калиброванной адаптивной антенной решетки // Известия Вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59. № 2. С. 99–107.
17. *Сазонтов А.Г., Смирнов И.П.* Локализация источника в акустическом волноводе с неточно известными параметрами с использованием согласованной обработки в модовом пространстве // Акуст. журн. 2019. Т. 65. Вып. 4. С. 540–550.
18. *Stoica P. and Nehorai A.* MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound // IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing. 1989. V. 37. № 5. P. 720–741.
19. *El Korso M.N., Boyer R., Renaux A., Marcos S.* Statistical resolution limit for multiple parameters of interest and for multiple signals // Proc. ICASSP, Dallas, TX, 2010. P. 3602–3605.
20. *Kay S.M.* Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1993. 596 p.
21. *Stoica P., Larsson E.G.* Comments on “Linearization method for finding Cramér–Rao bounds in signal processing” // IEEE Trans. Signal Processing. 2001. V. 49. № 12. P. 3168–3169.