

УДК 534.222.1

## АКУСТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ, ОБРАЗУЮЩЕГОСЯ НАД ПЛОСКОЙ ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2024 г. И. В. Беляев<sup>а</sup>, В. Ф. Копьев<sup>а,\*</sup>, М. А. Миронов<sup>а,\*\*</sup>

<sup>а</sup>ФАУ ЦАГИ, Научно-исследовательский московский комплекс ЦАГИ,  
ул. Радио 17, Москва, 105005 Россия

\*e-mail: vkopiev@mktsagi.ru

\*\*e-mail: mironov\_ma@mail.ru

Поступила в редакцию 29.08.2024 г.

После доработки 29.08.2024 г.

Принята к публикации 29.10.2024 г.

Изложена последовательная теория генерации звука в турбулентном пограничном слое, развивающемся над плоской гладкой границей при малых числах Маха. Основным источником звука и длинноволновой части пульсаций давления на обтекаемой границе являются приходящие сдвиговые (вязкие) волны, генерируемые лайтхилловскими квадрупольями в пристенной области турбулентного пограничного слоя. Показано, что при увеличении числа Рейнольдса (уменьшении вязкости) роль вязкости в генерации звука не уменьшается, а увеличивается. Даны количественные оценки спектра удельной звуковой мощности, генерируемой в турбулентном пограничном слое.

*Ключевые слова:* аэроакустика, турбулентный пограничный слой, вязкость

**DOI:** 10.31857/S0320791924060067, **EDN:** JTPWKV

### ВВЕДЕНИЕ

Описание генерации звука турбулентными течениями было впервые предложено в фундаментальных работах Лайтхилла [1, 2] применительно к безграничной среде и малым скоростям потока. При этом исходные уравнения динамики сплошной среды сведены к волновому уравнению, в правой части которого имеются слагаемые, квадратичные по пульсационным компонентам скорости движения среды. Согласно теории Лайтхилла, эти слагаемые и рассматриваются как источник звука (т.н. акустическая аналогия [3–5]). Как следствие, нестационарное, нелинейное, турбулентное движение среды с точки зрения акустики оказывается аналогичным волновому линейному процессу, возбуждаемому источниками звука специального вида.

В соответствии с теорией Лайтхилла турбулентность, как источник звука, аналогична распределенной системе квадрупольей, т.е. пар сил, равных по величине и противоположных по направлению. Точки приложения сил в каждой паре находятся друг от друга на расстоянии, много меньшем длины волны излучаемого звука. Акустические поля сил в каждом квадруполье почти полностью взаимно уничтожаются из-за противоположной

направленности сил, поэтому свободная турбулентность при малых скоростях потока является неэффективным источником звука. Работы Лайтхилла являются основой как теории шума турбулентности в отсутствие границ, так и расчетных методик и интерпретации экспериментов [3–5].

Далее естественно возникает вопрос о влиянии границы на генерацию аэродинамического шума турбулентными течениями. Границы обтекаемого тела играют двойную роль в процессе излучения звука турбулентностью. Во-первых, граница изменяет течение и, собственно говоря, порождает турбулентность. Во-вторых, наличие границы может изменить излучаемый звук уже имеющейся турбулентности. Обобщение теории Лайтхилла на случай течения вблизи границ впервые было выполнено в работе Кёрла [6], где показано, что граница акустически эквивалентна системе дипольей, т.е. сил, распределенных по ней и равных силам, фактически действующим со стороны границы на среду. Акустические поля этих сил, в отличие от сил, входящих в квадрупольи в свободном пространстве, не уничтожаются друг другом, поэтому турбулентность вблизи границы, вообще говоря, должна излучать звук более эффективно, чем свободная турбулентность.

Этот эффект можно рассматривать и с точки зрения теории рассеяния. Поля квадрупольей, присутствующих в турбулентном потоке, рассеиваются на границе тела, что эквивалентно добавлению внешней силы [7–10]. Для акустически компактных тел (характерный размер тела меньше длины волны) такой подход позволяет искать форму тела, обеспечивающего снижение амплитуды индуцированных квадрупольными источниками диполей и тем самым снижать шум обтекания этого тела потоком [7, 11].

Что будет, если размеры тела большие? На первый взгляд, кажется, что дипольные источники существуют независимо от того, большое тело или маленькое: турбулентность действует на тело, по третьему закону Ньютона тело действует на среду и излучается дипольный звук. Естественно, на самом деле не все так просто. Решающую роль играет пространственная корреляция сил.

В работе Крейчнана [12] рассмотрен предельный случай очень большого тела – жесткой плоскости, около которой имеется турбулентный поток – турбулентный пограничный слой (ТПС). Со стороны плоскости на среду действуют нормальные и касательные силы. В работе [12] показано, что плоскость выступает в роли зеркала, которое отражает звук, излучаемый объемной турбулентностью (это приводит к дополнительному квадрупольному излучению), но кроме того плоскость действительно создает излучающие дипольные силы, не сводящиеся к эффекту отражения. Эти силы направлены по касательной к границе и вызваны вязкими напряжениями. Если пренебречь вязкостью для течений с большими числами Рейнольдса, то плоская граница является зеркальным отражателем. Аналогичные расчеты в том же году были выполнены Филлипсом [13].

Более выпукло этот анализ дал Пауэлл [14]. Пауэлл очень определенно утверждал, что эти касательные силы, хотя, в принципе, и могут существовать (речь идет, конечно, о переменной компоненте касательных сил, а не о постоянной силе сопротивления), но должны быть очень малы для течений с большими числами Рейнольдса, так как по данным многочисленных измерений пульсационные касательные напряжения на порядок меньше по амплитуде, чем пульсационные нормальные напряжения (см. напр. [15]). Поэтому в работе [14] был сделан вывод, что на плоской границе турбулентность излучает только квадрупольно, а дипольного излучения нет. Впоследствии этот вывод стал называться теоремой Крейчнана-Филлипса, которую можно математически сформулировать следующим образом: “Для несжимаемого, однородного, турбулентного течения над плоской, жесткой границей частотно-волновой спектр пульсаций давления на поверхности  $p(k, \omega) \rightarrow 0$  для волнового числа  $k \rightarrow 0$  при условии, что частота  $\omega \neq 0$ ” [16].

Вопрос о том, следует ли принимать касательные напряжения во внимание при практических оценках, имеет принципиальное значение для течений со скоростями, малыми по сравнению со скоростью звука. Простые оценки с использованием анализа размерностей показывают [4], что излучаемая мощность в течениях с диполями в  $1/M^2$  раз больше, чем в течениях без диполей ( $M = U/c$  – отношение характерной скорости течения к скорости звука). Если  $M$  – малая величина, то наличие дипольных источников должно существенно увеличивать интенсивность излучаемого звука. В результате, как отмечено уже в [12], большая эффективность излучения касательных диполей может компенсировать малость амплитуды дипольных источников и обеспечить их значительный вклад в суммарное акустическое поле пристенной турбулентности.

В 1971 г. (а фактически года на полтора раньше) К.А. Наугольных и С.А. Рыбак [17] дали очень веский теоретический аргумент в пользу дипольного излучения для турбулентного течения над пластиной. Идея заключалась в том, чтобы более детально учесть вязкость среды вблизи плоской границы. Взаимодействие турбулентности с границей было сведено к отражению плоских сдвиговых (вязких, вихревых) волн от границы. При отражении возникла, помимо сдвиговой волны, продольная волна, которую можно интерпретировать как звук (обратный эффект Константинова; прямой эффект Константинова поглощения звука при распространении акустических волн вблизи твердых границ рассмотрен в [18–20]). Иллюстрация этого механизма [17] приведена на рис. 1.

Зависимость от скорости звука в среде получилась дипольной, а интенсивность звука – большой. Предложенный подход оказался очень неожиданным и, как показало время, нетривиальным. Сила и одновременно слабость предложенного подхода была в его оригинальности – он совершенно не был связан с предшествующей идеей Крейчнана и Пауэлла и при этом апеллировал к физическому эффекту (обратный эффект Константинова), а не к математическим теоремам. Настоящая работа развивает идею Наугольных–Рыбака в части



Рис. 1. Генерация звука при отражении сдвиговой волны от плоской границы (обратный эффект Константинова) [18].

происхождения вязких волн в турбулентном пограничном слое.

Фактически, результаты Крейчнана—Пауэлла и Наугольных—Рыбака не противоречат друг другу. Они оба правильны. Первый утверждает, что, формально, на плоской границе под ТПС могут существовать касательные диполи, излучающие звук. Далее можно задаваться параметрами касательных диполей, в частном случае, считать, что амплитуда диполей равна нулю. Второй подход указывает на конкретный путь возникновения звука — преобразование вязких волн в продольные на границе. Далее можно постулировать параметры этих вязких волн. Таким образом, основной вопрос заключается в количественной оценке роли вязкости (касательных диполей на поверхности границы) при излучении звука ТПС. Однако проведение этой оценки оказывается нетривиальной задачей.

Значимость дипольного излучения шума ТПС была показана в фундаментальной работе Ландаля [22]. Здесь касательные напряжения связываются с так называемыми всплесками (взрывами, bursts) в пристенной области ТПС и делается вывод, что дипольный звук возникает из-за поверхностных флуктуаций касательных напряжений, которые, в свою очередь, порождаются рейнольдсовыми напряжениями (т.е. лайтхилловскими квадрупольями) в процессе всплесков и транслируются к границе посредством вязкой диффузии. Под вязкой диффузией естественно понимать вязкие волны. Отличие этой концепции от теории [17] заключается в явном определении источника вязких волн, именно, процессов всплесков. На основе подхода Ландаля [22] в работе [23] была предложена расчетная формула для оценки интенсивности звука, излучаемого касательными напряжениями ТПС.

С другой стороны, Хау в статье [24] пришел к выводу, что учет вязкости приводит не к увеличению звука, излучаемого ТПС, а, наоборот, к его снижению. В [24] рассматривается задача отражения плоской поверхностью звуковых волн, создаваемых квадрупольными источниками в турбулентном потоке. Вязкость и вязкие волны при этом учитываются с помощью условия прилипания на границе, так что при падении плоской звуковой волны кроме отраженной звуковой волны порождается еще вязкая волна (рис. 2), т.е. имеет место прямой эффект Константинова [18–20]. Вязкая волна изменяет фазовое соотношение между скоростью и давлением в звуковой волне, что приводит к уменьшению амплитуды отраженной звуковой волне. Таким образом, в работе [24] был сделан вывод, что учет вязкости среды и касательных напряжений на границе приводит не к генерации звука, а к его частичному поглощению.

Расхождение выводов работ [17] и [24] может быть объяснено тем обстоятельством, что в [24] в качестве исходного пункта взято уравнение

Лайтхилла: волновое уравнение с правой частью — лайтхилловскими квадрупольями. Оно не содержит среди своих решений сдвиговых волн, падающих на границу. В результате в данной постановке на границу падают только акустические волны, которые приводят к появлению сдвиговых волн, уходящих от границы. Как следствие, учет вязкости среды при отражении звука от жесткой поверхности, естественно, приводит только к уменьшению общей излучаемой мощности. Таким образом, подход работы [24] оказывается, как минимум, непоследовательным при учете роли вязкости среды.

Тем не менее, подход Хау [24] получил широкое распространение в литературе [25]. В работе [26] этот подход был обобщен на случай, когда толщина пограничного слоя не мала по сравнению с длиной звуковой волны и был сделан вывод о том, что вязкость (касательные диполи) вносит хотя и ненулевой, но незначительный вклад в шум ТПС по сравнению с квадрупольными источниками.

В работе Смольякова [27] проанализирована роль вязкости и вязких волн с использованием исходной системы уравнений вязкой сжимаемой среды. Здесь обращено внимание (по-видимому, впервые в журнальной литературе) на то, что турбулентность может генерировать не только потенциальное поле (звук и длинноволновые пульсации давления), но и вихревое поле (вязкие волны). Определено влияние вязкости на частотно-волновой спектр длинноволновых нормальных напряжений на поверхности пластины и найдено соотношение между спектрами касательных и нормальных напряжений при малых волновых числах. В целом автор был согласен с аргументом Крайчнана—Пауэлла о малости вязких эффектов при больших числах Рейнольдса [28]. Как будет показано в настоящей работе, и это является одним из основных ее результатов, при стремлении вязкости к нулю влияние вязкости на касательные напряжения и излучаемый ими звук не стремится к нулю.

Последовательный анализ проблемы вязкости дан в работах Чейза [29, 30]. В них подробно, но формально математически, рассматривается

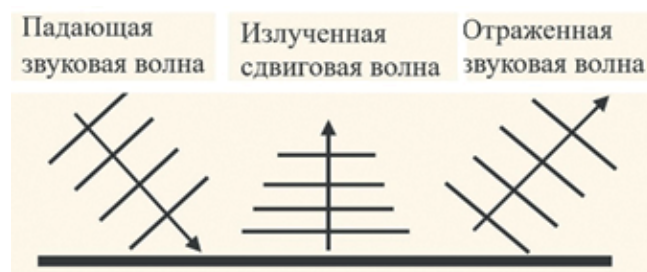


Рис. 2. Генерация сдвиговой волны при отражении от плоскости звуковой волны (прямой эффект Константинова) [18].

влияние вязкости и условия прилипания на обтекаемой границе на длинноволновую часть спектров давления и касательных напряжений. При этом в явном виде вязкие волны не формулируются. Устанавливается связь между произведениями флуктуирующей скорости, рассматриваемых в качестве источников (фактически, лайтхилловских квадруполь), и частотно-волновыми спектрами флуктуирующего давления и напряжения сдвига на границе (стенке). На этой основе исследуется результирующая спектральная плотность обычного “невихревого” вклада в давление на стенку и вклада вихревого поля как в давление на стенку, так и в напряжение сдвига, которое возникает в результате применения условия прилипания на стенке. Осторожно утверждается, что, вопреки некоторым предыдущим оценкам (в том числе и самого автора), вклад вихревого поля может доминировать в турбулентном давлении на стенке при малых волновых числах. В этих работах даже говорится о некорректности теоремы Крайчана–Филлипса об отсутствии касательных источников. Аналогичный вывод делается в обзорных работах [12, 31, 32].

В работе [33] рассмотрено преобразование вихревых волн в звуковые на границе жидкости и упругого полупространства. Оказалось, что замена недеформируемой границы на деформируемую может существенно изменить (уменьшить) амплитуду излучаемого звука. Этот эффект был рассмотрен также в работе [34].

С появлением возможностей численного анализа турбулентных течений проблема поверхностных источников под ТПС рассматривалась в ряде работ. Статья [35] посвящена физическим и численным оправданиям реального существования касательных источников под ТПС. В работе [36] обсуждалась текущая ситуация с ролью касательных диполей и возможностью численных подходов к решению этой проблемы. Отмечается, что обоснованность использования диполей вязких напряжений в качестве источника звука остается спорной. При этом если касательные источники действительно существуют, то они должны давать доминирующий вклад в излучаемый ТПС звук.

Для практических количественных оценок звука и вибрации оболочек, порождаемых ТПС, используют эмпирические модели частотно-волновых спектров пульсаций давления на обтекаемой поверхности. Они, в основном, приведены в [37–39]. Авторы всех моделей отмечают неопределенность моделируемого спектра давлений именно в области малых волновых чисел, ответственных за излучение звука и вибрации. Однако, за последние 10–15 лет появилось много работ по экспериментальному и численному исследованию касательных напряжений в пограничном слое и в течениях в канале [40–44]. В этих работах не рассматривается излучение звука касательными напряжениями, и

недостаточно данных для прямых вычислений излучаемого звука.

Основная идея настоящей работы состоит в доказательстве физического существования касательных диполей как источников звука в ТПС. Разрабатываемая теория представляет собой обобщение теории Лайтхилла, в котором учитывается также генерация вязких волн. В неограниченной среде эти вязкие волны не играют никакой роли в генерации звука, т.к. они экспоненциально быстро затухают при удалении от места генерации, однако если в пределах достижимости вязких волн есть жесткая граница, возникает новый источник звука. Разработанная теория позволяет учесть этот источник звука и получить количественные оценки спектра удельной звуковой мощности, генерируемой ТПС.

### ГЕНЕРАЦИЯ ВОЛН КВАДРУПОЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Для выяснения принципиальной роли касательных сил на поверхности тела в генерации звука средним потоком можно пренебречь. Разумеется, при практическом приложении к высокоскоростной аэродинамике скоростью и средним сдвигом пренебрегать нельзя, однако ценность низкоскоростного приближения и низкоскоростных измерений заключается в том, что здесь касательные источники существуют (или не существуют) в чистом виде.

На рис. 3 изображена система объемных квадруполь и поверхностных диполей.

Геометрия постановки задачи и обозначения показаны на рис. 4. Ось  $x$  направлена по потоку, ось  $y$  – по нормали к обтекаемой плоскости, ось  $z$  – поперек потока.  $p(x, y, z)$  – поле давления,  $u_x, u_y, u_z$  – проекции поля скорости  $\mathbf{u}$  на оси координат. Иногда ниже вместо обозначения координат  $(x, y, z)$  используются обозначения  $(x_1, x_2, x_3)$ , а проекции скоростей обозначаются  $(u_1, u_2, u_3)$ .

Исходная система уравнений – это система уравнений вязкой сжимаемой среды, в которой

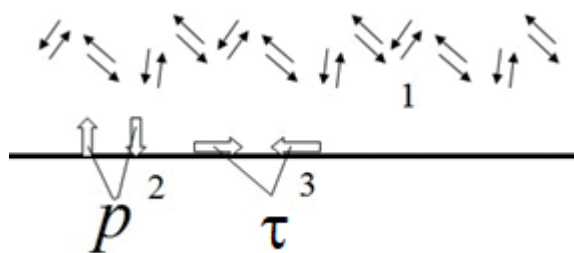


Рис. 3. Источники поля скорости в ТПС: 1 – лайтхилловские квадруполь, 2 – нормальные поверхностные диполи, 3 – касательные поверхностные диполи.

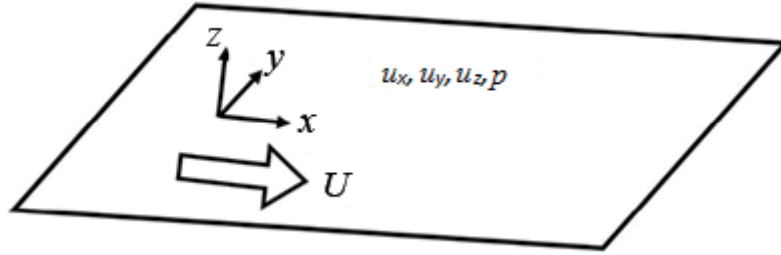


Рис. 4. Система координат, поле давления и проекции поля скорости.

нелинейное слагаемое – конвективное ускорение – перенесено в правую часть:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) &= \quad (1) \\ &= -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle), \end{aligned}$$

$p$  – флуктуации давления;  $u$  – флуктуации скорости;  $\rho_0$  – средняя плотность среды;  $c$  – скорость звука;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости,

$$F_i = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle) = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ij} \quad (2)$$

– поле лайтхилловских пульсационных напряжений, вызванное конвективным ускорением.

Система (1) – это система линейных неоднородных уравнений, описывающих как потенциальные, так и вихревые поля, порождаемые сторонними силами  $F$ . Если применить к первому уравнению дифференцирование по времени, а ко второму – оператор дивергенции, и вычесть второе из первого, то получим уравнение Лайтхилла для поля давления:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \nabla F \left( = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij} \right). \quad (3)$$

При переходе от исходных уравнений (1) к уравнению Лайтхилла (3) теряются вихревые волны, генерируемые лайтхилловскими источниками  $F$ . Они были в (1), но их нельзя получить из (3) ни добавлением в тензор напряжений  $T_{ij}$  вязких напряжений, ни с помощью учета вязких волн, порождаемых при отражении звука от границы [16]. Однако, как обсуждалось выше во Введении, без учета вихревых волн нельзя получить и касательные диполи на обтекаемой границе, излучающие звук.

Система уравнений (1) в качестве решений содержит как потенциальные, так и вихревые волны. Полное поле скорости  $\mathbf{u}$  является суммой потенциального  $\mathbf{u}_p$  и вихревого полей  $\mathbf{u}_r$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_r,$$

$$\text{rot } \mathbf{u}_p = 0; \text{div } \mathbf{u}_r = 0.$$

Применяя к уравнению импульса системы (1) операцию  $\text{rot}$ , получаем уравнение для вихревого поля

$$\frac{\partial \text{rot } \mathbf{u}_r}{\partial t} - \nu \text{rot } \mathbf{u}_r = \text{rot} [\mathbf{u} \text{rot } \mathbf{u}], \quad (4)$$

где  $\nu = \mu / \rho_0$  – коэффициент кинематической вязкости.

Это уравнение можно назвать уравнением Лайтхилла для вихревого поля. Правая часть этого уравнения является источником вихревого поля. Простейшее решение однородного уравнения (4) – плоская поперечная гармоническая волна с частотой  $\omega$  и волновым числом  $k_x = \sqrt{i\omega} / \nu$ , распространяющаяся вдоль оси  $z$  от плоскости  $z = z_0$  с поляризацией вдоль оси  $x$ :

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u}_{x\tau}(z_0) \exp[+ik_x(z - z_0) - i\omega t].$$

Система (1), или пара уравнений для потенциального (3) и вихревого (4) полей, дополняется граничным условием на обтекаемой границе – условием прилипания

$$(u_x, u_y, u_z)_{y=0} = 0. \quad (5)$$

Касательные напряжения на границе определяются через нормальные производные касательных проекций скорости:

$$\tau_x = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z}, \tau_y = \mu \frac{\partial u_y}{\partial z}. \quad (6)$$

Важный результат относительно роли вязкости в излучении звука поверхностными источниками получается еще до вычисления поля давления и скорости. Непосредственно из условия (5) и уравнения импульсов на границе получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x_3^2}. \quad (7)$$

Закон сохранения массы (в приближении несжимаемой среды) после выражения производной

вертикальной скорости  $u_3$  через горизонтальные производные горизонтальных проекций скорости примет вид:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7) и учитывая (6), получаем простую связь между нормальными и касательными напряжениями:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2}. \quad (9)$$

Как отметил еще Крейчан [12], это соотношение ясно демонстрирует роль вязкости в структуре напряжений на обтекаемой границе. Если пренебрегать касательными напряжениями, полагая  $\tau_1 = \tau_2 = 0$ , то вертикальный градиент давления на границе равен нулю. Для невязкой среды это соответствует очевидному условию равенства нулю нормальной скорости.

Соотношение (9) позволяет получить фундаментальную связь волновых спектров нормальных и касательных напряжений на границе. Представляя поле в пристенной области ТПС – вязком подслое [45] – в виде набора свободных плоских волн, и переходя к частотно-волновым спектрам напряжений, получаем из (9) соотношение для спектров:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\omega, k_x, k_y) &= \frac{k_x}{q_z} \tilde{\tau}_x(\omega, k_x, k_y) + \\ &+ \frac{k_y}{q_z} \tilde{\tau}_y(\omega, k_x, k_y). \end{aligned} \quad (10)$$

$k_x, k_y$  – волновые числа в плоскости  $z=0$ ,  $q_z = \sqrt{(\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2}$  – вертикальное волновое число потенциальной волны. Знак тильды обозначает Фурье-образ соответствующей величины. Из формулы (10) непосредственно следует, что при  $k_x, k_z = 0$ , спектр давления точно равен нулю, независимо от равенства или неравенства нулю спектра касательных напряжений:

$$\tilde{p}(\omega, 0, 0) = 0. \quad (11)$$

Далее будут выписаны выражения для спектров давления и касательных напряжений через спектры компонент тензора рейнольдсовых (лайтхилловских) напряжений. Для компонент спектра тензора напряжений введем обозначения:

$$\begin{aligned} \rho u_1 u_1 &= g_1; \rho u_2 u_2 = g_2; \rho u_3 u_3 = g_3; \\ \rho u_1 u_2 &= g_4; \rho u_1 u_3 = g_5; \rho u_2 u_3 = g_6. \end{aligned} \quad (12)$$

Свертки этих компонент с экспонентами, соответствующими потенциальным и вихревым волнам, обозначаются через  $g_{i\alpha}, g_{i\beta}$ :

$$g_{i\alpha} = \int_{-\infty}^0 g_i(z) \exp(-\alpha z) dz, \quad (13)$$

$$g_{i\beta} = \int_0^{\infty} g_i(z) \exp(-\beta z) dz. \quad (14)$$

Здесь обозначено:

$$\alpha = \sqrt{k^2 - i\omega/\nu}, \quad (15)$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 / \left(1 - \frac{2i\omega\nu}{c^2}\right)}, \quad (16)$$

где  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

Технически громоздкая, но принципиально понятная процедура решения дает следующий ответ для частотно-волновых спектров нормальных и касательных напряжений на стенке (знаки преобразования Фурье  $\approx$  над спектрами  $p, \tau_x, \tau_y, g_{i\alpha}, g_{i\beta}$  и источников опущены):

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho_0} &= \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta - k^2} (ik_x g_{5\beta} + ik_z g_{6\beta} + \beta g_{3\beta}) + \\ &+ i \frac{\alpha k_x}{\alpha\beta - k^2} (ik_x g_{1\beta} + ik_z g_{4\beta} + \beta g_{5\beta}) + \\ &+ i \frac{\alpha k_z}{\alpha\beta - k^2} (ik_x g_{4\beta} + ik_z g_{2\beta} + \beta g_{6\beta}) + \\ &+ i \frac{k^2}{\alpha\beta - k^2} (ik_x g_{5\alpha} + ik_z g_{6\alpha} + \alpha g_{3\alpha}) - \\ &- i \frac{\alpha k_x}{\alpha\beta - k^2} (ik_x g_{1\alpha} + ik_z g_{4\alpha} + \alpha g_{5\alpha}) - \\ &- i \frac{\alpha k_z}{\alpha\beta - k^2} (ik_x g_{4\alpha} + ik_z g_{2\alpha} + \alpha g_{6\alpha}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_x}{\rho_0} &= \frac{\alpha^2 \beta k_x}{\alpha\beta - k^2} \frac{\nu}{\omega} (ik_x g_{5\beta} + ik_z g_{6\beta} + \beta g_{3\beta}) + \\ &+ \frac{\alpha^2 k_x}{\alpha\beta - k^2} \frac{\nu}{\omega} (ik_x g_{1\beta} + ik_z g_{4\beta} + \beta g_{5\beta}) + \\ &+ \frac{\alpha^2 k_x k_z}{\alpha\beta - k^2} \frac{\nu}{\omega} (ik_x g_{4\beta} + ik_z g_{2\beta} + \beta g_{6\beta}) - \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &- \left( \alpha \frac{\nu}{\omega} k_x - i \frac{k^2 \alpha k_z}{\alpha\beta - k^2} \frac{\nu}{\omega} \right) (ik_x g_{5\alpha} + ik_z g_{6\alpha} + \alpha g_{3\alpha}) - \\ &- \left( 1 + ik_x^2 \frac{\nu}{\omega} + i \frac{\alpha^2 k_x^2}{\alpha\beta - k^2} \frac{\nu}{\omega} \right) (ik_x g_{4\alpha} + ik_z g_{6\alpha} + \alpha g_{5\alpha}) - \\ &- \left( ik_x k_z \frac{\nu}{\omega} + i \frac{\alpha^2 k_x k_z}{\alpha\beta - k^2} \frac{\nu}{\omega} \right) (ik_x g_{4\alpha} + ik_z g_{2\alpha} + \alpha g_{6\alpha}). \end{aligned}$$

Формула для  $\tau_y$  получается из формулы (18) заменой  $k_x \leftrightarrow k_y$  и  $u_1 \leftrightarrow u_2$  в (12).

Несмотря на громоздкость этих расчетных формул, они имеют простую физическую интерпретацию. В правых частях (17), (18) все слагаемые можно разделить на две группы: слагаемые, содержащие  $g_{i\beta}$ , и слагаемые, содержащие  $g_{i\alpha}$ . Первая группа определяет вклад потенциальных волн в нормальные и касательные напряжения на границе. Вторая группа определяет вклад вихревых волн в нормальные и касательные напряжения на границе. В работах [6, 12, 13] нормальные и касательные напряжения вводились формально, не связывая их с объемными пульсациями. В работе [14] не учитывались вихревые волны, приходящие к границе. Существенность вихревых волн, приходящих к границе, впервые показана в [17], при этом последовательного вывода амплитуд этих волн в этой работе не дано.

Формулы (17), (18) являются математически точной связью спектра поверхностных и объемных (лайтхилловских) напряжений и позволяют анализировать роль вязкости и вязких волн в генерации длинноволновой части поля давления. Под длинными волнами понимается часть частотно-волнового спектра с волновыми числами, характерными для звука и вибрационных волн, распространяющихся по границе.

### ОЦЕНКИ ВКЛАДА РАЗЛИЧНЫХ КОМПОНЕНТ

Формулы (17), (18) выражают частотно-волновые спектры нормальных и касательных напряжений на границе через частотно-волновые спектры рейнольдсовых напряжений, распределенных по всему ТПС. Спектры напряжений являются суммой слагаемых, каждое из которых соответствует собственным волнам – продольным и вихревым, приходящим к границе и отраженным от границы. При отражении от границы происходит частичное преобразование продольных волн в сдвиговые, и сдвиговых волн в продольные. Именно преобразование сдвиговых волн в продольные порождает звуковое дипольное излучение. Этот механизм предложен К.А. Наугольных и С.А. Рыбаком в [17].

Сначала проанализируем слагаемые в спектре давления (17), порождаемые потенциальными волнами. Это слагаемые, содержащие индексы  $\beta$ . Отметим, что слагаемые с индексом  $\alpha$  равны нулю, если формально положить вязкость равной нулю. Действительно, при  $\nu = 0$  действительная часть  $\alpha$

$$\text{Re}(\alpha) = \text{Re}\left(\sqrt{k^2 - \frac{i\omega}{\nu}}\right) = +\infty,$$

соответственно все  $g_{i\alpha}$  обращаются в нуль. Выражение (17) тогда примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{p_\beta}{\rho_0} &= (ik_x g_{5\beta} + ik_z g_{6\beta} + \beta g_{3\beta}) + \\ &+ i \frac{k_x}{\beta} (ik_x g_{1\beta} + ik_z g_{4\beta} + \beta g_{5\beta}) + \\ &+ i \frac{k_z}{\beta} (ik_x g_{4\beta} + ik_z g_{2\beta} + \beta g_{6\beta}). \end{aligned} \quad (19)$$

Чтобы получить оценку длинноволновой части этого спектра, учтем, что толщина пограничного слоя  $\delta$  мала по сравнению с длинами звуковых волн:  $|\beta\delta| \ll 1$ . Тогда выражение (14) можно записать, считая, что экспоненциальный множитель равен 1, в виде

$$g_{i\beta} = \int_{-\infty}^0 g_i(y) \exp(-\beta y) dy = h g_0, \quad (20)$$

где  $h$  – характерный вертикальный масштаб, а  $g_0$  – характерная амплитуда спектра турбулентных напряжений (оба параметра зависят от частоты). Подставив (20) в (19), получим:

$$\frac{p_\beta}{\rho_0} = (ik_x + ik_y + \beta) \left(1 + i \frac{ik_x + k_y}{\beta}\right) h g_0. \quad (21)$$

Для определенности положим  $k_z = 0$ :

$$\frac{p_\beta}{\rho_0} = \left\{ \sqrt{k_x^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} + ik_x \left[ 2 + \frac{ik_x}{\sqrt{k_x^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}} \right] \right\} h g_0. \quad (22)$$

При  $k_x = 0$  получим  $\frac{p_\beta}{\rho_0} = \frac{i\omega h}{c} g_0$ . При  $k_x \gg \frac{\omega}{c}$   $\frac{p_\beta}{\rho_0} = 2ik_x h g_0$ .

При  $k_x = \omega / c$ , т.е. при скользющем угле, функция (22) имеет сингулярность, которая объясняется тем, что звук собирается с бесконечной площади генерирующей звук турбулентности. Бесконечность устраняется при учете конечности обтекаемой поверхности, или при учете влияния поглощения в среде (добавления мнимой компоненты к скорости звука).

Если положить скорость звука бесконечной (несжимаемая среда), то спектр давления (22) равен нулю при  $k_x = 0$ , а вблизи нуля он пропорционален  $k_x$ . Таким образом, формула (17) полностью воспроизводит результаты [2, 6, 12], полученные при пренебрежении вязкостью.

Учет вязкости выражается, с одной стороны, изменением слагаемых, пропорциональных  $g_{i\beta}$ , с другой стороны добавлением слагаемых,

пропорциональных  $g_{i\pm}$ . Первое изменение соответствует изменению вклада потенциальных волн в спектр давления. Второе изменение соответствует вкладу вихревых волн. Что касается первого, то вязкость подавляет бесконечность при  $k_x = \omega/c$ . Действительно, поведение спектра вблизи волнового числа звука описывается множителем  $\frac{\alpha}{\alpha\beta - k^2}$ , общим для всех слагаемых, содержащих  $g_{i\beta}$ . В отсутствие вязкости именно этот множитель дает бесконечность в спектре давления. Подставляя из уравнений (15) и (16) величины  $\alpha$ ,  $\delta$  в этот множитель, получим:

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta - k^2} = \left[ \sqrt{k^2 - \frac{(\omega/c)^2}{1 - 2(i\omega v/c^2)}} - \frac{k}{\sqrt{1 - (i\omega/vk^2)}} \right]^{-1}. \quad (23)$$

При  $v \neq 0$  это выражение конечно при всех вещественных  $k$ . Физически это объясняется поглощением звука, генерируемого турбулентными объемными напряжениями, распространяющимся вдоль границы. Два слагаемых в правой части (23), содержащих  $v$ , описывают два принципиально разных механизма поглощения. Комбинация  $2i\omega v/c^2$  описывает объемное поглощение, которое существует и в отсутствие границы. Комбинация  $i\omega/(vk^2)$  описывает поглощение, вызванное частичным переходом потенциальных волн в вихревые при отражении их от границы. Именно второй эффект учтен в работе Хау [16]. Итак, учет вязкости не увеличивает вклад потенциальных волн в длинноволновую часть спектра давления на обтекаемой границе.

Далее рассматривается вклад вихревых волн. Он описывается слагаемыми в (17), содержащими  $g_{5\alpha}$ . Учитывая, что  $|\alpha| \gg k$ , можно выделить наибольшие слагаемые:

$$\frac{p_\alpha}{\rho_0} = -i \frac{\alpha^2 k_x}{\alpha\beta - k^2} g_{5\alpha} - i \frac{\alpha^2 k_y}{\alpha\beta - k^2} g_{6\alpha}. \quad (24)$$

Для численной оценки необходимо учесть, что под интегралами в (13) для  $g_{i\alpha}$  стоит быстро затухающая экспонента. Вследствие этого вклад в этот интеграл дает только ближайшая к границе область, занятая турбулентностью. Это переходная область, отстоящая от границы на расстояние порядка толщины вязкого подслоя  $\delta_*$ . Внутри вязкого подслоя источники волн отсутствуют:  $g(y)_{i\alpha}|_{z < \delta_*} = 0$ . Допустим, что вне вязкого подслоя спектр источников постоянен:  $g(y)_{i\alpha}|_{z > \delta_*} = g_{i0}$ .

Выражение для  $g_{i\alpha}$  записывается в виде:

$$g_{i\alpha} = \frac{1}{\alpha} g_{i0} \exp(-\alpha\delta_*). \quad (25)$$

Соответственно спектр давления равен

$$\frac{p_\alpha}{\rho_0} = -i \frac{\alpha k_x}{\alpha\beta - k^2} g_{50} - i \frac{\alpha k_y}{\alpha\beta - k^2} g_{60}. \quad (26)$$

Рассмотрим для примера случай  $k_y = 0$ :

$$\frac{p_\alpha}{\rho_0} = - \frac{ik_x}{\sqrt{k^2 - (\omega/c)^2 - k^2/\alpha}} g_{50} \exp(-\alpha\delta_*). \quad (27)$$

При  $k_x = 0$  спектр давления (27) равен нулю, независимо от величины скорости звука. Площадь корреляции поля давления, создаваемого вихревыми волнами и пропорциональная квадрату  $p_\alpha$ , равна нулю. Максимум спектра, расположенный при  $k = \omega/c$ , образуется при перерассеянии вихревых волн в потенциальные [17]. Наличие экспоненциального множителя  $\exp(-\alpha\delta_*)$  показывает зависимость спектра давления от соотношения между толщиной вязкого подслоя и глубиной проникновения вихревой волны, равной  $\frac{1}{\text{Re}\alpha} = \sqrt{2\nu/\omega}$ . При  $\delta_* < \sqrt{2\nu/\omega}$  экспонента равна примерно 1, вихревая волна не меняет своей амплитуды и  $\left| \frac{p_\alpha}{\rho_0} \right| \approx |g_{50}|$ .

При  $\delta_* > \sqrt{2\nu/\omega}$  амплитуда вихревой волны экспоненциально затухает при распространении по вязкому подслою, соответственно, амплитуда спектра давления экспоненциально спадает при увеличении частоты  $\left| \frac{p_\alpha}{\rho_0} \right| \approx \left| g_{50} \exp\left(-\delta_* \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) \right|$ .

Спектр касательных напряжений также представляется в виде суммы вкладов потенциальных и вихревых волн (для сокращения формул далее выписываются только  $x$ -компоненты касательных напряжений):

$$\tau_x = \tau_{x\beta} + \tau_{x\alpha}. \quad (28)$$

Вклад от потенциальных волн обозначается индексом  $\beta$ . Это три первых слагаемых в (18). Вклад от вихревых волн обозначается индексом  $\alpha$ . Это три последних слагаемых в (18). Сопоставление вклада потенциальных волн в спектр касательных напряжений с вкладом потенциальных волн в спектр давления показывает:

$$\left| \tau_{x\beta}/p_\beta \right| \approx |k/\alpha| \ll 1.$$

Касательные напряжения, создаваемые потенциальными волнами, малы по сравнению с давлениями, создаваемым потенциальными волнами.

Вклад вихревых волн в спектр касательных напряжений определяется слагаемым  $g_{5\alpha}$ . С учетом (25) получаем

$$\tau_{x\alpha} = -\exp(-\delta_* \cdot \alpha) g_{50}. \quad (29)$$

Если выполняется условие  $\text{Re}(\delta_* \alpha) < 1$ , то спектр касательных напряжений равен  $g_{50}$ :

$$\left| \tau_{x\alpha} \right| = |g_{50}|. \quad (30)$$

В работе Ландала [22] получена именно такая связь между касательными напряжениями и



пристенными “взрывными” структурами в ТПС. Если выполняется противоположное условие:  $Re(\delta_*\alpha) > 1$ , затухание вихревой волны приводит к экспоненциальному спадаению спектра касательных напряжений. Экспоненциальное затухание вихревых волн в [22] не учтено.

Основной вывод из анализа слагаемых в формулах (17), (18) для спектров давления и касательных напряжений на обтекаемой границе формулируется следующим образом. Длинноволновая часть этих спектров генерируется одними и теми же источниками – турбулентностью пристенной области ТПС. Поэтому они жестко связаны между собой. Эта связь дается следующей простой формулой (ср. (27) и (29)):

$$p(\omega, k_x) = \frac{ik_x}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} - k^2 / \alpha} \tau_x(\omega, k_x). \quad (31)$$

Эта формула позволяет, в частности, использовать результаты измерений, или численного счета касательных напряжений на обтекаемой границы, для расчетов шума и вибраций, генерируемых ТПС.

Формула (31) разъясняет существующее разногласие относительно поведения спектра давления при малых волновых числах в районе  $k \sim \omega/c$ . Из нее следует, что, независимо от учета или неучета вязкости, при  $k = 0$  спектр давления равен нулю. При  $k \gg \omega/c$  спектр давления практически совпадает со спектром касательных напряжений. В ряде работ измеренные значения спектра давления при  $k \gg \omega/c$  экстраполируются на область  $k < \omega/c$ . Отсюда возникает ошибка при определении диаграммы направленности излучаемого звука. Выражение (31) соответствует дипольному излучению с максимумом, направленным вдоль обтекаемой плоскости. Излучение в направлении перпендикулярно плоскости отсутствует. Экстраполяция значений спектра при  $k \gg \omega/c$  на область  $k < \omega/c$ , в частности, на  $k = 0$ , приводит к эффективному излучению звука по нормали [38].

### ОЦЕНКИ ИЗЛУЧЕНИЯ ШУМА ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Для получения численных оценок шума ТПС на основе выражения (29) необходимы данные о пульсационных касательных напряжениях  $\tau_x$ . Из полученных выше выражений для касательных напряжений, создаваемых вязкими волнами, видно, что зависимость энергетического спектра  $|\tau_x|^2$  от частоты  $\omega$  имеет вид

$$|\tau_x|^2 \sim \exp\left[-2\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\delta_*\right]. \quad (32)$$

Такая частотная зависимость очень близка к результатам численного эксперимента работы [40].

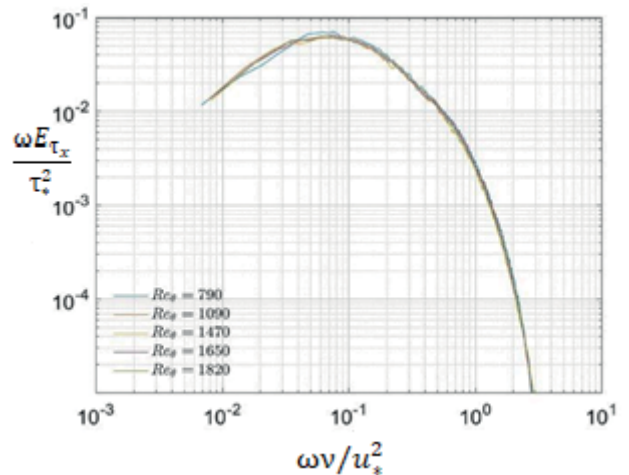


Рис. 5. Энергетический спектр касательных напряжений на основе численного моделирования [40].

В [40] получены энергетические спектры касательных напряжений для турбулентного пограничного слоя над плоской границей при числах Рейнольдса  $Re_\theta = 790, 1090, 1470, 1650, 1820$ . Результаты показаны на рис. 5.

По оси ординат на рис. 5 отложен нормированный на квадрат среднего касательного напряжения  $\tau_*^2$  и умноженный на частоту  $\omega$  энергетический спектр пульсаций касательного напряжений  $|\tau(\omega)|^2$ , а по оси абсцисс – нормированная частота  $\omega\nu/u_*^2$ . При такой нормировке спектры для пяти чисел Рейнольдса практически совпадают. Их можно представить в виде функции:

$$\frac{\omega|\tau(\omega)|^2}{\tau_*^2} = F(\Omega), \Omega = \omega\nu/u_*^2. \quad (33)$$

Используя теоретическую зависимость (32), мы получаем, что зависимость  $F(\Omega)$  должна иметь вид

$$F(\Omega) \sim A(\Omega)\Omega \exp[-C\sqrt{\Omega}], C = \text{const}. \quad (34)$$

$A(\Omega)$  – слабо зависящая от частоты функция. Подбор дает следующую частотную зависимость (34):

$$F(\Omega) = 10 \frac{\Omega}{0.016 + \Omega} \Omega e^{-8.2\sqrt{\Omega}}. \quad (35)$$

Сравнение результатов численного моделирования и теоретической функции (35) приведено на рис. 6. Видно, что соответствие между формами спектров действительно очень хорошее.

Рассмотрим выражение (35) более подробно. Запишем показатель экспоненты в виде произведения:

$$8.2\sqrt{\Omega} = 2 \times 4.1\sqrt{2} \frac{\nu}{u_*} \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}.$$

Первый множитель  $\nu/u_*$  – это внутренний (вязкий) масштаб ТПС. Второй множитель  $\sqrt{\omega/2\nu}$  –

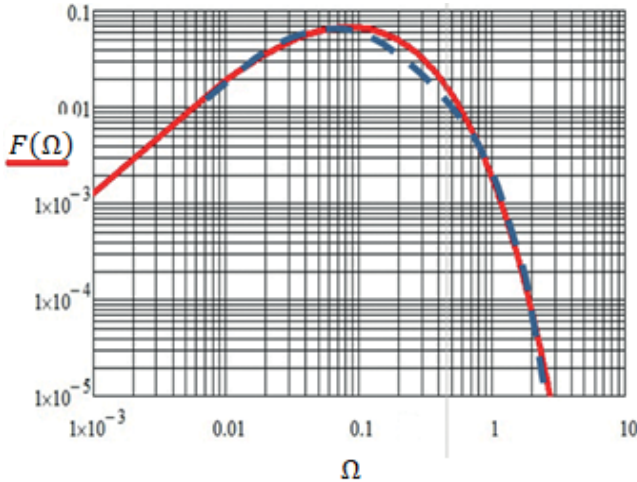


Рис. 6. Сравнение результатов теоретической модели и численного счета [40]: пунктир – численный эксперимент, красная кривая – теория.

это вещественная часть волнового числа вязкой волны. Примем, что толщина вязкого подслоя (область, где отсутствует турбулентность), равна  $\delta_* = 5 \frac{\nu}{u_*}$ . Последняя формула запишется в виде:

$$8.2\sqrt{\Omega} = 2 \times 1.16\delta_* \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}. \quad (36)$$

Видно, что расстояние от области турбулентности до границы действительно равно примерно толщине вязкого подслоя  $\delta_*$ .

Выражение (33) с учетом (35) можно переписать в виде

$$\frac{|\tau(\omega)|^2}{\rho^2 u_*^2 \nu} = 10 \frac{\omega \nu / u_*^2}{0.016 + \omega \nu / u_*^2} e^{-8.2\sqrt{\omega \nu / u_*^2}}. \quad (37)$$

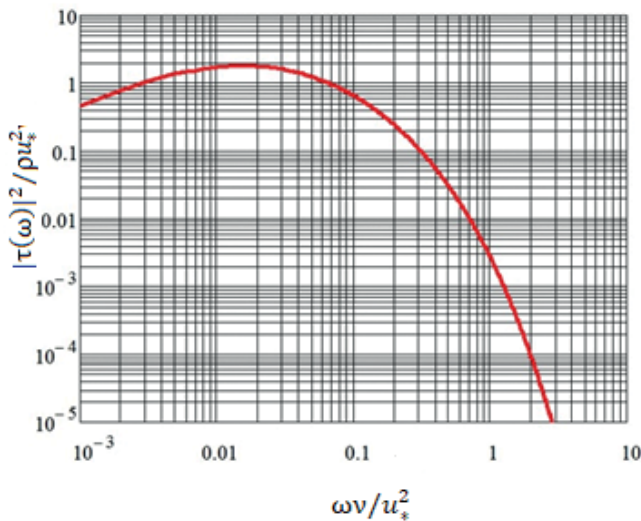


Рис. 7. Теоретический спектр касательных напряжений с нормировкой на внутренние масштабы.

Следует еще раз подчеркнуть, что эта зависимость точно описывает результат численного эксперимента [40]. График зависимости (37) показан на рис. 7.

Излучение звука касательными диполями зависит не только от касательных напряжений, но и от площади корреляции касательных напряжений  $\sigma(\omega)$ . Мощность, излучаемая с единицы площади, равна

$$J(\omega) = \frac{1}{12\pi c} k^2 \tau(\omega)^2 \sigma(\omega), \quad (38)$$

$k = \omega/c$ ,  $c$  – скорость звука.

К сожалению, в [40] не приводятся конкретных данных по площади корреляции. В работе [15] приведены экспериментальные данные по взаимной продольной корреляции касательных напряжений. Нормированные на внутренний масштаб пограничного слоя  $\frac{\nu}{u_*}$  зависимости характерного масштаба от числа Рейнольдса  $Re = \frac{\delta u_*}{\nu}$  ( $\delta$  – толщина пограничного слоя) и частоты  $\Omega = \frac{\omega \nu}{u_*^2}$  удовлетворительным образом описываются следующей формулой:

$$\Lambda(\Omega, Re) = \frac{20}{1200 Re^{-1.4} + \Omega^{1.3}}. \quad (39)$$

При увеличении числа Рейнольдса продольный масштаб увеличивается, при увеличении частоты – уменьшается. Поперечный масштаб корреляции, согласно [15], примерно в 10 раз меньше. С учетом (39), площадь корреляции касательных напряжений записывается следующим образом

$$\sigma(\omega) = \Lambda(\Omega, Re)^2 \left(\frac{\nu}{u_*}\right)^2 10^{-1}. \quad (40)$$

На рис. 8 в качестве примера построен размерный спектр излучаемой мощности, соответствующий выражению (40). Параметры, входящие в расчетные формулы, имеют значения:

$$\rho = 1.2 \text{ кг/м}^3, \quad \nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}, \\ c = 340 \text{ м/с}, \quad \delta = 0.03 \text{ м}.$$

Зависимости построены для двух скоростей:  $u_* = 3.3 \text{ м/с}$  и  $u_* = 10 \text{ м/с}$ . По оси абсцисс отложена частота  $f$ , Гц, по оси ординат спектр уровня звуковой мощности, излучаемой с квадратного метра плоскости в дБ относительно базового уровня  $10^{-12} \text{ Вт}$ .

Интегрируя по частоте спектра мощности, получаем суммарную излучаемую мощность как функцию скорости  $u_*$ . На рис. 8 эта зависимость показана для толщины пограничного слоя  $\delta = 0.03 \text{ м}$ .

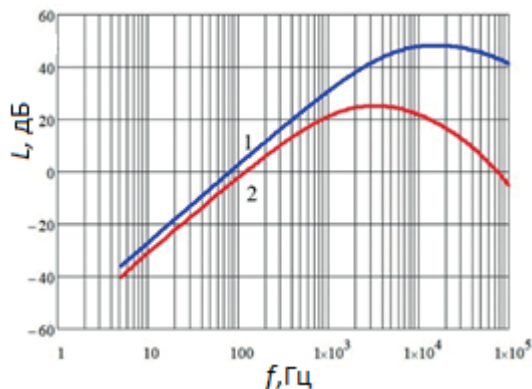


Рис. 8. Примеры спектра уровня излучаемой мощности: 1 –  $u_* = 3.3$  м/с, 2 –  $u_* = 10$  м/с.

Рассмотрим подробнее зависимость излучаемого звука от коэффициента кинематической вязкости. Связь между скоростью течения вдали от границы  $U_0$  и касательным напряжением  $\tau_x$  задается следующим выражением:

$$\tau_x = C_F \frac{1}{2} \rho U_0^2, \tag{41}$$

где коэффициент трения  $C_F$  для турбулентного пограничного слоя без продольного градиента давления известен и равен (см. напр. [45]):

$$C_F = \frac{0.027}{\text{Re}_x^{1/7}}, \text{Re}_x = \frac{U_0 x}{\nu}, \tag{42}$$

где  $x$  – расстояние вдоль потока от точки перехода ламинарного пограничного слоя к турбулентному. Приравняв выражения (41) и (42), получим

$$\tau_x = 0.0135 \rho_0 U_0^2 \left( \frac{U_0 x}{\nu} \right)^{-1/7}. \tag{43}$$

Как уже обсуждалось выше при анализе вклада сдвиговых волн, основной вклад в (13) дает переходная область, отстоящая от границы на расстояние порядка толщины вязкого подслоя  $\delta_*$ , тогда как внутри вязкого подслоя источники волн отсутствуют. В качестве толщины вязкого подслоя обычно берется значение  $5\delta_*$  (см. напр. [45]), так что расстояние, на котором должны находиться лайтхилловские квадрупольные для эффективного излучения шума за счет обратного эффекта Константинова, равно

$$h = 5\delta_* = \frac{5\nu}{\sqrt{\tau_x / \rho_0}} = \frac{\nu}{U_0} \frac{5}{\sqrt{0.0135}} \left( \frac{U_0 x}{\nu} \right)^{1/14}. \tag{44}$$

Полученные соотношения позволяют получить оценку верхней частотной границы, выше которой происходит резкий спад спектра касательных напряжений. Действительно, приравняв глубину проникновения вихревых (вязких) волн толщине вязкого подслоя, получим:

$$\sqrt{2\nu / \omega_*} = 5 \frac{\nu}{u_*},$$

откуда

$$\omega_* = \frac{2\nu}{(5\nu)^2} u_*^2 = 0.04 \frac{u_*^2}{\nu} = 0.02 C_F \frac{U_0^2}{\nu}. \tag{45}$$

Подставляя выражение (44) в (45), получим, что показатель экспоненты равен

$$h \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} = \frac{\nu}{U_0} \frac{5}{\sqrt{0.0135}} \left( \frac{U_0 x}{\nu} \right)^{1/14} \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \sim \nu^{3/7}. \tag{46}$$

Из этого следует важный вывод: при уменьшении вязкости (и, следовательно, при увеличении числа Рейнольдса)  $\nu \rightarrow 0$  показатель экспоненты (46) уменьшается, так что затухание сдвиговых волн при уменьшении вязкости уменьшается. Соответственно, эффективность переизлучения сдвиговых волн в звуковые волны увеличивается.

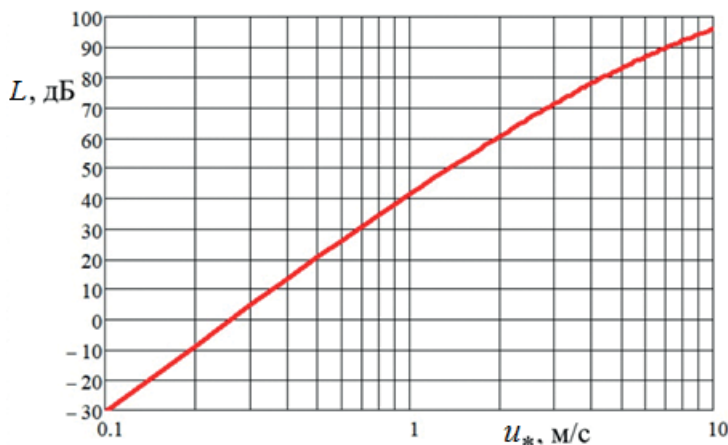


Рис. 9. Зависимость уровня излучаемой мощности с единичной площади от скорости.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изложена последовательная теория источников звука в турбулентном пограничном слое (ТПС), развивающемся над плоской гладкой границей при малых числах Маха. Основным источником звука и длинноволновой части пульсаций давления на обтекаемой границе являются приходящие сдвиговые (вязкие) волны, генерируемые лайтхилловскими квадрупольными в пристенной области ТПС. Даны количественные оценки спектра удельной звуковой мощности, генерируемой ТПС. Показано, что при увеличении числа Рейнольдса (уменьшении вязкости) роль вязкости в генерации звука не уменьшается, а увеличивается. На необходимость учета вязких волн впервые указали К.А. Наугольных и С.А. Рыбак в работе [17].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 23-41-00023.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically I. General theory // Proc. Royal Society A. 1952. V. 211. P. 564–586.
2. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically: II. Turbulence as a source of sound. Proc. R. Soc. Lond. A. 1954. V. 222. 1–32.
3. *Голдстейн М.Е.* Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981. 294 с.
4. *Мунин А.Г., Кузнецов В.М., Леонтьев Е.А.* Аэродинамические источники шума. М.: Машиностроение, 1981. 288 с.
5. *Blake W.K.* Mechanics of flow-induced sound and vibrations. Academic Press, 1986
6. *Curle N.* The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound // Proc. R. Soc. Lond. A. 1955. V. 231. P. 505–514.
7. *Kopiev V., Zaitsev M., Karavosov R.* Experimental investigation of azimuthal structure of dipole noise for rigid cylinder inserted in turbulent jet. // 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA Paper 2004–2927. 2004.
8. *Gloerfelt X., Pérot F., Bailly C., Juvé D.* Flow-induced cylinder noise formulated as a diffraction problem for low Mach numbers // J. Sound Vibration. 2005. V. 287(1–2). P. 129–151.
9. *Остриков Н.Н.* Излучение звука распределенными квадрупольными источниками вблизи твердых тел // Акуст. журн. 2021. Т. 58(4). С. 525–525.
10. *Zamponi R., Avallone F., Ragni D., Schram, C., Van Der Zwaag S.* Relevance of quadrupolar sound diffraction on flow-induced noise from porous-coated cylinders // J. Sound Vibration. 2024. V. 583. 118430.
11. *Kopiev V., Belyaev I., Zaytsev M., Zhao K.* Experimental study of truncated-cylinder struts for noise reduction of large-scale landing gears // J. Sound Vibration. 2021. V. 511. 116362.
12. *Kraichnan R.H.* Pressure fluctuation in turbulent flow over a flat plate // J. Acoust. Soc. Am. 1956. V. 28. N. 3. P. 378–390.
13. *Phillips O.M.* On the aerodynamic surface sound from a plane turbulent boundary layer // Proc. Royal Society of London. 1956. V. 234. P. 327–335.
14. *Powell A.* Aerodynamic noise and the plane boundary // J. Acoust. Soc. Am. 1960. V. 32. N. 8. P. 982–990.
15. *Ефимцов Б.М., Кузнецов В.Б., Сысоев В.А.* Турбулентные пульсации касательного напряжения на стенке // Ученые записки ЦАГИ. 1983. Т. 14. № 2. С. 67–75.
16. *Howe M.S.* A note on the Kraichnan – Phillips theorem // J. Fluid Mechanics. 1992. V. 234, January. P. 443–448.
17. *Наугольных К.А., Рыбак С.А.* Об излучении звука турбулентным пограничным слоем // Труды Акустического института. 1971. № 16. С. 129–134. Повторение в Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 6. С. 890–894.
18. *Константинов Б.П.* О поглощении звуковых волн при отражении от твердой границы // Журн. техн. физ. 1930. Т. 9. С. 3.
19. *Савельев А.Я.* Эффект Константинова в некоторых задачах акустики // Акуст. журн. 1973. Т. 29. № 2. С. 231–239.
20. *Легуша Ф.Ф.* Эффект Константинова и поглощение звука в неоднородных средах // Успехи физ. наук. 1984. Т. 144. Вып. 3. С. 509–522.
21. *Morfeý C.L.* The role of viscosity in aerodynamic sound generation (in honour of Alan Powell) // Int. J. Aeroacoustics. 2003. V. 2. No 3 & 4. P. 225–240.
22. *Landahl M.T.* Wave mechanics of boundary layer turbulence and noise // J. Acoust. Soc. Am. 1975. V. 57. No 4. P. 824–831.
23. *Реутов В.П., Рыбушкина Г.В.* О дипольном излучении турбулентных всплесков в пограничном слое // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 152–153.
24. *Howe M.S.* The role of surface shear stress fluctuations in the generation of boundary layer noise // J. Sound Vibration. 1979. V. 65 (2). P. 159–164.
25. *Crighton D.G., Dowling A.P., Williams J.F., Heckl M.A., Leppington F.A.* Modern methods in analytical acoustics: lecture notes. Springer Science & Business Media, 2012.
26. *Hariri H.H., Akylas T.R.* The wall shear stress contribution to boundary layer noise // Physics of Fluids. 1985. V. 28(9). P. 2727–2729.
27. *Смольяков А.В.* Длинноволновые компоненты спектра нормальных напряжений на поверхности пластины в вязком потоке // Акуст. журн. 1989. Т. 35. Вып. 3. С. 506–514.
28. *Смольяков А.В.* Новая модель взаимного и частотно-волнового спектров турбулентных пульсаций давления в пограничном слое // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 3. С. 393–400.

29. *Chase D.M.* Fluctuations in wall-shear stress and pressure at low streamwise wavenumbers in turbulent boundary-layer flow // *J. Fluid Mech.* 1991, April. V. 225. P. 545–555.
30. *Chase D.M.* Fluctuating wall-shear stress and pressure at low streamwise wavenumbers in turbulent boundary-layer flow at low Mach numbers // *J. Fluids and Structures.* 1992. No 6. P. 395–413.
31. *Leehey P.* Structural excitation by a turbulent boundary layer: an overview // *J. Vibration Stress and Reliability in Design.* 1988. V. 110. P. 220–225.
32. *Dowling A.P.* Underwater flow noise // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics.* 1998. V. 10(1). P. 135–153.
33. *Данилов С.Д., Миронов М.А.* Преобразование поперечных волн в продольные на границе раздела двух сред и проблема генерации звука турбулентностью // *Акуст. журн.* 1985. Т. 31. № 4. С. 527–528.
34. *Chase D.M.* Generation of fluctuation normal stress in a viscoelastic layer by surface shear stress and pressure as in turbulent boundary-layer flow // *J. Acoust. Soc. Am.* 1991. V. 89. No 6. P. 2589–2596.
35. *Hu Z., Morfey C.L., Sandham N.D.* Sound radiation in turbulent channel flows // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 475. P. 269–302; *Hu Z., Morfey C.L. and Sandham N.D.* Sound radiation from a turbulent boundary layer // *Physics of Fluids.* 2006. V. 18. 098101.
36. *Wang M., Freund J.B., Lele S.K.* Computational Prediction of Flow-Generated Sound // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2006. 38. P. 483–512.
37. *Corkos G.M.* Resolution of pressure in turbulence // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1963. V. 35. № 2. P. 192–199.
38. *Tam C.K.W.* Intensity, spectrum, and directivity of turbulent boundary layer noise // *J. Acoust. Soc. Am.* 1975. V. 57. No 1. P. 25–34.
39. *Ефимцов В.М.* Характеристики поля пристеночных турбулентных пульсаций давления при больших числах Рейнольдса // *Акуст. журн.* 1982. Т. 28. № 4. С. 491–497.
40. *Diaz-Daniel C., Laizet S., Vassilicos J.C.* Wall shear stress fluctuations: Mixed scaling and their effects on velocity fluctuations in a turbulent boundary layer // *Phys. Fluids.* 2017. V. 29. 055102.
41. *Cheng Cheng, Weipeng Li, Adrian Lozano-Duran, Yitong Fan, and Hong Liu.* On the structure of streamwise wall-shear stress fluctuations in turbulent channel flows // *Fourth Madrid Summer School on Turbulence J. Phys.: Conf. Ser.* 2020. V. 1522, 012010.
42. *Örlü R., Schlatter P.* On the fluctuating wall-shear stress in zero pressure-gradient turbulent boundary layer flows // *Phys. Fluids.* 23:021704, 2011.
43. *Yang X.I.A. and Lozano-Durán A.* A multifractal model for the momentum transfer process in wall bounded flows // *J. Fluid Mech.* 824: R2, 2017.
44. *Gloerfelt X., Berland J.* Turbulent boundary layer noise: direct radiation at Mach number 0.5 // *J. Fluid Mechanics.* 2014. V. 723. P. 318–351.
45. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.

## ACOUSTIC RADIATION OF A TURBULENT BOUNDARY LAYER FORMED ABOVE A FLAT SMOOTH BOUNDARY

I. V. Belyaev<sup>a</sup>, V. F. Kopyev<sup>a,\*</sup>, M. A. Mironov<sup>a,\*\*</sup>

<sup>a</sup>*FAU TsAGI, Moscow Research Complex TsAGI, st. Radio 17, Moscow, 105005 Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: vkopiev@mktsagi.ru*

<sup>\*\*</sup>*e-mail: mironov\_ma@mail.ru*

A consistent theory of sound generation in a turbulent boundary layer developing over a flat smooth boundary at low Mach numbers is presented. The main source of sound and the long-wave part of pressure pulsations on the boundary in a streamline are incoming shear (viscous) waves generated by Lighthill quadrupoles in the near-wall region of the turbulent boundary layer. It is shown that with an increase in the Reynolds number (decrease in viscosity), the role of viscosity in sound generation does not decrease, but increases. Quantitative estimates of the spectrum of specific sound power generated in a turbulent boundary layer are given.

*Keywords:* aeroacoustics, turbulent boundary layer, viscosity