АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2025, том 71, № 2, с. 176–183

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.23

ВИБРАЦИОННАЯ ЧЕРНАЯ ДЫРА ДЛЯ КРУТИЛЬНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ПО СТЕРЖНЮ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

© 2025 г. М. А. Миронов[a,*]

[a]*Акционерное общество "Акустический институт имени академика Н.Н. Андреева", ул. Шверника 4, Москва, 117292 Россия*

**e-mail: mironov_ma@mail.ru*

Поступила в редакцию 11.12.2024 г.
После доработки 11.12.2024 г.
Принято к публикации 04.03.2025 г.

Рассмотрено распространение крутильных волн в стержнях переменного сечения. При линейном увеличении сплющивания стержня скорость распространения крутильной волны также уменьшается линейно и на конечной длине стержня обращается в ноль. При этом время распространения до заостренного конца равно бесконечности. Такая замедляющая конструкция в современной терминологии называется вибрационной черной дырой. Получены точные решения уравнения крутильных колебаний заостренного стержня с моментом инерции и моментом кручения в виде степенных функций и соответствующие выражения для входного импеданса со стороны начального сечения.

Ключевые слова: Крутильная волна, стержень переменного сечения, время распространения
DOI: 10.31857/S0320791925020027, **EDN:** IIFHCF

ВВЕДЕНИЕ

Под вибрационной черной дырой (ВЧД) понимается волновод с замедляющей структурой, которая обеспечивает бесконечное время распространения волны на конечной дистанции. При степенной зависимости скорости распространения от координаты $c(x) = c_0\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n$ $(n \geq 0)$ время распространения от сечения x_0 до сечения x равно

$$T = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{c(x)} = \frac{x_0}{c_0}\begin{cases} \dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{n-1}, & n \neq 1, \\ \ln\dfrac{x_0}{x}, & n = 1. \end{cases}$$

При $x \to 0$ и $n \geq 1$ время распространения стремится к бесконечности. Показатель степени $n = 1$ является минимальным для достижения этого эффекта. При $n < 1$ время распространения конечно. Данные оценки не связаны с природой волн. Для вибрационных волн первый пример волновода, обеспечивающего необходимое замедление, дан в работе [1] в 1988 г. Здесь рассмотрено, в рамках ВКБ-приближения, распространение изгибных волн по стержню, толщина которого меняется по степенному закону. Показано, что при показателе степени большем или равном 2, условие бесконечности времени распространения изгибной волны на конечном отрезке стержня выполняется.

В обзоре 2020 г. [2] продемонстрирован экспоненциальный рост работ в этом направлении, и теперь, спустя 4 года, рост продолжается. К настоящему времени к "классической" ВЧД в виде параболически заостренного стержня [1] добавилось несколько конструкций. В [3] экспериментально исследовано вибропоглощение диском с заостренной по параболическому закону кромкой. В [4, 5] рассмотрены ВЧД в виде круглых вмятин в пластину, так что толщина пластины уменьшается к центру вмятины. Цилиндрические вмятины в пластинах, соединенных в виде бутерброда, предложены в [6]. Заостренные стержни, свернутые в спираль для уменьшения габаритов, исследованы в [7]. Поглощающие покрытия, наносимые на заостренную кромку, предложено выполнять в виде пьезоактивных элементов с подходящим шунтированием [8] — полуактивные ВЧД и даже с обратной связью [9] — активные ВЧД. ВЧД в виде стержня с

радиальными прорезями рассмотрены в [10]. Влияние добавления резонаторов к ВЧД для улучшения работы на низких частотах исследовано в [11]. Влияние опор в некоторых точках ВЧД рассматривалось в [12]. ВЧД из пористых материалов рассмотрены в [13], мульти материальные ВЧД — в [14]. В работе [15] при анализе закрученной ВЧД обнаружено, что в такой конструкции, помимо изгибных волн, могут возбуждаться и крутильные волны. Отмечено, что заостренный стержень замедляет распространение не только изгибных волн, но также и крутильных волн. Дана численная иллюстрация замедления крутильных волн на стержне прямоугольного сечения. Однако никакого аналитического исследования крутильных волн на заостренном стержне здесь не дано. Закрученный заостренный стержень предложен и экспериментально исследован в [16, 17]. Набор закрученных заостренных стержней позволяет увеличить плотность размещения ВЧД на конструкции. В работе [18] рассмотрен заостренный стержень в рамках модели стержня Тимошенко (толстый стержень). Следует отметить, что впервые волны в одномерной среде (струна с погонной массой, увеличивающейся до бесконечности) с линейным изменением скорости распространения рассмотрел Рэлей [19].

В приведенном выше кратком обзоре отмечены только оригинальные вариации общей идеи черной дыры. Огромное количество различных конструкций и возможных применений заслуживают отдельной обзорной статьи.

В настоящей работе рассмотрена ВЧД для крутильных волн, распространяющихся в стержне переменного сечения. Основное математическое отличие от всех ранее рассмотренных ВЧД состоит в том, что дифференциальное уравнение, описывающее крутильные волны, имеет второй порядок, в отличие от уравнения четвертого порядка для изгибных колебаний стержня. Расчеты проведены для стержня, у которого момент инерции и момент кручения поперечных сечений изменяются по степенным законам вдоль оси стержня. Простая приближенная реализация таких зависимостей получается применительно к стержню, каждое поперечное сечение которого является эллипсом. Заострение стержня эллиптического сечения достаточно выполнить не параболическим, а линейным — простой клин является ВЧД для крутильных волн.

УРАВНЕНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Динамика крутильных колебаний стержня переменного сечения зависит от двух параметров: момента инерции поперечного сечения стержня $M(x)$ и момента кручения $C(x)$, где x — координата вдоль оси стержня. Уравнение крутильных колебаний для угла поворота φ имеет вид (см. напр. [20]):

$$M(x)\ddot{\varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(C(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0. \qquad (1)$$

Для стержня эллиптического сечения с полуосями $a(x)$, $b(x)$ моменты равны:

$$C(x) = \mu\pi \frac{a^3(x)b^3(x)}{a^2(x)+b^2(x)}, \qquad (2)$$

$$M(x) = \rho\frac{\pi}{4}a(x)b(x)\left(a^2(x)+b^2(x)\right), \qquad (3)$$

ρ — плотность, μ — модуль сдвига материала стержня.

Локальная скорость распространения крутильной волны $c(x)$ равна

$$c(x) = \sqrt{\frac{C(x)}{M(x)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\frac{2a(x)b(x)}{a^2(x)+b^2(x)}. \qquad (4)$$

Для стержня кругового сечения $a(x) = b(x)$ скорость распространения не зависит от координаты и частоты:

$$c = c_0 = \sqrt{\mu/\rho}. \qquad (5)$$

В стержне с эллиптическим сечением скорость распространения крутильной волны меньше: чем больше эллиптичность a/b, тем меньше скорость распространения [20]. Асимптотически, при $a/b \to \infty$, $c(x) = 2c_0\dfrac{b(x)}{a(x)} \to 0$. Например, при постоянной ширине стержня a и при линейном (и более быстром) уменьшении толщины стержня $b = b_0\dfrac{x}{x_0}$ скорость распространения стремится к нулю. Такая зависимость скорости распространения дает бесконечное время распространения до острия. На рис. 1 изображен стержень, круглый в

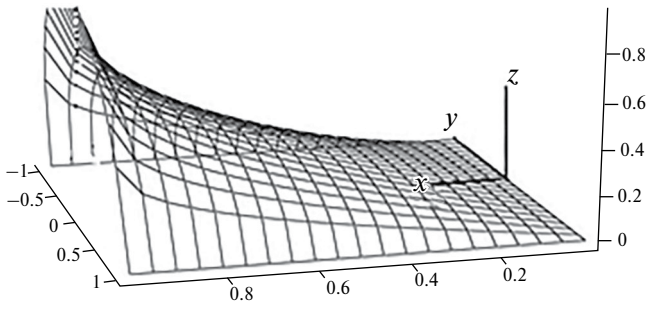

Рис. 1. Стержень эллиптического сечения с уменьшающейся толщиной — вибрационная ЧД для крутильных волн. Координата x отсчитывается от тонкого сечения стержня.

начальном сечении $x = 1$ и сплющивающийся при $x \to 0$ по линейному закону.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Далее рассмотрена специальная зависимость параметров стержня $M(x)$, $C(x)$, при которой имеется набор простых степенных фундаментальных решений, демонстрирующих эффект ВЧД. Подход аналогичен работе [21], где получены точные решения для уравнения изгибных колебаний параболически заостренного стержня.

Исходное уравнение (1) записываем в частотной области (ω — частота):

$$-\omega^2 M(x)\varphi - \frac{d}{dx}\left(C(x)\frac{d\varphi}{dx}\right) = 0. \tag{6}$$

Полагаем степенные зависимости момента инерции и момента кручения:

$$M(x) = M_0 (x/x_0)^n, \tag{7}$$

$$C(x) = C_0 (x/x_0)^m. \tag{8}$$

Решения, следуя [21], также ищем в виде степенных функций:

$$\varphi(x) = (x/x_0)^\nu. \tag{9}$$

Здесь x_0 — длина стержня. Подставляя эти зависимости в уравнение (6), после дифференцирования получаем:

$$\begin{aligned} &-\omega^2 M_0 (x/x_0)^n (x/x_0)^\nu - \\ &-C_0 \nu\left((m+\nu-1)\frac{x^{m+\nu-2}}{x_0^{m+\nu}}\right) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Приравнивая показатели степеней при x у слагаемых в (10), получим соотношение между показателями степеней:

$$n + \nu = m + \nu - 2 \to m = n + 2. \tag{11}$$

Показатель степени момента кручения должен быть на две единицы больше показателя степени момента инерции. Далее, сократив одинаковые степени x, приравниваем предстепенные множители в (10):

$$-\omega^2 M_0 \frac{1}{x_0^{n+\nu}} - \nu(m+\nu-1)\frac{1}{x_0^{m+\nu}} = 0$$

или, с учетом связи показателей степени m и n (11):

$$-\omega^2 M_0 - \nu(n+\nu+1)\frac{1}{x_0^2} = 0.$$

Переписывая это уравнение относительно показателя степени ν решения (9):

$$\nu^2 + (n+1)\nu + n\frac{\omega^2 M_0 {x_0}^2}{C_0} = 0, \tag{12}$$

получаем два независимых решения уравнения (12):

$$\nu_{1,2} = -\frac{n+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{\omega^2 M_0 {x_0}^2}{C_0}}. \tag{13}$$

С учетом того, что

$$\frac{C_0}{M_0} = {c_0}^2,$$

c_0 — скорость крутильных волн в начальном сечении $x = x_0$, (13) можно переписать в виде

$$\nu_{1,2} = -\frac{n+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\omega x_0}{c_0}\right)^2}. \tag{14}$$

Степенные решения (9) можно представить в привычном экспоненциальном виде:

$$\varphi_{1,2}(x) = e^{\nu_{1,2}\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}. \tag{15}$$

Зависимость правой части (14) от частоты показывает, что существует критическая частота

$$\omega^* = \frac{c_0}{x_0}\frac{n+1}{2}, \tag{16}$$

которая делит частоты на две области: 1) $\omega < \omega^*$ и 2) $\omega > \omega^*$. В первом случае (низкие частоты) показатели степени — вещественные числа. Колебания стержня синфазны по всей его длине, нет эффекта распространения. Во втором случае (высокие частоты) показатели степени — комплексно-сопряженные числа. Колебания стержня несинфазны и имеют волновой вид. Показатель ν_1 соответствует волне, бегущей в положительном направлении оси x, показатель ν_2 соответствует волне, бегущей в отрицательном направлении оси x. Для наглядности решение (15) при $\omega > \omega^*$ можно записать в виде экспонент — бегущих волн с переменными амплитудами и волновыми числами:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2}(x) &= \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{n+1}{2}} e^{i\mathrm{Im}(\nu_{1,2})\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}} = \\ &= \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{n+1}{2}} e^{i\int_{x_0}^{x} k_{1,2}(x)dx}, \end{aligned} \tag{17}$$

где $k_{1,2}(x) = \dfrac{\mathrm{Im}(\nu_{1,2})}{x}$ — эффективное текущее волновое число волны, зависящее от x. Можно ввести

соответствующие фазовую $c_{\text{ph}1,2}(x)$ и групповую $c_{\text{g}1,2}(x)$ скорости распространения:

$$c_{\text{ph}1,2}(x)=\frac{\omega}{k_{1,2}}=\frac{\omega x}{\operatorname{Im}(\nu_{1,2})}=\frac{\omega x}{\pm\sqrt{-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\omega x_0}{c_0}\right)^2}}, \quad (18)$$

$$c_{\text{g}1,2}(x)=\frac{\partial\omega}{\partial k_{1,2}}=\frac{1}{\partial k_{1,2}/\partial\omega}=\omega x\frac{\pm\sqrt{-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\omega x_0}{c_0}\right)^2}}{\left(\frac{\omega x_0}{c_0}\right)^2}. \quad (19)$$

При $\omega\to\infty$ фазовая и групповая скорости стремятся к $c_0\left(\frac{x}{x_0}\right)$, независимо от n. При стремлении частоты к критической частоте сверху $\omega\to\omega^*=\frac{c_0}{x_0}\frac{n+1}{2}$, фазовая скорость, оставаясь пропорциональной x, стремится к бесконечности. Групповая скорость при этом стремится к нулю.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗАОСТРЕННОГО СТЕРЖНЯ

Общее решение уравнения (6) представляется в виде суммы двух степенных функций (9):

$$\varphi(x)=A_1(x/x_0)^{\nu_1}+A_2(x/x_0)^{\nu_2}. \quad (20)$$

Показатели степени задаются уравнением (14).

Далее рассмотрим две краевые задачи.

Первая задача — о колебаниях неидеальной ВЧД. В начальном сечении $x=x_0$ задается угловое смещение:

$$\varphi(x_0)=\varphi_0. \quad (21)$$

Рассматриваем неидеальную ВЧД, обрывающуюся в сечении $x=\varepsilon x_0$, $\varepsilon<1$. Считаем это сечение свободным — момент кручения здесь равен нулю:

$$C(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\Big|_{x=\varepsilon x_0}=0. \quad (22)$$

Подставляя (20) в (21) и (22), получим систему уравнений для нахождения амплитуд $A_{1,2}$:

$$A_1+A_2=\varphi_0,$$

$$A_1\frac{\nu_1}{x_0}\varepsilon^{\nu_1-1}+A_2\frac{\nu_2}{x_0}\varepsilon^{\nu_2-1}=0.$$

Находим $A_{1,2}$:

$$A_1=\frac{\varphi_0}{1-\frac{\nu_1}{\nu_2}\varepsilon^{(\nu_1-\nu_2)}},\ A_2=-A_1\frac{\nu_1}{\nu_2}\varepsilon^{(\nu_1-\nu_2)}$$

и угловое смещение как функцию x:

$$\varphi(x)=\frac{\varphi_0}{1-\frac{\nu_1}{\nu_2}\varepsilon^{(\nu_1-\nu_2)}}\times \times\left[(x/x_0)^{\nu_1}-\frac{\nu_1}{\nu_2}\varepsilon^{(\nu_1-\nu_2)}(x/x_0)^{\nu_2}\right]. \quad (23)$$

Приравнивание нулю знаменателя в (23) дает уравнение для частот резонансных колебаний: $1-\frac{\nu_1}{\nu_2}\varepsilon^{(\nu_1-\nu_2)}=0$, или $\varepsilon^{(\nu_1-\nu_2)}=\frac{\nu_2}{\nu_1}$. На частотах, выше критической, $\omega>\omega^*$, последнее равенство записывается в виде:

$$e^{2i\ln\varepsilon\times\sqrt{\left(\frac{\omega x_0}{c_0}\right)^2-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}}= =\frac{-\frac{n+1}{2}+i\sqrt{\left(\frac{\omega x_0}{c_0}\right)^2-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}}{-\frac{n+1}{2}-i\sqrt{\left(\frac{\omega x_0}{c_0}\right)^2-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}}. \quad (24)$$

На частотах выше критической ($\omega>\omega^*$) правая часть этого уравнения по модулю равна единице, при этом фаза изменяется от нуля до $-\pi$. Асимптотически, при $\frac{\omega x_0}{c_0}\gg\frac{n+1}{2}$, или, что то же самое, $\omega\gg\omega^*$, резонансные частоты определяются формулой:

$$\frac{\omega_q x_0}{c_0}=\frac{\omega_q}{\omega^*}=\frac{\pi}{|\ln\varepsilon|}(q+1),\ q=0,1,2,\ldots \quad (25)$$

Вычисление поля момента кручения дает:

$$C(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}=\frac{C_0\varphi_0}{1-\frac{\nu_1}{\nu_2}\varepsilon^{(\nu_1-\nu_2)}}\frac{d}{dx}\varphi(x),$$

$$=C_0(x/x_0)^m\frac{\varphi_0\nu_1/x_0}{1-\frac{\nu_1}{\nu_2}\varepsilon^{(\nu_1-\nu_2)}}\times \times\left[(x/x_0)^{\nu_1-1}-\varepsilon^{(\nu_1-\nu_2)}(x/x_0)^{\nu_2-1}\right].$$

В частности, момент кручения при $x = x_0$ равен:

$$C(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}|_{x=x_0} = \\ = C_0\frac{\varphi_0 / x_0}{1-\frac{\nu_1}{\nu_2}\varepsilon^{(\nu_1-\nu_2)}}\nu_1\left[1-\varepsilon^{(\nu_1-\nu_2)}\right]. \quad (26)$$

Входной импеданс, определенный как отношение момента кручения к углу поворота в начальном сечении, равен

$$Z(x_0) = \frac{\frac{C_0\nu_1}{x_0}}{1-\frac{\nu_1}{\nu_2}\varepsilon^{(\nu_1-\nu_2)}}\left[1-\varepsilon^{(\nu_1-\nu_2)}\right]. \quad (27)$$

Для сопоставления приведем входной импеданс однородного стержня длиной x_0:

$$Z_0 = -C_0k_0\frac{\sin(k_0x_0)}{\cos(k_0x_0)}, \quad (28)$$

$$k_0 = \omega/\sqrt{C_0/M_0}.$$

На рис. 2, 3 показаны зависимости входного импеданса от частоты для ε, равных 0.1 и 0.01 и, для сравнения, зависимости входного импеданса однородного стержня. Оси графиков нормированы. По оси абсцисс — нормированная частота $\Omega = \frac{\omega x_0}{c_0}$, умноженная на 4/π, по оси ординат — модуль нормированного входного импеданса $\tilde{Z}(\Omega) = Z(x_0)/(C_0/x_0)$ и модуль нормированного входного импеданса однородного стержня $\widetilde{Z_0}(\Omega) = Z_0/(C_0/x_0)$. Чтобы избежать бесконечных значений на резонансных частотах, в модуль сдвига введены небольшие мнимые добавки — коэффициент потерь δ: $\mu \to \mu(1-i\delta)$. На рис. 2 δ = 0.01, на рис. 3 δ = 0.1.

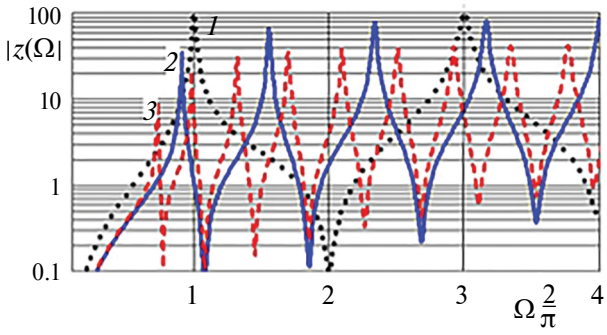

Рис. 2. Входной импеданс ЧД, δ = 0.01. По оси абсцисс — нормированная частота. По оси ординат — нормированный на входной импеданс однородного стержня модуль импеданса ЧД. *1* (пунктир) — однородный стержень, *2* (сплошная) — ε = 0.1, *3* (штриховая) — ε = 0.01.

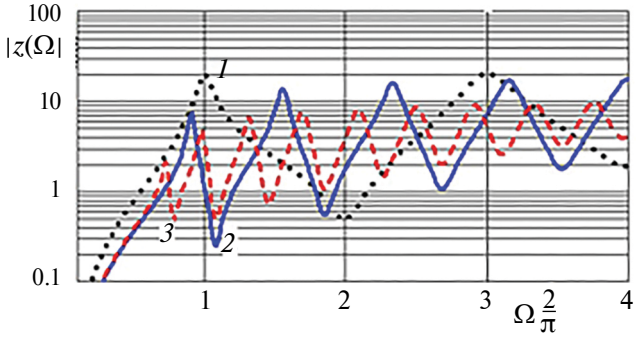

Рис. 3. Входной импеданс ЧД, δ = 0.1. Обозначения как на рис. 2.

Однородный стержень (кривые *1*) в данной краевой задаче является резонатором с одной жесткой и другой мягкой границами. Первая резонансная частота соответствует четверти длины волны, укладывающейся на длине стержня. Далее резонансные частоты идут через половину длины волны. Входной импеданс ВЧД имеет первую резонансную частоту ниже, чем у однородного стержня, причем, чем меньше ε, тем ниже первая резонансная частота (сравнить кривые *2* и *3* на рис. 2). Следующие резонансные частоты идут чаще, чем у однородного стержня. Как следует из (25), расстояние между соседними резонансными частотами в $|\ln\varepsilon|$ раз меньше, чем для однородного стержня. С увеличением коэффициента потерь δ резонансы становятся более пологими, причем с уменьшением ε эффект сглаживания увеличивается (рис. 3).

Вторая задача относится к идеальной ВЧД. Предположим, что заострение стержня выполнено идеально. В предыдущей постановке это соответствует ε = 0. Эквивалентная постановка для неидеальной ВЧД состоит в условии полного поглощения падающей волны на заостренный конец. Обе постановки можно объединить одним граничным условием: отражение волны от заостренной границы стержня отсутствует. Результат вычисления импеданса сравнивается с импедансом бесконечного однородного стержня, в котором присутствует только уходящая волна. Ищем решение в виде уходящей от начального сечения $x = x_0$ волны:

$$\varphi(x) = A(x/x_0)^{\nu_2}. \quad (29)$$

Момент кручения равен

$$C(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} = C(x)\frac{\nu_2}{x_0}A(x/x_0)^{\nu_2-1}. \quad (30)$$

Деля (30) на (29), получаем импеданс в начальном сечении $x = x_0$:

$$Z(x_0) = \frac{C_0\nu_2}{x_0}. \quad (31)$$

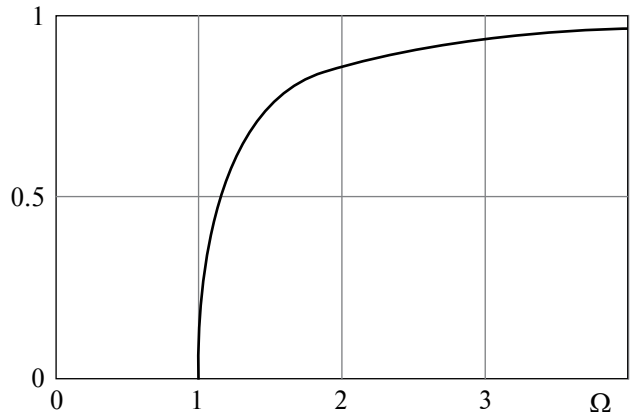

Рис. 4. Отношение мнимых частей импедансов идеальной ВЧД и полубесконечного однородного стержня как функция частоты.

Входной импеданс полубесконечного однородного стержня Z_0 равен импедансу бегущей крутильной волны

$$Z_0 = -iC_0\frac{\omega}{c_0}. \qquad (32)$$

Это мнимый импеданс на всех частотах, дающий трение излучения (радиационное трение). Отношение мнимой части импеданса ВЧД (31) к мнимой части импеданса однородного стержня (31) равно

$$\frac{\mathrm{Im}Z(x_0)}{\mathrm{Im}Z_0} = \frac{\mathrm{Im}\nu_2}{\frac{\omega x_0}{c_0}} = \frac{\mathrm{Im}\sqrt{1-\Omega^2}}{\Omega}. \qquad (33)$$

На рис. 4 показана эта зависимость.

На частотах ниже критической частоты ВЧД ($\Omega < 1$) радиационное трение отсутствует. При увеличении частоты импеданс ВЧД быстро приближается к импедансу полубесконечного однородного стержня.

СООТНОШЕНИЕ ОСЕЙ ЭЛЛИПСОВ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ВЧД

Далее рассматривается возможность реализации ВЧД для стержня, сечения которого имеют форму эллипса. Соотношение осей эллиптических сечений, при котором реализуется ЧД, определяется равенствами (7), (8), (11):

$$C(x) = \mu\pi\frac{a^3(x)b^3(x)}{a^2(x)+b^2(x)} = C_0(x/x_0)^m,$$

$$M(x) = \rho\frac{\pi}{4}a(x)b(x)\left(a^2(x)+b^2(x)\right) = M_0(x/x_0)^n.$$

Разделив $C(x)$ на $M(x)$, получим квадрат текущей скорости распространения $c(x)$ крутильных волн

$$c(x)^2 = \frac{C(x)}{M(x)} = 4\frac{\mu}{\rho}\frac{a^2(x)b^2(x)}{\left(a^2(x)+b^2(x)\right)^2} = \frac{C_0}{M_0}(x/x_0)^2. \qquad (34)$$

Учитывая, что $\frac{\mu}{\rho} = \frac{C_0}{M_0}$ — квадрат скорости в круглом стержне, соотношение (34) перепишется в таком виде:

$$4\frac{a^2(x)b^2(x)}{\left(a^2(x)+b^2(x)\right)^2} = (x/x_0)^2.$$

Извлекаем корень квадратный и вводим обозначение для эксцентриситета:

$$Y(x) = \frac{b(x)}{a(x)}.$$

Уравнение для Y имеет вид:

$$\frac{Y(x)}{1+Y(x)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{x_0},$$

или:

$$Y^2 - 2\frac{x_0}{x}Y + 1 = 0. \qquad (35)$$

Решение этого уравнения с правильным знаком "–" (при $x < x_0$) записано ниже

$$\frac{b(x)}{a(x)} = Y = \frac{x_0}{x} - \frac{x_0}{x}\sqrt{1-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}. \qquad (36)$$

При $x = x_0$ $\frac{b}{a} = 1$. При $x \to 0$ $\frac{b}{a} \to 1/2\left(\frac{x}{x_0}\right)$.

На рис. 5 показана получившаяся зависимость. По оси абсцисс — нормированное расстояние от концевого сечения $X = x/x_0$, по оси ординат

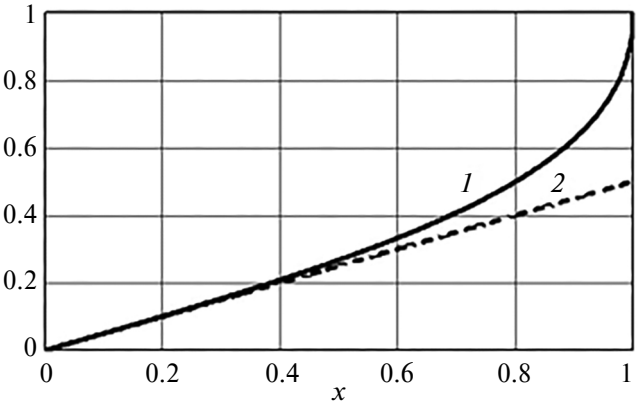

Рис. 5. *1* — отношение осей как функция расстояния до конечного сечения стержня эллиптического сечения; *2* — асимптотика при $X \to 0$.

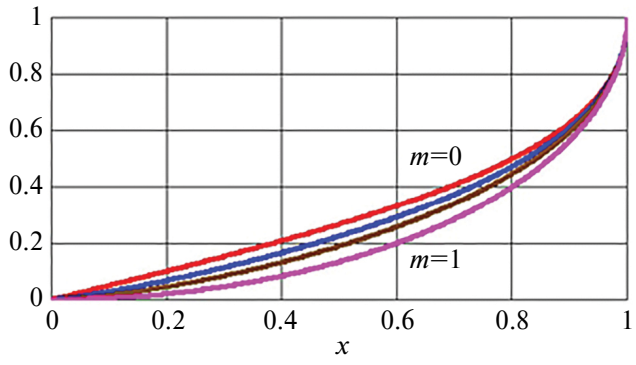

Рис. 6. Зависимости величины толщины стержня $b(X)$ стержня при степенной зависимости его ширины $a(X)$. $m = 0, 0.25, 0.5, 1.0$ (сверху вниз).

— отношение осей эллипсов как функция X. Именно при такой зависимости отношения осей эллипсов в каждом сечении реализуются точные решения (9) уравнения крутильных колебаний.

Соотношение (36) между толщиной $b(x)$ и шириной $a(x)$ стержня эллиптического сечения позволяет варьировать конструктивные параметры стержня в определенном диапазоне. Например, при степенной зависимости изменения ширины стержня $a(x)=\left(\frac{x}{x_0}\right)^m$ получаются зависимости толщины, показанные на рис. 6. Значение $m = 0$ соответствует стержню постоянной ширины. При увеличении степени m происходит заострение стержня по ширине, что приводит к увеличению заострения и по толщине.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный эффект ВЧД для крутильных волн представляется полезным для двух дальнейших направлений исследований. В теоретическом плане уравнение второго порядка для крутильных волн позволяет ставить более простые для аналитических решений математические задачи, чем уравнение четвертого порядка для уравнений изгибных волн. В прикладном плане практическая реализация ВЧД на крутильной волне не требует параболического заострения стержня — линейного заострения достаточно для бесконечного времени распространения крутильной волны. Это может упростить конструкции вибропоглотителей, основанных на использовании эффекта ВЧД.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миронов М.А.* Распространение изгибной волны в пластине, толщина которой плавно уменьшается до нуля на конечном интервале // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 546–547.
2. *Pelat A., Gautier F., Conlon S.C., Semperlotti F.* The acoustic black hole: A review of theory and applications // J. Sound Vibr. 2020. V. 476.115316 https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115316
3. *Pisliakov V., Mironov M., Svadkovsky A.* Vibration of specially tapered beams and plates // Internoise–2000. Nice. France. Proceedings 4-2657.
4. *Krylov V.V.* Propagation of plate bending waves in the vicinity of one- and two-dimensional acoustic ‘black holes’ // Proc. of the ECCOMAS Int. Conf. on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPDYN 2007). Rethymno, Crete, Greece, 13-16 June 2007 (CD-ROM).
5. *Bowyer E.P., O’Boy D.J., Krylov V.V., Gautier F.* Experimental investigation of damping flexural vibrations using two-dimensional acoustic ‘black holes’ // Proc. of the Int. Conf. on Noise and Vibration Engineering (ISMA 2010). Leuven, Belgium, 20–22 September 2010. Ed. Sas P., Bergen B. 2010. P. 1181–1192.
6. *Zhou T., Tang L., Ji H., Qiu J., and Cheng L.* Dynamic and static properties of double-layered compound acoustic black hole structures // Int. J. Applied Mechanics. 2017. V. 9(5). 1750074.
7. *Lee J.Y., Jeon W.* Vibration damping using a spiral acoustic black hole // J. Acoust. Soc. Am. 2017. V. 141. № 5. P. 1437–1445.
8. *Wan Z., Zhu X., Li T., Nie R.* Low-frequency multimode vibration suppression of an acoustic black hole beam by shunt damping // J. Vib. Acoust. 2022. 144. 2. 021012. https://doi.org/10.1115/1.4053590
9. *Hook K., Daley S., Cheer J.* Active control of an acoustic black hole using a feedback strategy // J. Sound Vibr. 2022. 528. 116895. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.116895
10. *Миронов М.А.* Разрезной стержень как вибрационная черная дыра // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 6. С. 736–739.
11. *Deng J., Guasch O., Maxit L., Gao N.* A metamaterial consisting of an acoustic black hole plate with local resonators for broadband vibration reduction // J. Sound Vibr. 2022. V. 526. 16803. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.116803
12. *Raybaud G., Lee J. Y., Jeon W., Pelat A., Gautier F.* On the control of the absorption of an Acoustic Black Hole by using attached point supports // J. Sound Vibr. 2023. V. 548. № 3. 117562. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2023.117562
13. *Zheng E., He S., Tang R., and He S.* Damping Enhancement Using Axially Functionally Graded Porous Structure Based on Acoustic Black Hole Effect // Materials 2019. V. 12. P. 2480. https://doi.org/10.3390/ma12152480
14. *Austin B., Cheer J., Bastola A.* Design of a multi-material acoustic black hole. Inter Noise 2022. Glasgow, UK. August 2022.

15. *Tong Zhou, Li Cheng*. Planar Swirl-shaped Acoustic Black Hole Absorbers for Multi-directional Vibration Suppression // J. Sound Vibr. 2022. V. 516(3). 116500. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116500
16. *Kim S.-Y., Lee D.* Numerical simulation of characteristics of wave propagation and reflection coefficient in a helix-acoustic black hole // J. Vibr. Control. 2020. V. 28. № 5–6. https://doi.org/10.1177/1077546320980570
17. *Kim S.-Y., Lee D.* Experimental investigation of a modular helix-acoustic black hole // Applied Acoustics 2023. V. 214. 109661. https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2023.109661
18. *Sørensen K.S., Cornean H.D., and Sorokin S.* Optimal profile design for acoustic black holes using Timoshenko beam theory // J. Acoust. Soc. Am. 2023. V. 153. № 3. P. 1554–1563. https://doi.org/10.1121/10.0017322
19. *Стретт Дж. В.* (*Рэлей*). Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. Т. 1. Гл. 7, раздел 148в. С. 251–253. 476 с.
20. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теория упругости. М.: Физматлит, 2001. 259 с.
21. *Миронов М.А.* Точные решения уравнения поперечных колебаний стержня со специальным законом изменения поперечного сечения // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 1. С. 3–8.

Vibrational Black Hole for Torsional Waves Propagating Through a Rod of Variable Cross-Section

M. A. Mironov[a,*]

[a]*Andreev Acoustics Institute, 4 Shvernik str., Moscow, Russia, 117292*

**e-mail: mironov_ma@mail.ru*

The propagation of torsional waves through rods of variable cross-section is considered. With a linear increase in the flattening of the rod, the propagation velocity of the torsional wave decreases linearly and turns to zero at the end of the rod. Yet, the propagation time to the sharpened end is equal to infinity. Such a decelerating structure is called a vibrational black hole in modern terminology. Exact solutions of the equation of torsional vibrations of a sharpened rod with a moment of inertia and a moment of torsion in the form of power functions are given. Corresponding expressions for the input impedance at the initial cross-section are obtained.

Keywords: Torsional wave, rod of variable cross-section, propagation time.