АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2025, том 71, № 2, с. 260–272

АТМОСФЕРНАЯ И АЭРОАКУСТИКА

УДК 534-9, 53.088

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ РАВНОВЕСНЫХ ТЕРМОАКУСТИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ В ВЯЗКОМ ТЕПЛОПРОВОДНОМ ГАЗЕ

© 2025 г. М. А. Демьянов[a,*], В. Ф. Копьев[a], М. А. Юдин[a]

[a]ФАУ ЦАГИ, Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ, Москва, Россия

*e-mail: demyanov@phystech.edu

Поступила в редакцию 19.11.2024 г.
После доработки 19.11.2024 г.
Принята к публикации 04.03.2025 г.

Рассмотрена задача нахождения пространственно-временной корреляционной функции термоакустических флуктуаций газа, находящегося вблизи термодинамического равновесия. Получено выражение для корреляционной функции равновесных тепловых флуктуаций поля давления вязкого теплопроводного совершенного газа, заполняющего неограниченное евклидово пространство. Исследовано влияние границы на корреляционные характеристики термоакустических флуктуаций давления на примере вязкого изоэнтропийного совершенного газа, заполняющего трубу малого сечения с краевыми условиями твердой стенки на концах и периодическими условиями для случая трубы, замкнутой в окружность.

Ключевые слова: корреляционные функции тепловых флуктуаций, термодинамически равновесные флуктуации

DOI: 10.31857/S0320791925020092, **EDN:** IJCEYK

ВВЕДЕНИЕ

Течения газа вблизи состояния термодинамического равновесия описываются уравнениями Навье–Стокса [1]. Такое равновесное течение, в действительности, сопровождается тепловыми флуктуациями макроскопических газодинамических параметров, которые, в данном случае, называются равновесными тепловыми флуктуациями. Равновесные тепловые флуктуации могут быть формально представлены как результат воздействия на газ местных спонтанных сил и тепловых потоков, представимых в виде дополнительных слагаемых в правой части уравнений Навье–Стокса [2]. При рассмотрении динамики газа на временных масштабах больших среднего времени свободного пробега молекул и пространственного масштаба большего средней длины свободного пробега молекул можно считать, что местные спонтанные напряжения и потоки тепла являются дельта-коррелированными процессами, корреляционные функции которых вычисляются на основании флуктуационно-диссипационной теоремы [3].

Выражение для пространственно-временного спектра равновесных тепловых флуктуаций поля давления в безграничном евклидовом пространстве в главном приближении по малости коэффициента теплопроводности приведено в § 89 IX-го тома Ландау и Лифшица [2]. В данной работе получено выражение для пространственно-временного спектра равновесных тепловых флуктуаций поля давления в безграничном евклидовом пространстве без предположения малости коэффициента теплопроводности. Далее, непосредственно вычислена пространственно-временная корреляционная функция поля давления в главном приближении по малости коэффициента теплопроводности для трех, двух и одномерного евклидовых пространств.

Исследовано влияние границы на корреляционные характеристики равновесных тепловых флуктуаций давления газа. Для этого рассмотрены задачи нахождения пространственно-временных корреляционных функций тепловых флуктуаций поля давления в одномерном случае вязкого изоэнтропийного газа, заполняющего трубу малого сечения с граничными условиями твердой стенки на концах, и трубу, замкнутую в окружность.

Проблемой экспериментальных измерений корреляционных функций тепловых флуктуаций давления подробно занимались в работах [4–7].

Исследование равновесных тепловых флуктуаций поля давления может иметь практическое применение в измерениях фазированными акустическими антеннами [8, 9]. Знание о пространственных структурах с наименее выраженным влиянием

тепловых флуктуаций может быть учтено в методиках акустического эксперимента.

Стоит также отметить, что создание технических устройств, принцип действия которых основан на измерении теплового акустического излучения, для определения температуры и ее распределения внутри биологических объектов, востребован в области медицины [10–12].

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСНЫХ ТЕПЛОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ГАЗА

Макроскопическая динамика вязкого теплопроводного газа, находящегося вблизи термодинамического равновесия, описывается уравнениями Навье–Стокса [1] (вывод Чепмена–Энскога):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \\ \rho\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \rho(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho(e + \dfrac{\mathbf{v}^2}{2})) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}(e + \dfrac{\mathbf{v}^2}{2})) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}\mathrm{v}_i) - \operatorname{div}(\mathbf{j}), \end{cases} \tag{1}$$

где ρ — плотность, $\mathbf{v}$ — макроскопическое поле скорости газа как сплошной среды, $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\,(S_{ij} - \frac{1}{3}\operatorname{div}(\mathbf{v})\delta_{ij})$ — тензор напряжений, p — давление, $S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ — тензор скоростей деформаций, μ — динамический коэффициент вязкости, $e = \frac{C_V}{\mu_{\mathrm{mol}}}T$ — удельная внутренняя энергия газа, C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме, μ_{mol} — молярная масса, T — температура газа в абсолютной шкале Кельвина, $j_i = -\chi\frac{\partial T}{\partial x_i}$ — плотность теплового потока, χ — коэффициент теплопроводности.

Поскольку тепловые флуктуации в макроскопических системах являются малыми, для их исследования достаточно рассмотреть линеаризованную систему уравнений Навье–Стокса. Для этого все макроскопические параметры представляются в виде малых возмущений относительно основного состояния покоящегося газа:

$$\begin{cases} \mathrm{v}_0 = 0, \\ \mathbf{v} \to \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}, \\ \rho \to \rho_0 + \rho, \\ p \to p_0 + p, \\ T \to T_0 + T, \\ \mu = \mu_0 + \mu, \\ \chi = \chi_0 + \chi. \end{cases}$$

Для возмущений макроскопических параметров газа получается линейная система уравнений:

$$\begin{cases} \rho_0\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} = -\nabla p + \mu(\triangle\mathbf{v} + \dfrac{1}{3}\nabla\operatorname{div}(\mathbf{v})), \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\rho + \rho_0\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \\ \rho_0\dfrac{\partial e}{\partial t} + p_0\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \chi\triangle T. \end{cases} \tag{2}$$

Для описания тепловых флуктуаций макроскопических параметров вязкого теплопроводного газа, находящегося вблизи термодинамического равновесия, в правую часть уравнений Навье–Стокса дополнительно вводят фиктивные слагаемые [2] — местные спонтанные напряжения s_{ij} и местные спонтанные тепловые потоки g_i:

$$\begin{gathered} \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(S_{ij} - \frac{1}{3}\operatorname{div}(\mathbf{v})\delta_{ij}) + s_{ij}, \\ j_i = -\chi\frac{\partial T}{\partial x_i} + g_i. \end{gathered} \tag{3}$$

Равновесные тепловые флуктуации параметров совершенного газа на макроскопических временных и пространственных масштабах $\tau \gg \tau_0$, $L \gg l_0$ (здесь τ_0 — среднее время свободного пробега молекул, l_0 — средняя длина свободного пробега молекул) могут быть формально представлены как результат воздействия местных спонтанных напряжений s_{ij} и местных спонтанных тепловых потоков q_i, корреляционные функции (4) которых могут быть найдены на основании флуктуационно-диссипационной теоремы [3]:

$$\begin{gathered} \left\langle q_i(t_1,\mathbf{r}_1)q_j(t_2,\mathbf{r}_2)\right\rangle = \frac{2\theta^2\chi}{\tilde{k}}\delta_{ij}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(t_1 - t_2), \\ \left\langle s_{ij}(t_1,\mathbf{r}_1)q_l(t_2,\mathbf{r}_2)\right\rangle = 0, \\ \left\langle s_{ij}(t_1,\mathbf{r}_1)s_{lm}(t_2,\mathbf{r}_2)\right\rangle = 2\theta\mu(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl} - \\ -\frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{lm})\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(t_1 - t_2), \end{gathered} \tag{4}$$

где $\tilde{k} \approx 1.38 \times 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, $\theta = \tilde{k}T$, операция $\langle\cdot\rangle$ означает взятие среднего.

Линеаризованные уравнения равновесных тепловых флуктуаций вязкого теплопроводного газа с учетом (2) и (3) имеют вид:

$$\begin{cases} \rho_0\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} = -\nabla p + \mu(\triangle\mathbf{v} + \dfrac{1}{3}\nabla\operatorname{div}(\mathbf{v})) + \dfrac{\partial s_{pl}}{\partial x_l}, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\rho + \rho_0\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \\ \rho_0\dfrac{\partial e}{\partial t} + p_0\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \chi\triangle T - \operatorname{div}(\mathbf{g}). \end{cases} \tag{5}$$

Для полного макроскопического описания движения газа помимо уравнений Навье–Стокса необходимо также задать уравнение состояния. Далее будет рассмотрена широко распространенная в газовой динамике модель совершенного газа — вязкого и теплопроводного газа, уравнение состояния которого описывается уравнением Клапейрона:

$$p = \rho \frac{R}{\mu_{\text{mol}}} T, \tag{6}$$

где R — универсальная газовая постоянная.

Тогда для совершенного газа линеаризованное уравнение с учетом (5) и (6) имеет вид:

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} = -\nabla p + \mu(\triangle \mathrm{v} + \dfrac{1}{3}\nabla \mathrm{div}(\mathbf{v})) + \dfrac{\partial s_{pl}}{\partial x_l}, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\rho + \rho_0 \mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + T_0(\gamma - 1)\mathrm{div}(\mathbf{v}) = \dfrac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\nu\triangle T - \dfrac{(\gamma-1)T_0}{p_0}\mathrm{div}(\mathbf{g}), \\ p = \dfrac{R}{\mu_{\text{mol}}}(\rho_0 T + T_0 \rho), \end{cases} \tag{7}$$

где $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ — показатель адиабаты, C_p — молярная теплоемкость газа при постоянном давлении, $\mathrm{Pr} = \dfrac{\mu C_p}{\chi \mu_{\text{mol}}}$ — число Прандтля.

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ СПЕКТР РАВНОВЕСНЫХ ТЕПЛОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА В БЕЗГРАНИЧНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Линеаризованные уравнения равновесных тепловых флуктуаций (7) были использованы для нахождения (в главном приближении по малости коэффициента теплопроводности χ) пространственно-временного спектра тепловых флуктуаций давления покоящегося газа для случая безграничного трехмерного пространства Лифшицем и Питаевским, что отражено во втором томе статистической физики [2].

Далее в данной статье будет получен спектр тепловых флуктуаций давления без предположения малости коэффициента теплопроводности χ.

Преобразование Фурье по пространству и времени уравнений (7) приводит к системе:

$$\begin{cases} -i\omega\rho_0 \hat{\mathbf{v}}_p = -i\,\mathbf{k}_p \hat{p} - \mu k^2 \hat{\mathbf{v}}_p - \dfrac{1}{3}\mu\, k_p k_l \hat{\mathrm{v}}_l + i\, k_l \hat{s}_{pl}, \\ -i\omega\hat{\rho} + \rho_0 i\, k_l \hat{\mathrm{v}}_l = 0, \\ -i\omega\hat{T} + T_0(\gamma-1) i\, k_l \hat{\mathrm{v}}_l = -\dfrac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\nu k^2 \hat{T} - \dfrac{(\gamma-1)T_0}{p_0} i k_l \hat{g}_l, \\ \hat{p} = \dfrac{R}{\mu_{\text{mol}}}(\rho_0 \hat{T} + T_0 \hat{\rho}). \end{cases} \tag{8}$$

Здесь знак $\hat{\cdot}$ над переменной обозначает ее фурье-образ, ω — двойственная переменная к временной координате, $\mathbf{k}$ — двойственная переменная к пространственным координатам (волновой вектор).

Пространственно-временные спектры для s_{ij}, g_i получаются из (4) и имеют вид (9). Обозначения для спектров с аргументами в виде нижних индексов $_{\omega k}$ соответствуют обозначениям 88, 89 глав [2]:

$$\begin{aligned} &\left\langle g_i g_j \right\rangle_{\omega k} = \frac{2\theta^2\chi}{\tilde{k}}\delta_{ij}, \\ &\left\langle s_{ij} g_l \right\rangle_{\omega k} = 0, \\ &\left\langle s_{ij} s_{lm} \right\rangle_{\omega k} = 2\theta\mu(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{lm}). \end{aligned} \tag{9}$$

В работе Барабаненкова и Пасечника [13] детально рассмотрен вопрос о генерации звука тензором местных спонтанных напряжений s_{pl}, фигурирующем в правой части уравнений (7), (8). В соответствии с теоремой Гельмгольца [14], любое векторное поле можно разложить на соленоидальную и потенциальную части, в частности:

$$\frac{\partial s_{pl}}{\partial x_l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} + \mathrm{rot}_p(A) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} + \varepsilon_{prl}\frac{\partial}{\partial x_r}A_l,$$

где φ — скалярный потенциал, A — векторный потенциал, ε_{prl} — символ Леви–Чивиты.

При этом соленоидальная часть $\mathrm{rot}(A)$ в линейном приближении не возмущает поле давления p (компонента $\mathrm{rot}(A)$ ответственна за генерацию возмущений завихренности). Таким образом, для исследования свойств тепловых флуктуаций давления в (7), (8) можно оставить только потенциальную часть $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_p}$. Пространственно-временной спектр для потенциальной части φ местных спонтанных напряжений имеет вид:

$$\left\langle |\varphi|^2 \right\rangle_{\omega k} = \frac{8}{3}\theta\mu,$$

где $|\cdot|$ — модуль комплексного числа.

Тогда из (8) и (9) получается выражение для спектра равновесных тепловых флуктуаций поля давления (детали вывода помещены в приложение):

$$\left\langle |\hat{p}|^2 \right\rangle_{\omega k} = \frac{\dfrac{8}{3}\theta\mu k^4 + \dfrac{\omega^2 k^2(\gamma-1)^2}{c_0^4}\dfrac{\omega^2 + \dfrac{16}{9}\nu^2 k^4}{\omega^2 + \dfrac{1}{\mathrm{Pr}^2}\nu^2 k^4}\dfrac{2\theta^2\chi}{\tilde{k}}}{\left|\dfrac{-i\omega\rho_0 + \mu\dfrac{4}{3}k^2}{\dfrac{\gamma-1}{\omega + i\nu\dfrac{\gamma}{\mathrm{Pr}}k^2} + \dfrac{1}{\omega}}\dfrac{1}{p_0} + i\,k^2\right|^2}, \tag{10}$$

где $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ — скорость звука в невозмущенном газе, $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ — кинематический коэффициент вязкости.

Выражение (10) справедливо при рассмотрении не слишком больших частот ($\omega\tau_0 \ll 1$) и не слишком больших волновых чисел ($kl_0 \ll 1$). Стоит также отметить, что выражение (10) не зависит от размерности d пространства $\mathbb{R}^d$.

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ РАВНОВЕСНЫХ ТЕПЛОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА В БЕЗГРАНИЧНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Вычисление корреляционной функции тепловых пульсаций давления совершенного газа для безграничного пространства сводится к преобразованию Фурье выражения (10) по пространству и времени. Тем не менее, непосредственное вычисление преобразования Фурье в таком виде затруднительно. Поэтому воспользуемся условием малости коэффициентов вязкости и теплопроводности (которые, в случае газа, пропорциональны друг другу, коэффициентом пропорциональности служит число Прандтля Pr). При малых ν знаменатель в (10) имеет выраженный минимум при $\omega \approx \pm c_0 k$.

Если в числителе (10) оставить главный член разложения по малости $\frac{\nu k^2}{\omega}$, а в знаменателе оставить главный член и еще следующий, имеющий порядок $\overline{O}((\frac{\nu k^2}{\omega})^2)$, то в результате получится выражение (11). Осуществление разложения знаменателя до большего порядка малости обусловлено тем, что при вычислении интегралов от выражения (10), вблизи минимума знаменателя, основной вклад будет определяться именно вторым членом разложения. В то же время, основной член разложения числителя является существенно ненулевым и учет следующих слагаемых асимптотически не влияет на результат вычисления интегралов.

$$\left\langle \left|\hat{p}\right|^2 \right\rangle_{\omega k} = \frac{\frac{8}{3}\rho_0 c_0^4 \theta \nu k^4 + 2(\gamma-1)^2 \frac{\chi\theta^2}{\tilde{k}} k^2\omega^2}{(\omega^2 - c_0^2 k^2)^2 + \nu^2(\frac{4}{3} + \frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})^2 k^4 \omega^2}. \quad (11)$$

С точностью до $\overline{O}((\frac{\nu k^2}{\omega})^2)$ включительно, выражение (11) можно представить в виде:

$$\left\langle \left|\hat{p}\right|^2 \right\rangle_{\omega k} = \theta\nu(\frac{2}{3}\rho_0 c_0^2 k^2 + \frac{1}{2}\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}}\rho_0\omega^2) \times \\ \times (\frac{1}{(\omega - c_0 k)^2 + (c_0\delta)^2} + \frac{1}{(\omega + c_0 k)^2 + (c_0\delta)^2}), \quad (12)$$

где $\delta = \frac{\nu k^2}{2c_0}(\frac{4}{3} + \frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})$.

Как уже отмечалось, асимптотически при малых δ основной вклад при интегрировании выражения (12) определяется областью вблизи нуля $\omega \approx \pm c_0 k$, соответственно при интегрировании по ω в числителе (12) можно заменить ω на $c_0 k$. Тогда получим:

$$\left\langle \left|\hat{p}\right|^2 \right\rangle_{\omega k} = \theta\rho_0 c_0^3 \delta(\frac{1}{(\omega - c_0 k)^2 + (c_0\delta)^2} + \\ + \frac{1}{(\omega + c_0 k)^2 + (c_0\delta)^2}). \quad (13)$$

Формула (13) получена в [2], где предположение о малости $\frac{\nu k^2}{\omega}$ применялось сразу после линеаризации в процессе вывода. Здесь выражение (13) получено линеаризацией финального общего выражения (10) для вязкого теплопроводного совершенного газа.

Формула (13) в отличие от (10) позволяет сравнительно просто проводить интегрирование по ω. Так, вычислим временную корреляционную функцию пространственного спектра тепловых флуктуаций давления:

$$\left\langle \hat{p}_k(t)\hat{p}_k^*(t+\tau) \right\rangle = \theta\rho_0 c_0^3 \delta \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{(\omega - c_0 k)^2 + (c_0\delta)^2} \\ + \frac{1}{(\omega + c_0 k)^2 + (c_0\delta)^2}) e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi} = \\ = \theta\rho_0 c_0^2 \cos(c_0 k\tau) e^{-c_0\delta|\tau|}. \quad (14)$$

Теперь, используя (14), вычислим пространственно-временную корреляционную функцию тепловых флуктуаций давления в $\mathbb{R}^3$:

$$\left\langle p(\mathbf{r}_1,t)p(\mathbf{r}_1+\mathbf{r},t+\tau) \right\rangle = \theta\rho_0 c_0^2 \iiint \cos(c_0 k\tau) e^{-\frac{1}{2}\nu k^2 \tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})} e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{r})} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \\ = \theta\rho_0 c_0^2 \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\nu^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{|\tau|^{\frac{3}{2}} r} ((r + c_0\tau) e^{-\frac{(r+c_0\tau)^2}{2\nu|\tau|(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}} + (r - c_0\tau) e^{-\frac{(r-c_0\tau)^2}{2\nu|\tau|(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}). \quad (15)$$

Для двумерного пространства $\mathbb{R}^2$ получим:

$$\left\langle p(\mathbf{r}_1,t)p(\mathbf{r}_1+\mathbf{r},t+\tau)\right\rangle = \theta\rho_0 c_0^2 \iint \cos(c_0 k\tau) e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})} e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{r})}\frac{d^2k}{(2\pi)^2} =$$

$$= \theta\rho_0 c_0^2 \frac{1}{4\pi\sqrt{\pi k r}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}} \left[\frac{1 - D_+\left(\frac{r+c_0\tau}{\sqrt{2\nu\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}\right) - D_+\left(\frac{r-c_0\tau}{\sqrt{2\nu\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\pi}}{2\nu|\tau|(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})} \left((r+c_0\tau) e^{-\frac{(r+c_0\tau)^2}{2\nu|\tau|(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}} + (r-c_0\tau) e^{-\frac{(r-c_0\tau)^2}{2\nu|\tau|(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}} \right) \right], \tag{16}$$

где $D_+(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}\,\mathrm{erfi}(x)$ — функция Доусона, $\mathrm{erfi}(x) = -i\,\mathrm{erf}(ix)$, $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ — функция ошибок.

Для одномерного пространства $\mathbb{R}^1$ получается:

$$\left\langle p(x_1,t)p(x_1+x,t+\tau)\right\rangle =$$

$$= \theta\rho_0 c_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(c_0 k\tau) e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})} e^{-ikx}\frac{dk}{2\pi} =$$

$$= \theta\rho_0 c_0^2 \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{(x+c_0\tau)^2}{2\nu\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}} + e^{-\frac{(x-c_0\tau)^2}{2\nu\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}. \tag{17}$$

Детали вывода выражений (15)–(17) приведены в приложении.

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ РАВНОВЕСНЫХ ТЕПЛОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ ВЯЗКОГО ИЗОЭНТРОПИЙНОГО СОВЕРШЕННОГО ГАЗА, ЗАПОЛНЯЮЩЕГО ОГРАНИЧЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Полученные в предыдущем разделе результаты для вязкого и теплопроводного совершенного газа затруднительно перенести для случая, когда газ заполняет ограниченное пространство. Поэтому в данном разделе будет предполагаться, что газ является вязким, но изоэнтропийным. В действительности, в виду малости тепловых флуктуаций и рассмотрения линейной теории, такое допущение предполагает только то, что коэффициент теплопроводности $\chi = 0$ равен нулю (так как вязкая диссипация $2\mu(S_{ij}S_{ij} - \frac{1}{3}(\mathrm{div}(\mathbf{v}))^2)$, переводящая кинетическую энергию макроскопического движения газа в тепловую, является квадратичной по скорости величиной и обнуляется в рамках линейной теории). В формулах (12)–(17) устремление $\mathrm{Pr} \to \infty$ соответствует переходу к изоэнтропийному вязкому газу; как видно, такой переход не изменяет качественно корреляционные характеристики равновесных тепловых флуктуаций давления, а только меняет значение входящей в данные выражения константы $\frac{4}{3} + \frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}}$ на $\frac{4}{3}$.

Для вязкого изоэнтропийного совершенного газа из (7) с учетом $\mathrm{Pr} \to \infty$ и $g = 0$, оставляя только потенциальную часть местных спонтанных напряжений φ, ответственную за возмущения давления, получаем уравнение для поля давления:

$$\frac{1}{c_0^2}p_{tt} = \Delta p + \frac{4}{3}\frac{\nu}{c_0^2}\Delta p_t - \triangle\varphi, \tag{18}$$

где корреляционная функция для φ имеет вид [13]:

$$\left\langle \varphi(\mathbf{r}_1,t_1)\varphi(\mathbf{r}_2,t_2)\right\rangle = \frac{8}{3}\rho_0\theta\nu\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\delta(t_2-t_1). \tag{19}$$

Способ нахождения корреляционной функции равновесных тепловых флуктуаций давления газа, заполняющего ограниченное пространство, основан на том, что пространственные производные в выражении (18) входят только в форме оператора Лапласа, таким образом, уместно воспользоваться пространственным разложением по собственным функциям оператора Лапласа.

Собственные функции оператора Лапласа являются решением дифференциального уравнения с

краевым условием (в данном случае, рассмотрено краевое условие абсолютно твердой границы):

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\partial M} = 0, \tag{20}$$

где M — область, заполненная газом; ∂M — граница области.

Удобство использования в качестве базиса $\{\psi_\alpha\}$ решения собственной задачи (20), помимо сказанного выше, выражается также в том, что собственные функции оператора Лапласа ортогональны между собой, это обстоятельство позволяет легко находить коэффициенты разложения.

Представим поля давления p и потенциальной части местных спонтанных напряжений φ в виде пространственного разложения по базису $\{\psi_\alpha\}$:

$$p(\mathbf{r}_1,t) = \sum_\alpha a_\alpha(t)\psi_\alpha(\mathbf{r}_1), \qquad \varphi(\mathbf{r}_1,t) = \sum_\alpha b_\alpha(t)\psi_\alpha(\mathbf{r}_1), \tag{21}$$

где $a_\alpha(t), b_\alpha(t)$ — коэффициенты пространственного разложения, α — индекс суммирования.

Подстановка (21) в (18) с учетом (20) приводит к покомпонентной системе уравнений (22) для каждого α:

$$\left(\frac{1}{k_\alpha c_0}\right)^2 \frac{d^2 a_\alpha}{dt^2} + \frac{4}{3}\frac{\nu}{c_0^2}\frac{da_\alpha}{dt} + a_\alpha = b_\alpha, \tag{22}$$

где k_α определяется для каждого ψ_α из соотношения $\Delta\psi_\alpha = -k_\alpha^2\psi_\alpha$.

Применяя к (22) преобразование Фурье по времени, получаем выражение для $\hat{a}_\alpha$ через $\hat{b}_\alpha$:

$$\hat{a}_\alpha = \frac{\hat{b}_\alpha}{\left(-\left(\frac{\omega}{k_\alpha c_0}\right)^2 - i\omega\frac{4}{3}\frac{\nu}{c_0^2} + 1\right)}. \tag{23}$$

Отсюда следует выражение для спектра коэффициентов $\hat{a}_\alpha$ и $\hat{b}_\alpha$:

$$\left\langle \hat{a}_\alpha \hat{a}_\beta^* \right\rangle = \frac{\left\langle \hat{b}_\alpha \hat{b}_\beta^* \right\rangle}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{k_\alpha c_0}\right)^2\right)^2 + \frac{16}{9}\left(\frac{\omega\nu}{c_0^2}\right)^2}. \tag{24}$$

Из соотношений (19) и (21) следует выражение для корреляционной функции и спектра коэффициентов b_α. Подставим разложение φ из (21) в (19):

$$\sum_{\alpha',\beta'} \left\langle b_{\alpha'}(t_1) b_{\beta'}(t_2) \right\rangle \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}_1)\,\psi_{\beta'}(\mathbf{r}_2) = \frac{8}{3}\rho_0\theta\nu\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\delta(t_2 - t_1). \tag{25}$$

Теперь умножим (25) на $\psi_\alpha(\mathbf{r}_1)$ и проинтегрируем по объему V_1, а затем умножим на $\psi_\beta(\mathbf{r}_2)$ и проинтегрируем по объему V_2, при этом будем учитывать, что собственные функции ортогональны между собой $\int_M \psi_\alpha(\mathbf{r})\psi_\beta(\mathbf{r})dV = \|\psi_\alpha\|^2\delta_{\alpha\beta}$:

$$\left\langle b_\alpha(t_1) b_\beta(t_2) \right\rangle = \frac{8}{3}\frac{\rho_0\theta\nu}{\|\psi_\alpha\|^2}\delta_{\alpha\beta}\delta(t_2 - t_1), \qquad \left\langle \hat{b}_\alpha \hat{b}_\beta^* \right\rangle = \frac{8}{3}\frac{\rho_0\theta\nu}{\|\psi_\alpha\|^2}\delta_{\alpha\beta}, \tag{26}$$

где $\|\psi_\alpha\|$ — норма функции $\psi_\alpha(\mathbf{r})$.

Подстановка (26) в (24) приводит к выражению:

$$\left\langle \hat{a}_\alpha \hat{a}_\beta^* \right\rangle = \frac{4\theta\rho_0 k_\alpha^2 c_0^5 \delta \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\|\psi_\alpha\|^2}}{(k_\alpha^2 c_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\omega c_0\delta)^2}, \tag{27}$$

где $\delta = \frac{2}{3}\frac{\nu k_\alpha^2}{c_0}$.

Выражение для корреляционной функции коэффициентов a_α следует из (27):

$$\left\langle a_\alpha(t) a_\alpha(t+\tau) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\theta\rho_0 k_\alpha^2 c_0^5 \delta \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\|\psi_\alpha\|^2}}{(k_\alpha^2 c_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\omega c_0\delta)^2} e^{i\omega\tau}\frac{d\omega}{2\pi} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\|\psi_\alpha\|^2}\theta\rho_0 c_0^2 \cos(c_0 k_\alpha \tau) e^{-c_0\delta|\tau|}. \tag{28}$$

Из (28) получается выражение для корреляционной функции тепловых флуктуаций поля давления p:

$$\left\langle p(\mathbf{r}_1,t_1) p(\mathbf{r}_2,t_2) \right\rangle = \theta\rho_0 c_0^2 \sum_\alpha \frac{1}{\|\psi_\alpha\|^2}\psi_\alpha(\mathbf{r}_1)\psi_\alpha(\mathbf{r}_2)\cos(c_0 k_\alpha \tau) e^{-\frac{2}{3}\nu k_\alpha^2|\tau|}, \tag{29}$$

где $\tau = t_2 - t_1$.

Выражение (29) позволяет выразить корреляционную функцию равновесных тепловых флуктуаций давления вязкого изоэнтропийного совершенного газа в случае произвольной ограниченной области пространства $\mathbb{R}^d$.

Для наглядности полученного результата, рассмотрим одномерный пример, где газ заполняет трубу малого сечения. В этом случае задачу можно рассматривать как одномерную, где пространство, заполненное газом, есть отрезок $[0,l]$. Графическое представление отрезка с однородными

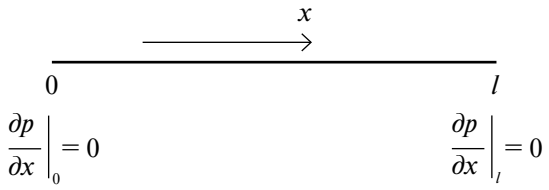

Рис. 1. Отрезок длины l с граничными условиями обнуления нормальной производной поля давления.

граничными условиями твердой стенки изображено на рис. 1.

Система собственных функций $\{\psi_m\}$ и значений $\{k_m\}$ (20) для отрезка $[0,l]$, а также нормы собственных функций $\{\|\psi_m\|\}$ имеют вид:

$$\{\psi_m\} = \left\{\cos(\frac{\pi m}{l}x)\right\},$$
$$\left\{k_m = \frac{\pi m}{l}\right\}, \tag{30}$$
$$\{\|\psi_m\|\} = \left\{\begin{matrix}\frac{l}{2},\ m \ge 1\\ l,\ m = 0\end{matrix}\right\}.$$

Выражение (29) примет вид:

$$\begin{aligned}\langle p(x_1,t_1)p(x_2,t_2)\rangle &= \frac{2}{l}\theta\rho_0 c_0^2\sum_{m=1}^{+\infty}\cos(c_0k_m\tau)\cos(k_mx_1)\cos(k_mx_2)e^{-\frac{2}{3}\nu k_m^2|\tau|} = \\ &= \frac{1}{2l}\theta\rho_0c_0^2\left(\sum_{m=1}^{+\infty}\cos(k_m(x_1+x_2+c_0\tau))e^{-\frac{2}{3}\nu k_m^2|\tau|} + \sum_{m=1}^{+\infty}\cos(k_m(x_1+x_2-c_0\tau))e^{-\frac{2}{3}\nu k_m^2|\tau|} + \right. \\ &\left. + \sum_{m=1}^{+\infty}\cos(k_m(x_1-x_2+c_0\tau))e^{-\frac{2}{3}\nu k_m^2|\tau|} + \sum_{m=1}^{+\infty}\cos(k_m(x_1-x_2-c_0\tau))e^{-\frac{2}{3}\nu k_m^2|\tau|}\right).\end{aligned} \tag{31}$$

Суммы в (31) можно перезаписать, используя Тета-функцию Якоби [15]:

$$\begin{aligned}\theta(z,\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i n^2\tau + 2\pi i n z} = \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{\pi i\tau})^{n^2}\cos(2\pi n z),\end{aligned} \tag{32}$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\cos(\alpha m)e^{-\beta m^2} = \frac{1}{2}\theta(\frac{\alpha}{2\pi},\frac{i\beta}{\pi}) - \frac{1}{2}.$$

График функции $\theta(\frac{\alpha}{2\pi},\frac{i\beta}{\pi})$ приведен на рис. 2.

Выражая суммы в (31) через Тета-функцию Якоби, получим:

$$\begin{aligned}&\langle p(x_1,t_1)p(x_2,t_2)\rangle = \\ &= \frac{1}{4l}\theta\rho_0c_0^2\left(\theta(\frac{x_1+x_2+c_0|\tau|}{2l},\frac{i2\nu\pi|\tau|}{3l^2}) + \right. \\ &+\theta(\frac{x_1+x_2-c_0|\tau|}{2l},\frac{i2\nu\pi|\tau|}{3l^2}) + \\ &+\theta(\frac{x_1-x_2+c_0|\tau|}{2l},\frac{i2\nu\pi|\tau|}{3l^2}) + \\ &\left.\theta(\frac{x_1-x_2-c_0|\tau|}{2l},\frac{i2\nu\pi|\tau|}{3l^2}) - 4\right).\end{aligned} \tag{33}$$

Для наглядного представления корреляционной функции тепловых флуктуаций давления (33) на рис. 3 представлены графики корреляционной функции для различных значений τ, где по оси абсцисс отложено значение x_2 при фиксированном значении $x_1 = 0.5$, длина отрезка $l = \pi$. При построении графиков значения параметров θ, ρ_0, c_0, ν были выбраны так, чтобы более наглядно продемонстрировать особенности корреляционной функции тепловых флуктуаций давления. При $\tau \to 0$ корреляционная функция является дельта-образной, далее дельта-образный пик расходится в виде двух волн, двигающихся в противоположенные стороны со скоростью звука. В процессе движения дельта-образные волны периодически отражаются от стенок, набегают друг на друга, и расширяются за счет

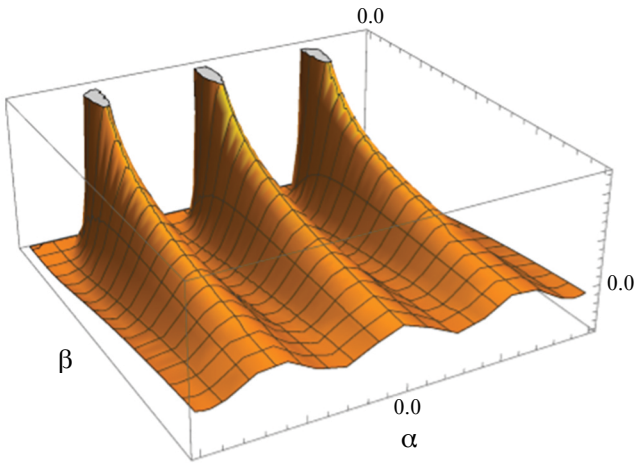

Рис. 2. График Тета-функции Якоби $\theta(\frac{\alpha}{2\pi},\frac{i\beta}{\pi})$.

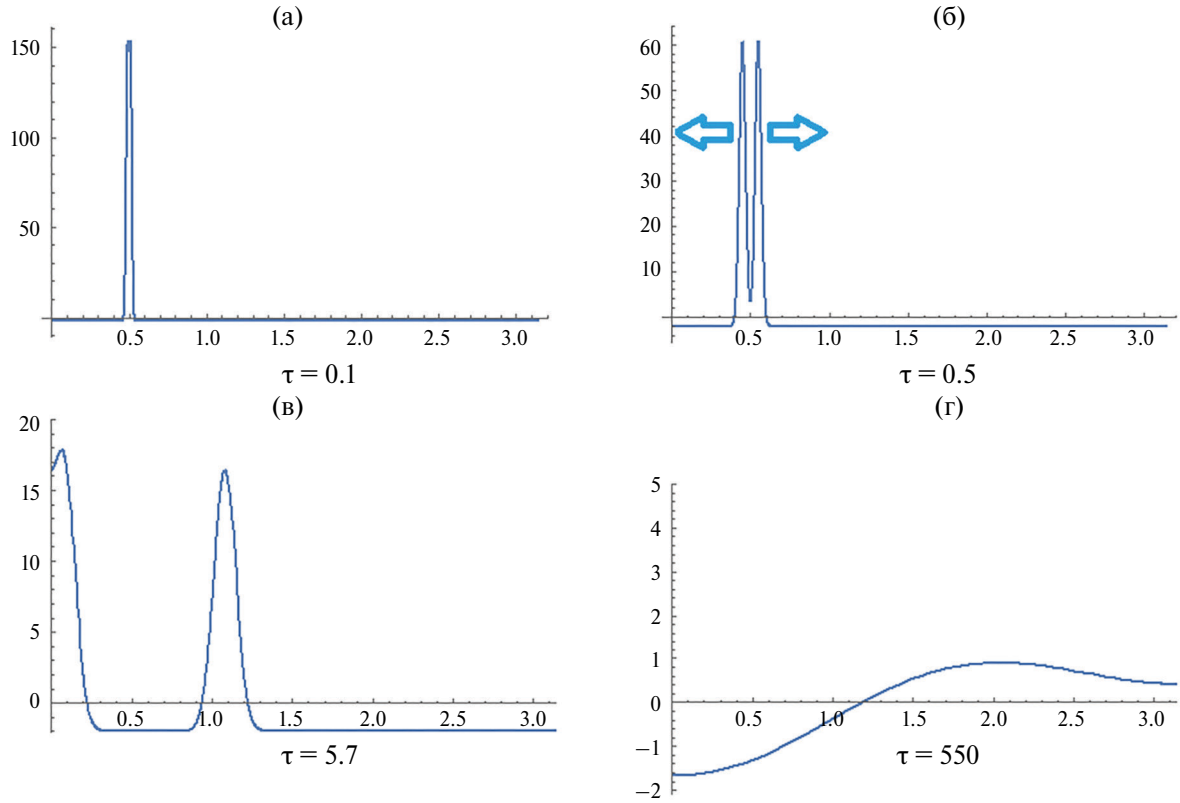

Рис. 3. График корреляционной функции равновесных тепловых флуктуаций поля давления совершенного газа, заполняющего отрезок длины π, в зависимости от x_2 при фиксированном $x_1 = 0.5$, для различных значений τ.

вязкости. В конечном счете, при очень больших τ, когда пространственный масштаб вязкой диффузии достигает длины отрезка, корреляционная функция становится похожа на стоячую половинную волну. В конечном итоге при $\tau \to \infty$ в силу действия вязкости корреляционная функция обращается в ноль.

Рассмотрим случай газа, заполняющего трубу малого сечения, замкнутую в окружность радиуса R, соответственно длины $l = 2\pi R$. Координата $\{x\}$ соответствует длине дуги окружности, отсчитываемой от некоторой отмеченной точки (рис. 4).

Система собственных функций $\{\psi_m\}$ и значений $\{k_m\}$ (20) для окружности, а также нормы собственных функций $\{\|\psi_m\|\}$ имеют вид:

$$\{\psi_m\} = \begin{Bmatrix} \sin(m\frac{x}{R}),\ m \ge 1 \\ \cos(m\frac{x}{R}),\ m \ge 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin(\frac{2\pi m}{l}x),\ m \ge 1 \\ \cos(\frac{2\pi m}{l}x),\ m \ge 0 \end{Bmatrix},$$
$$\left\{k_m = \frac{m}{R} = \frac{2\pi m}{l}\right\}, \tag{34}$$
$$\{\|\psi_m\|\} = \begin{Bmatrix} \frac{l}{2},\ m \ge 1 \\ l,\ m = 0 \end{Bmatrix}.$$

Выражение (29) примет вид:

$$\begin{aligned}\langle p(x_1,t_1)p(x_2,t_2)\rangle &= \frac{2}{l}\theta\rho_0 c_0^2 \sum_{m=1}^{+\infty}\cos(c_0 k_m\tau)(\cos(k_m x_1)\cos(k_m x_2) + \sin(k_m x_1)\sin(k_m x_2))e^{-\frac{2}{3}\nu k_m^2|\tau|} = \\ &= \frac{1}{l}\theta\rho_0 c_0^2\left(\sum_{m=1}^{+\infty}\cos(k_m(x + c_0\tau))e^{-\frac{2}{3}\nu k_m^2|\tau|} + \sum_{m=1}^{+\infty}\cos(k_m(x - c_0\tau))e^{-\frac{2}{3}\nu k_m^2|\tau|}\right) = \\ &= \frac{1}{2l}\theta\rho_0 c_0^2\left(\theta\left(\frac{x + c_0\tau}{l}, \frac{i8\nu\pi|\tau|}{3l^2}\right) + \theta\left(\frac{x - c_0\tau}{l}, \frac{i8\nu\pi|\tau|}{3l^2}\right) - 2\right),\end{aligned} \tag{35}$$

где $x = x_2 - x_1$.

Графики корреляционной функции тепловых флуктуаций давлений газа, заполняющего окружность единичного радиуса $R = 1$ для различных значений τ, где по оси абсцисс отложено значение x, приведены на рис. 5. Стоит отметить,

что в силу замкнутости окружности, координаты $x = \pi$ и $x = -\pi$ соответствуют одной и той же точки окружности.

Случай окружности качественно отличается от отрезка тем, что отсутствуют стенки, на которых происходит отражение. Волны, достигшие противоположенной точки окружности, проходят друг друга насквозь, и период начинается заново. При больших значениях τ, когда пространственный масштаб вязкой диффузии достигает длины окружности, корреляционная функция принимает вид стоячей волны. В конечном итоге при $\tau \to \infty$ в силу действия вязкости корреляционная функция обращается в ноль.

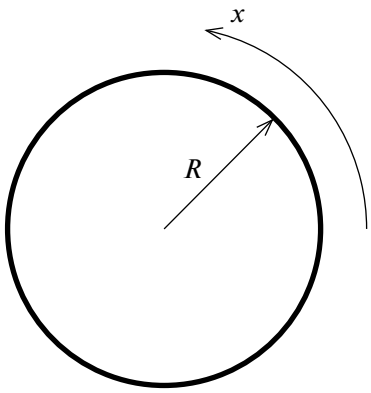

Рис. 4. Окружность радиуса R.

Полученные результаты для равновесных тепловых флуктуаций совершенного газа, заполняющего отрезок и окружность, свидетельствуют о том, что наличие границы у области, заполненной газом, приводит к существенному отличию корреляционной функции тепловых флуктуаций давления от случая безграничного пространства. Так, при малых временных сдвигах τ корреляционная функция по пространству не отличается от случая безграничного пространства. Но, когда τ становится равным времени распространения звуковой волны от рассматриваемых точек пространства x_1, x_2 до границы области, эффекты отражения звуковых волн от границы проявляются на корреляционных характеристиках. Так, корреляции отраженных от

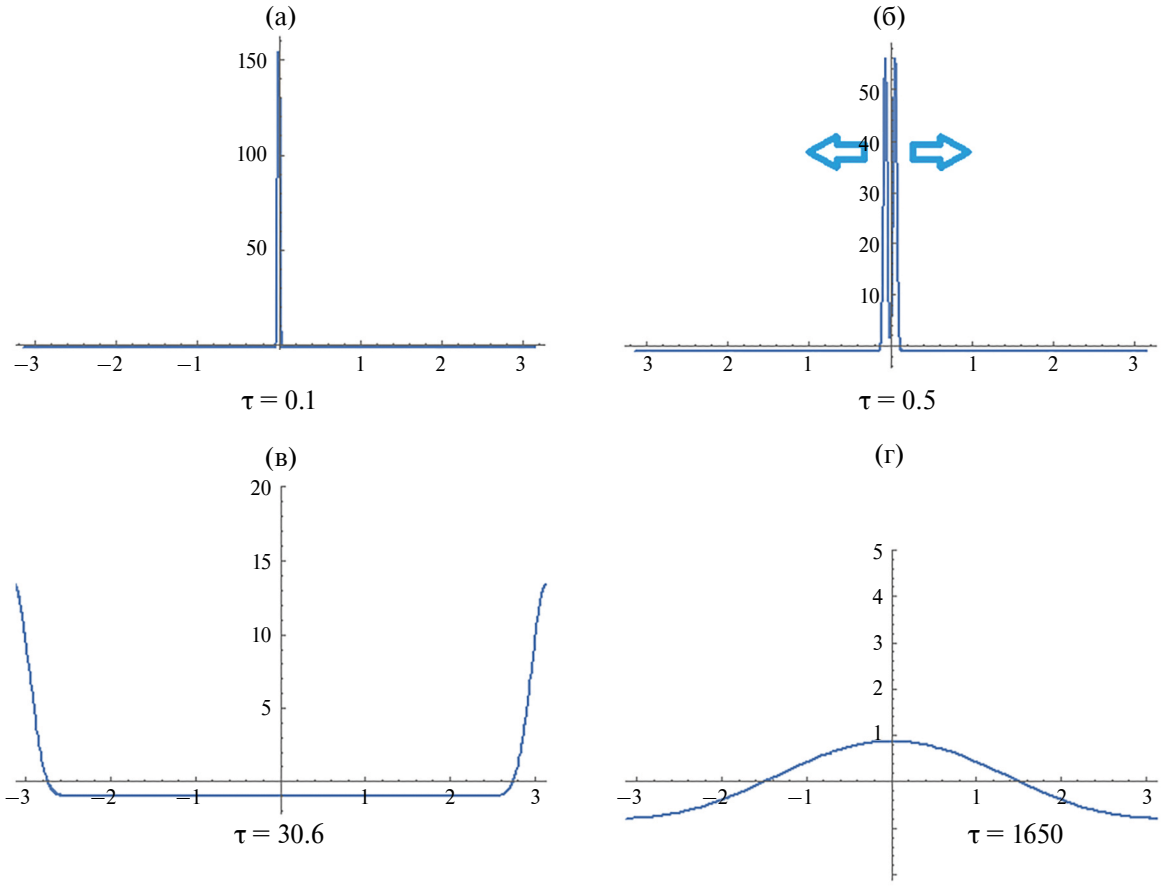

Рис. 5. График корреляционной функции равновесных тепловых флуктуаций поля давления совершенного газа, заполняющего окружность единичной длины, в зависимости от x, для различных значений τ.

границы волн являются физическим фактором, принципиально изменяющим вид корреляционной функции равновесных тепловых флуктуаций поля давления в случае газа, заполняющего ограниченное пространство.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача нахождения пространственно-временных характеристик термоакустического шума, генерируемого тепловыми флуктуациями газа, находящегося вблизи термодинамического равновесия. Для случая вязкого теплопроводного совершенного газа, заполняющего безграничное пространство, найден пространственно-временной спектр равновесных тепловых флуктуаций поля давления без предположения малости эффектов теплопроводности. В одномерном, двумерном и трехмерном случае получено явное выражение для пространственно-временной корреляционной функции равновесных тепловых флуктуаций поля давления.

Для вязкого изоэнтропийного совершенного газа, заполняющего ограниченное пространство, получена пространственно-временная корреляционная функция равновесных тепловых флуктуаций поля давления в виде ряда по собственным функциям оператора Лапласа.

С помощью полученного разложения непосредственно вычислены корреляционные функции равновесных тепловых флуктуаций давления газа, заполняющего трубу малого сечения, с граничными условиями твердой стенки на концах и периодическими условиями, для случая трубы, замкнутой в окружность. Показано, что наличие границы приводит к существенному качественному отличию корреляционной функции тепловых флуктуаций давления от случая безграничного пространства. Корреляционные характеристики тепловых флуктуаций поля давления изменяются за счет дополнительного вклада коррелированных отраженных от границы звуковых волн. Можно сделать вывод, что для минимизации влияния тепловых помех при измерениях следует выбирать области расположения микрофонов в пространстве без границ или с границами, на которых происходит существенное поглощение падающих акустических волн.

Авторы выражают благодарность коллективу теоротдела ФИАН К.П. Зыбину, А.С. Ильину, В.А. Сироте, А.В. Копьеву, сделавшим полезные замечания на научном семинаре по данной работе, что положительно отразилось на материале данной статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 23-41-00023).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1) Вывод выражения (10) для спектра равновесных тепловых флуктуаций поля давления вязкого теплопроводного совершенного газа в безграничном пространстве.

Умножим первое уравнение в (8) тензорно на k_p со сверткой по индексу p:

$$(-i\omega\rho_0 + \mu\frac{4}{3}k^2)k_l\hat{v}_l + i\,k^2\hat{p} = i\,k_p k_l\hat{s}_{pl}. \quad (36)$$

Из второго, третьего и четвертого уравнения в (8) свертка $k_l\hat{v}_l$ выражается через $\hat{p}$ и $k_l\hat{g}_l$:

$$\left\{\begin{aligned} &-i\omega\rho_0\hat{v}_p = -i\,k_p\hat{p} - \mu k^2\hat{v}_p - \frac{1}{3}\mu k_p k_l\hat{v}_l + ik_l\hat{s}_{pl},\\ &-i\omega\hat{\rho} + \rho_0 i\,k_l\hat{v}_l = 0,\\ &-i\omega\hat{T} + T_0(\gamma-1)i\,k_l\hat{v}_l = -\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\nu k^2\hat{T} - \frac{(\gamma-1)T_0}{p_0}ik_l\hat{g}_l,\\ &\hat{p} = \frac{R}{\mu_{mol}}(\rho_0\hat{T} + T_0\hat{\rho}),\end{aligned}\right\} \Rightarrow k_l\hat{v}_l = \frac{1}{\dfrac{\gamma-1}{\omega + i\nu\dfrac{\gamma}{\mathrm{Pr}}k^2} + \dfrac{1}{\omega}}\frac{\hat{p}}{p_0} - \frac{(\gamma-1)\omega}{p_0}\frac{k_l\hat{g}_l}{(\gamma-1)\omega + (\omega + i\nu\dfrac{\gamma}{\mathrm{Pr}}k^2)}. \quad (37)$$

Подставляя (37) в (36), получаем связь между $\hat{p}$ и $k_p k_l\hat{s}_{pl}$, $k_l\hat{g}_l$:

$$\left(\frac{-i\omega\rho_0 + \mu\dfrac{4}{3}k^2}{\dfrac{\gamma-1}{\omega + i\nu\dfrac{\gamma}{\mathrm{Pr}}k^2} + \dfrac{1}{\omega}}\frac{1}{p_0} + i\,k^2\right)\hat{p} = i\,k_p k_l\hat{s}_{pl} + \frac{(\gamma-1)\omega}{c_0^2}\frac{(-i\omega + \nu\dfrac{4}{3}k^2)k_l g_l}{\omega + i\dfrac{1}{\mathrm{Pr}}\nu k^2}. \quad (38)$$

Выражая из (38) $\hat{p}$, умножая на сопряженное $\hat{p}^*$ и усредняя, получим выражение:

$$\left\langle \left|\hat{p}\right|^2 \right\rangle_{\omega k} = \frac{k_p k_l k_r k_t \left\langle \hat{s}_{pl}\hat{s}^*_{rt}\right\rangle_{\omega k} + \frac{\omega^2(\gamma-1)^2}{c_0^4}\frac{\omega^2+\frac{16}{9}\nu^2k^4}{\omega^2+\frac{1}{\mathrm{Pr}^2}\nu^2k^4}k_p k_l\left\langle \hat{g}_p\hat{g}^*_l\right\rangle_{\omega k} + 2\,\mathrm{Re}(ik_rk_t\frac{(\gamma-1)\omega}{c_0^2}\frac{i\omega+\nu\frac{4}{3}k^2}{\omega-i\frac{1}{\mathrm{Pr}}\nu k^2}k_l\left\langle \hat{s}_{rt}\,\hat{g}^*_l\right\rangle_{\omega k})}{\left|\dfrac{-i\omega\rho_0+\mu\frac{4}{3}k^2}{\dfrac{\gamma-1}{\omega+i\nu\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}k^2}+\frac{1}{\omega}}\frac{1}{p_0}+i\,\mathrm{k}^2\right|^2}. \quad (39)$$

Подставляя соотношения (9) в (39), приходим к искомой формуле (10).

2) Вывод формулы (15):

$$\overline{p(\mathbf{r}_1,t)p(\mathbf{r}_1+\mathbf{r},t+\tau)} = \theta\rho_0c_0^2\iiint\cos(c_0k\tau)e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{r})}\frac{d^3k}{(2\pi)^3} =$$

$$= \theta\rho_0c_0^2\int\limits_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{\zeta=0}^{\pi}\cos(c_0k\tau)e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}e^{-ikr\cos(\zeta)}\frac{k^2\sin(\zeta)}{(2\pi)^2}dkd\zeta =$$

$$= \theta\rho_0c_0^2\frac{1}{(2\pi)^2r}\int\limits_0^{+\infty}k(\sin(k(r+c_0\tau))+\sin(k(r-c_0\tau)))e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}dk =$$

$$= \theta\rho_0c_0^2\frac{-1}{(2\pi)^2r}\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_0^{+\infty}(\cos(k(r+c_0\tau))+\cos(k(r-c_0\tau)))e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}dk =$$

$$= \theta\rho_0c_0^2\frac{-1}{(2\pi)^2r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{e^{-\frac{(r+c_0\tau)^2}{2\nu|\tau|(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}+e^{-\frac{(r-c_0\tau)^2}{2\nu|\tau|(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}\right) =$$

$$= \theta\rho_0c_0^2\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\nu^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{|\tau|^{\frac{3}{2}}r}((r+c_0\tau)e^{-\frac{(r+c_0\tau)^2}{2\nu|\tau|(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}+(r-c_0\tau)e^{-\frac{(r-c_0\tau)^2}{2\nu|\tau|(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}).$$

3) Вывод формулы (16):

$$\overline{p(\mathbf{r}_1,t)p(\mathbf{r}_1+\mathbf{r},t+\tau)} = \theta\rho_0c_0^2\iint\cos(c_0k\tau)e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{r})}\frac{d^2k}{(2\pi)^2} =$$

$$= \theta\rho_0c_0^2\int\limits_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{\zeta=0}^{2\pi}\cos(c_0k\tau)e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}e^{-ikr\cos(\zeta)}\frac{kdkd\zeta}{(2\pi)^2} =$$

$$= \theta\rho_0c_0^2\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}kJ_0(kr)\cos(c_0k\tau)e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}dk \approx$$

(далее для функции Бесселя $J_0(kr)$ воспользуемся дальней асимптотикой)

$$\approx \theta\rho_0 c_0^2 \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi kr}} \int\limits_0^{+\infty} k\cos(kr - \frac{\pi}{4})\cos(c_0 k\tau) e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})} dk =$$

$$= \theta\rho_0 c_0^2 \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi kr}} \frac{\partial}{\partial r} \int\limits_0^{+\infty} \sin(kr - \frac{\pi}{4})\cos(c_0 k\tau) e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})} dk =$$

$$= \theta\rho_0 c_0^2 \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi kr}} \frac{\partial}{\partial r} \int\limits_0^{+\infty} (\sin(kr) - \cos(kr))\cos(c_0 k\tau) e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})} dk =$$

$$= \theta\rho_0 c_0^2 \frac{1}{4\pi\sqrt{\pi kr}} \frac{\partial}{\partial r} \int\limits_0^{+\infty} (\sin(k(r + c_0\tau)) + \sin(k(r - c_0\tau)) - \cos(k(r + c_0\tau)) - \cos(k(r - c_0\tau))) e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})} dk.$$

Интегралы вида $\int\limits_0^{+\infty} \sin(ax) e^{-bx^2} dx = \frac{D_+(\frac{a}{2\sqrt{b}})}{\sqrt{b}}$ выражаются через функцию Доусона $D_+(x)$, поэтому:

$$= \theta\rho_0 c_0^2 \frac{1}{4\pi\sqrt{\pi kr}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{D_+(\frac{r + c_0\tau}{\sqrt{2\nu\tau(\frac{4}{3} + \frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}) + D_+(\frac{r - c_0\tau}{\sqrt{2\nu\tau(\frac{4}{3} + \frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{(r+c_0\tau)^2}{2\nu|\tau|(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{(r-c_0\tau)^2}{2\nu|\tau|(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu\tau(\frac{4}{3} + \frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}} \right) =$$

$$= \theta\rho_0 c_0^2 \frac{1}{4\pi\sqrt{\pi kr}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu\tau(\frac{4}{3} + \frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}} \left[\frac{1 - D_+(\frac{r + c_0\tau}{\sqrt{2\nu\tau(\frac{4}{3} + \frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}) - D_+(\frac{r - c_0\tau}{\sqrt{2\nu\tau(\frac{4}{3} + \frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}})}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu\tau(\frac{4}{3} + \frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\pi}}{2\nu|\tau|(\frac{4}{3} + \frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})} \left((r + c_0\tau) e^{-\frac{(r+c_0\tau)^2}{2\nu|\tau|(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}} + (r - c_0\tau) e^{-\frac{(r-c_0\tau)^2}{2\nu|\tau|(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}} \right) \right].$$

4) Вывод формулы (17):

$$\overline{p(x_1,t)p(x_1 + x,t + \tau)} = \theta\rho_0 c_0^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(c_0 k\tau) e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})} e^{-ikx} \frac{dk}{2\pi} =$$

$$= \theta\rho_0 c_0^2 \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \cos(kx)\cos(c_0 k\tau) e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})} dk =$$

$$= \theta\rho_0 c_0^2 \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} (\cos(k(x + c_0\tau)) + \cos(k(x - c_0\tau))) e^{-\frac{1}{2}\nu k^2\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})} dk =$$

$$= \theta\rho_0 c_0^2 \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{(x+c_0\tau)^2}{2\nu\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}} + e^{-\frac{(x-c_0\tau)^2}{2\nu\tau(\frac{4}{3}+\frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu\tau(\frac{4}{3} + \frac{\gamma-1}{\mathrm{Pr}})}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния. М.: Наука, 1978. 448 с. (т. IX).
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 584 с. (т. V).
4. *Аносов А.А., Антонов М.А., Пасечник В.И.* Измерение корреляционных свойств теплового акустического излучения // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 1. С. 28–34.
5. *Аносов А.А., Пасечник В.И.* Корреляция сигналов теплового акустического излучения // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 2. С. 161–166.
6. *Пасечник В.И., Аносов А.А., Барабаненков Ю.Н., Сельский А.Г.* Измерение пространственно-временной корреляционной функции теплового акустического излучения // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 5. С. 683–686.
7. *Аносов А.А., Грановский Н.В., Беляев Р.В., Ерофеев А.В., Санин А.Г., Мансфельд А.Д.* Корреляционные измерения теплового акустического излучения решеткой датчиков // Акуст. журн. 2024. Т. 70. № 1. С. 21–28.
8. *Демьянов М.А.* Корреляционный метод идентификации акустических источников с помощью многомикрофонных измерений // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 6. С. 638–646.
9. *Kopiev V.* Azimuthal decomposition of turbulent jet noise and its role for diagnostic of noise sources // Advances in Aeroacoustics and Applications, VKI Lecture Series 2004-05, Ed. by Anthoine J. and Hirschberg A., 2004.
10. *Аносов А.А., Бограчев К.М., Пасечник В.И.* Измерение теплового акустического излучения из кисти руки человека // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 3. С. 299–306.
11. *Аносов А.А., Гаврилов Л.Р.* Восстановление распределения глубиной температуры биообъектов с помощью линейных фазированных решеток // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 4. С. 447–455.
12. *Аносов А.А., Беляев Р.В., Вилков В.А., Казанский А.С., Курятникова Н.А., Мансфельд А.Д.* Акустотермометрические данные о кровотоке и теплопродукции в предплечье при физической нагрузке // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 4. С. 539–544.
13. *Барабаненков Ю.Н., Пасечник В.И.* Исследование теплового акустического излучения в рамках модели гидродинамических флуктуаций // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 4. С. 542–547.
14. *Корн Г.А., Корн Т.М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974.
15. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

Correlation function of equilibrium thermal pressure fluctuations in viscous heat-conducting gas

M. A. Demyanov[a,*], V. F. Kopiev[a], M. A. Yudin[a]

[a]*Central Aerohydrodynamic Institute, Moscow Research Branch, Moscow, 105005 Russia*

**e-mail: demyanov@phystech.edu*

The problem of finding the space-time correlation function of pressure thermal fluctuations of gas near thermodynamic equilibrium is considered. Correlation function of pressure field equilibrium thermal fluctuations is obtained for viscous heat-conducting perfect gas filling an unbounded Euclidean space. The influence of the boundary on the correlation characteristics of thermal fluctuations of pressure is investigated using the example of a viscous isentropic perfect gas filling a small-section pipe with boundary conditions of a solid wall at the ends and periodic conditions for the case of a pipe closed in a circle.

Keywords: correlation functions of thermal fluctuations, thermodynamic equilibrium fluctuations