АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2025, том 71, № 3, с. 339–346

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.23

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ В ВОДОПОДОБНОМ ЦИЛИНДРЕ

© 2025 г. М. А. Миронов[a],*, П. А. Пятаков[a], О. А. Савицкий[a], С. А. Шуляпов[a]

[a]Акционерное общество "Акустический институт имени академика Н.Н. Андреева", ул. Шверника 4, Москва, 117292 Россия

**e-mail: mironov_ma@mail.ru*

Поступила в редакцию 12.04.2025 г.
После доработки 12.04.2025 г.
Принята к публикации 06.05.2025 г.

Представлены результаты аналитического исследования распространения осесимметричных волн в твердом волноводе круглого сечения, выполненном из водоподобной среды. Под водоподобной понимается среда, в которой скорость сдвиговых волн существенно меньше скорости продольных волн. Показано, что скорости распространения нормальных волн приблизительно равны скоростям распространения в жидком цилиндре. Этот результат радикально отличается от распространенного в литературе утверждения, что скорости распространения нормальных волн на высоких частотах приближаются к скорости рэлеевской волны на плоской границе. Вычислена поправка к водоподобному приближению, получены вклады продольной и сдвиговой компонент полей для нормальных волн. Приведена экспериментальная иллюстрация, подтверждающая полученные результаты.

Ключевые слова: водоподобная среда, круглый волновод, осесимметричные моды, скорость распространения

DOI: 10.31857/S0320791925030028, **EDN:** JTLWND

ВВЕДЕНИЕ

В теоретическом плане работы, посвященные распространению волн в стержнях кругового сечения, начинаются со статей Похгаммера и Кри [1–3]. С результатами современных исследований собственных осесимметричных волн можно познакомится в работах [4–11]. Работа [4] интересна тем, что в ней ищутся, и находятся, волны, распространяющиеся на высоких частотах с фазовой скоростью продольной волны в среде с коэффициентом Пуассона, равным 1/3. Эта скорость реализуется в узком частотном диапазоне, выше которого скорость распространения резко уменьшается. В [5] численно исследовано дисперсионное уравнение для круглого стержня специально для водоподобного материала (коэффициент Пуассона, близкий к 0.5). Утверждается, что все моды имеют скорость распространения, стремящуюся к скорости рэлеевской волны на высоких частотах. В фундаментальной работе [6] теоретически определены дисперсионные зависимости для нескольких первых осесимметричных волн в круговом цилиндре. Рассмотрено их поведение в некоторых особых точках. Получены соответствующие экспериментальные зависимости, с большой точностью совпадающие с теоретическими. Обнаружена возможность концевого резонанса при отражении волн от торца полубесконечного цилиндра. Все расчеты проведены для коэффициента Пуассона, равного 0.33. В подробном историческом обзоре [7] отмечены ключевые работы по волнам в твердом цилиндрическом волноводе. Обсуждаются свойства нормальных волн, в частности отмечается, что в высокочастотном приближении их скорости распространения стремятся к скорости рэлеевской поверхностной волны. Работа [8] посвящена волнам в цилиндре из материалов как с нормальным коэффициентом Пуассона (~0.33), так и равным 0.49. В обоих случаях получается в пределе больших частот стремление к рэлеевской скорости. Анализ дисперсионного уравнения волн в цилиндре дан в [9]. Получены аналитические выражения для поляризации волн. Обнаружено, что при фазовой скорости аксиально симметричной продольной моды, совпадающей со скоростью поперечной волны, происходит одновременное обращение в нуль всех компонент перемещений на боковой поверхности стержня. Существенно, что и в этой работе рассматриваемые эффекты относятся к волнам, распространяющимся

со скоростью порядка рэлеевской скорости. Подробный вывод дисперсионного уравнения задачи Похгаммера–Кри и соотношений между потенциальной и вихревой компонентами поля приведен в [10]. Отмечается результат предыдущих теоретических работ относительно коротковолнового предела скорости распространения мод, равной рэлеевской скорости, а в длинноволновом пределе — юнговской волны. В [11] продемонстрировано, что некоторые волны Похгаммера–Кри обладают рядом уникальных свойств: их относительная длина волны не зависит от упругих модулей, отношение максимального осевого растяжения на оси цилиндра к максимальному растяжению на поверхности имеет наибольшее значение и также не зависит от упругих модулей, материал стержня находится в состоянии чистого сдвига. При этом скорость распространения этих волн сравнима со скоростью сдвиговой волны. Стоит отметить, что в этой работе рассматривались среды в широком диапазоне изменений коэффициента Пуассона — от 0.1 и до 0.499. Однако и здесь утверждается, что коротковолновый (высокочастотный) предел скорости распространения волн стремится к скорости распространения рэлеевской волны. Экзотический случай отрицательных значений коэффициента Пуассона подробно исследован в работе [12, 13], где, так же, как и в цитированных выше работах, получается высокочастотный предел осесимметричных собственных мод, равный рэлеевской волне.

В настоящей работе рассматривается осесимметричная задача Похгаммера–Кри для водоподобной среды. Цель исследования состоит в доказательстве существования собственных мод, скорость распространения которых при увеличении частоты, как фазовая, так и групповая, стремятся к скорости продольной волны, а вовсе не к скорости рэлеевской волны. Волновод ведет себя как жидкий, при этом ненулевой модуль сдвига вносит малую поправку к скоростям распространения мод, но дает заметный вклад в поле модальных смещений.

Структура изложения в работе такова. В разделе 1 приводятся основные уравнения теории собственных волн в упругом круговом цилиндре. Последовательный вывод этих уравнений дается практически во всех цитированных выше работах. В разделе 2 получены дисперсионные зависимости собственных осесимметричных мод для жидкого цилиндра и найдена поправка к волновым числам, вызванная отличием модуля сдвига в водоподобной среде от нуля. Демонстрируется структура поля в отдельных модах, анализируется связь потенциальной и вихревой компонент поля. В разделе 3 дана физическая интерпретация особенностей распространения осесимметричных возмущений в водоподобном цилиндре. Экспериментальная иллюстрация распространения поля со скоростью продольных волн в водоподобном цилиндре представлена в Приложении.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение для поля смещений $\mathbf{u}$ твердого тела имеет вид (см., напр. [14]):

$$c_l^2\nabla\mathrm{div}\mathbf{u} - c_t^2\mathrm{rotrot}\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{u}}. \qquad (1)$$

Точки над $\mathbf{u}$ обозначают дифференцирование по времени. $c_l = \sqrt{\dfrac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}$ — скорость распространения продольных волн; $c_t = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ — скорость распространения сдвиговых волн; $K = \dfrac{2}{3}\mu\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}$ — модуль всестороннего сжатия; ν — коэффициент Пуассона; μ — модуль сдвига.

Вводим скалярный Φ и векторный $\mathbf{\Psi}$ потенциалы поля смещения:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \mathrm{rot}\mathbf{\Psi}. \qquad (2)$$

Далее рассматривается круговой цилиндр радиусом R, заполненный однородной, изотропной упругой средой. Вводится цилиндрическая система координат r, θ, z (рис. 1). Рассматриваем только осесимметричные гармонические поля, с окружными смещениями равными нулю. Вихревой потенциал имеет только одну компоненту Ψ_θ:

$$\mathbf{\Psi}(r,z) = \left(0\mathbf{i}_z, 0\mathbf{i}_r, \Psi_\theta(r,z)\mathbf{i}_\theta\right).$$

Задача состоит в нахождении нормальных волн и их скоростей распространения. Процедура получения решений и дисперсионного уравнения неоднократно воспроизводилась в литературе. В связи с этим ниже коротко напоминается последовательность вывода и приводятся лишь некоторые конечные результаты, представляющие интерес для наших заключений.

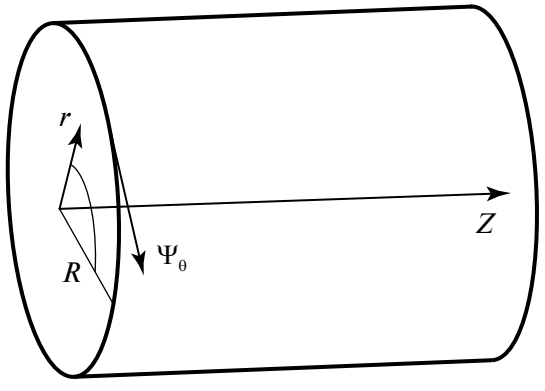

Рис. 1. Круговой упругий цилиндр с системой координат.

Записывается выражение для скалярного $\Phi(r,z)$ и векторного $\Psi_\theta(r,z)$ потенциалов в виде волны, бегущей вдоль оси волновода:

$$\Phi(r,z) = \tilde{\Phi}(r)\exp(-i\omega t + ikz),$$
$$\Psi_\theta(r,z) = \tilde{\Psi}(r)\exp(-i\omega t + ikz).$$

Далее временная зависимость $\exp(-i\omega t)$ опускается.

Зависимости потенциалов от радиальной координаты r ищутся в виде функций Бесселя:

$$\tilde{\Phi}(r) = A_l J_0(q_l r),\ \tilde{\Psi}(r) = A_t J_0(q_t r).$$

Здесь $q_l = \sqrt{(\omega/c_l)^2 - k^2}$, $q_t = \sqrt{(\omega/c_t)^2 - k^2}$ – радиальные компоненты волновых векторов продольной (потенциальной) и сдвиговой (вихревой) волн соответственно, A_l, A_t — амплитуды потенциалов смещения продольной и поперечной волн.

Вычисляем последовательно радиальное и осевое смещения:

$$u_r = \left[-q_l A_l J_1(q_l r) - ikA_t J_1(q_t r)\right]\exp(ikz), \quad (3)$$

$$u_z = \left[ikA_l J_0(q_l r) + q_t A_t J_0(q_t r)\right]\exp(ikz), \quad (4)$$

и компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{rr}(r) = \lambda\left(\frac{u_r}{r} + u_{rr} + u_{zz}\right) + 2\mu u_{rr},$$
$$\sigma_{rz}(r) = \mu(u_{rz} + u_{zr}),$$

$\lambda = 2\mu\dfrac{\nu}{1-2\nu}$ — первый коэффициент Ламэ, выраженный через μ и ν.

Приравнивая эти напряжения нулю на поверхности цилиндра $r = R$,

$$\sigma_{rr}(R) = 0,\ \sigma_{rz}(R) = 0, \quad (5)$$

получим систему уравнений для определения амплитуд A_l, A_t.

$$D_{11}A_l + D_{12}A_t = 0, \quad (6)$$
$$D_{21}A_l + D_{22}A_t = 0. \quad (7)$$

Элементы матрицы D_{ij} выписаны ниже (см. напр. [9, 10]):

$$D_{11} = -\left[\left(q_l^2 + k^2\right)S^2 - 2k^2\right]J_0(q_l R) + \frac{2q_l}{R}J_1(q_l R),$$
$$D_{12} = -\frac{2ik}{R}\left(q_t R J_0(q_t R) - J_1(q_t R)\right),$$
$$D_{21} = -2ikq_l J_1(q_l R),$$
$$D_{22} = -\left(q_t^2 - k^2\right)J_1(q_t R).$$

Здесь $S = \dfrac{c_l}{c_t} = \sqrt{\dfrac{K + \frac{4}{3}\mu}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}$ — отношение скоростей распространения продольной и сдвиговой волн. Для водоподобных сред этот параметр принимает значения много большие 1. Для справки приведем обратную зависимость: $\nu = \dfrac{S^2 - 2}{2\left(S^2 - 1\right)}$. Например, для отношения скоростей $S = 2$ $\nu = 0.33$, а для $S = 3$ $\nu = 0.44$.

Приравнивая детерминант системы уравнений (6), (7) нулю, получаем дисперсионное уравнение для осесимметричных волн в круглом твердом цилиндре (см. напр. [10]):

$$4k^2 q_l q_t J_0(q_t R)J_1(q_l R) -$$
$$- \frac{2q_l}{R}\left(q_t^2 + k^2\right)J_1(q_l R)J_1(q_t R) +$$
$$+ \left(q_t^2 - k^2\right)\left(\left(q_l^2 + k^2\right)S^2 - 2k^2\right)J_0(q_l R)J_1(q_t R) = 0.$$

Это уравнение в разных статьях (см. Введение) записывается в разных формах.

Вводя безразмерные переменные для продольного волнового числа K, поперечных волновых чисел потенциального Q_l и вихревого полей Q_t:

$$K = kR,\ \frac{\omega R}{c_l} = \Omega\ ,\ Q_l = q_l R = \sqrt{\Omega^2 - K^2},$$
$$Q_t = q_t R = \sqrt{\Omega^2 S^2 - K^2},$$

дисперсионное уравнение переписываем в виде:

$$4K^2 Q_l Q_t J_0(Q_t)J_l(Q_l) - 2Q_l\Omega^2 S^2 J_1(Q_l)J_1(Q_t) +$$
$$+ \left(\Omega^2 S^2 - 2K^2\right)^2 J_0(Q_l)J_1(Q_t) = 0. \quad (8)$$

Это точное дисперсионное уравнение, учитывающее совместное распространение продольных и сдвиговых компонент суммарного поля.

2. РЕШЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ВОДОПОДОБНОЙ СРЕДЫ

Уравнение (8), в частности, можно использовать и для случая водоподобной среды. Предельный случай водоподобного материала — отсутствие сдвиговых напряжений и, следовательно, сдвиговых волн. Точнее, скорость распространения сдвиговых волн в этом предельном случае равна нулю. Полагая в дисперсионном уравнении (8) $S = \infty$, оставляем слагаемое, пропорциональное S^4:

$$J_0(Q_l) = 0. \quad (9)$$

Это, очевидно, дисперсионное уравнение волн в жидком цилиндре со свободной (акустически мягкой) поверхностью. Несколько первых нулей функции Бесселя нулевого порядка приведены в табл. 1 (нижний индекс “0” обозначает здесь и

Таблица 1. Нули функции Бесселя нулевого порядка.

№ моды	1	2	3	4	5	6	7
$Q_{l,0}$	2.4	5.53	8.66	11.8	14.93	18.07	21.21

далее решение для жидкого цилиндра). Следующие корни идут с интервалом примерно через π.

Соответственно, продольное волновое число для собственных мод в жидком цилиндре равно

$$K_0 = \sqrt{\Omega^2 - {Q_{l,0}}^2}. \qquad (10)$$

Вычисляем фазовую и групповую скорости нормальных волн в жидком цилиндре:

$$C_{\mathrm{ph},0} = \frac{\Omega}{K_0} = \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - {Q_{l,0}}^2}},$$

$$C_{\mathrm{g},0} = \frac{\partial\Omega}{\partial K_0} = \frac{\sqrt{\Omega^2 - {Q_{l,0}}^2}}{\Omega}.$$

На рис. 2 показаны зависимости фазовой и групповой скорости для нескольких первых мод.

Влияние конечной (но малой) величины модуля сдвига на решения дисперсионного уравнения можно определить, используя решение уравнения (9) как стартовое для получения уточненного решения, учитывающего сдвиговые волны. Исходное уравнение (8) переписываем в виде:

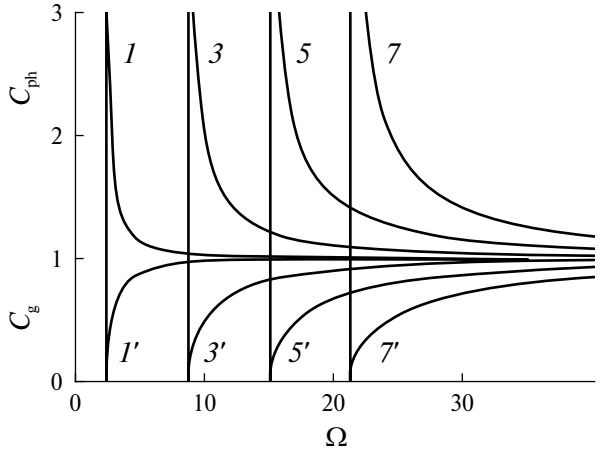

Рис. 2. Фазовые (*1*, *3*, *5*, *7*) и групповые (*1*', *3*', *5*', *7*') скорости осесимметричных волн в жидком цилиндре для 1-й, 3–й, 5-й 7-й мод. По оси абсцисс отложена нормированная частота, по оси ординат — нормированные скорости распространения с нормировкой на скорость распространения продольных волн.

$$J_0(Q_l) = -\frac{4K^2 Q_l Q_t J_0(Q_t) J_1(Q_l) - 2Q_l \Omega^2 S^2 J_1(Q_l) J_1(Q_t)}{\left(\Omega^2 S^2 - 2K^2\right)^2 J_1(Q_t)}. \qquad (11)$$

Вводим поправку к Q_l: $Q_l = Q_{l0} + \delta$. Разлагаем левую часть (11) около нулей функции Бесселя:

$$J_0(Q_l) = J_0(Q_{l0} + \delta) \approx J_0(Q_{l,0}) + J_0(Q_l)'\,\delta = J_0(Q_{l,0}) - J_1(Q_{l,0})\delta =$$

$$= -\frac{4{K_0}^2 Q_{l,0} Q_{t,0} J_0(Q_{t,0}) J_1(Q_{l,0}) - 2Q_{l,0}{\Omega_0}^2 S^2 J_1(Q_{l,0}) J_1(Q_{t,0})}{\left({\Omega_0}^2 S^2 - 2{K_0}^2\right)^2 J_1(Q_{t,0})}$$

и находим δ:

$$\delta(\Omega, Q_{l,0}) = -\frac{4{K_0}^2 Q_{l,0} Q_{t,0} J_0(Q_{t,0}) J_1(Q_{l,0}) - 2Q_{l,0}{\Omega_0}^2 S^2 J_1(Q_{l,0}) J_1(Q_{t,0})}{-J_1(Q_{l,0})\left({\Omega_0}^2 S^2 - 2{K_0}^2\right)^2 J_1(Q_{t,0})}.$$

Сокращая на $(J_1(Q_{l,0}))^2$, получаем относительную величину поправки:

$$\frac{\delta(\Omega, Q_{l,0})}{Q_{l,0}} = \frac{4(\Omega^2 - {Q_{l,0}}^2) Q_{t,0} \dfrac{J_0(Q_{t,0})}{J_1(Q_{t,0})} - 2\Omega^2 S^2}{\left(\Omega^2(S^2 - 2) + 2{Q_{t,0}}^2\right)^2}, \qquad (12)$$

$$Q_{t,0} = \sqrt{(S^2 - 1)\Omega^2 + {Q_{l,0}}^2}.$$

В формуле (12) при больших значениях S в числителе доминирует второе слагаемое, пропорциональное S^2. Исключение составляет узкая область около нулей функции $J_1(Q_{t,0})$ первого слагаемого числителя. Эти нули, очевидно, соответствует корням дисперсионного уравнения для чисто сдвиговых волн. Формула (12) упрощается при переходе к пределам $S \gg 1$, т.е. в предположении водоподобности, и $\Omega \gg Q_{l,0}$ — частота много выше критической для соответствующей моды:

$$\frac{\delta(\Omega, Q_{l,0})}{Q_{l,0}} \to \delta(\Omega) = \frac{4}{\Omega^2 S^2}\left(\Omega \frac{J_0(S\Omega)}{J_1(S\Omega)} - \frac{1}{2}S\right). \qquad (13)$$

При данной асимптотике поправка зависит от частоты и уже не зависит от номера моды. На рис. 3 для примера показаны модули $\dfrac{\delta(\Omega, Q_{l,0})}{Q_{l,0}}$,

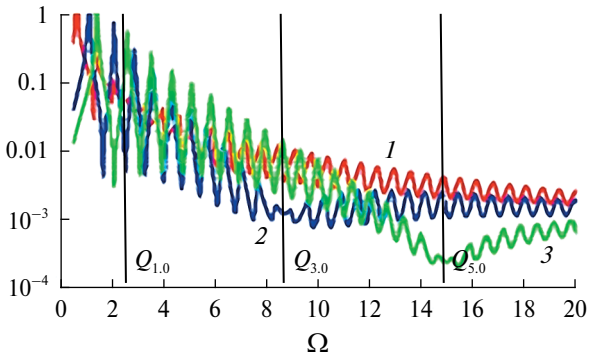

Рис. 3. Модуль поправки к радиальному волновому числу для 1-й (*1*), 3-й (*2*) и 5-й (*3*) собственных волн как функция частоты. Отношение продольной скорости к поперечной S равно 10. Введен коэффициент потерь 0.02.

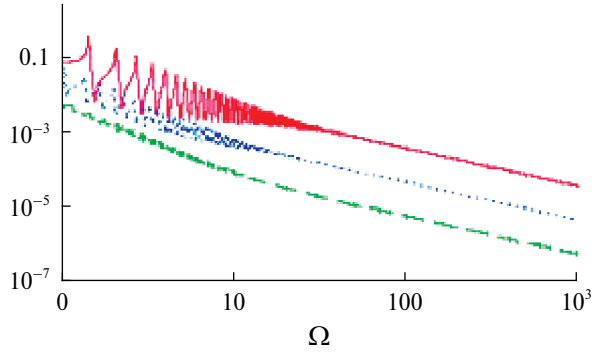

Рис. 4. Асимптотики модуля поправки к радиальному волновому числу, рассчитанные по формуле (13). Сверху вниз $S = 5$, 10, 20. Коэффициент потерь равен 0.01.

построенные по формуле (12) для 1-й, 3-й и 5-й мод. Для устранения особенностей на критических частотах сдвиговых мод ($J_1\left(Q_{t,0}\right) = 0$) в скорость сдвиговой волны введена небольшая мнимая добавка $S \to S\left(1 - 0.02i\right)$. Вертикальными линиями обозначены критические частоты 1-й, 3-й и 5-й мод соответственно. На рис. 4 даны асимптотические оценки по формуле (13) для более высоких частот при $S = 5$, 10, и 20. Мнимая добавка здесь взята равной 0.01. Как следует из приведенных зависимостей, асимптотически, при $\Omega \gg 10$ поправки к поперечным волновым числам жидкого цилиндра не превосходят 10^{-2} и уменьшаются обратно пропорционально частоте и обратно пропорционально S.

Таким образом, асимптотически, при увеличении частоты, водоподобный цилиндр ведет себя как жидкий. Поперечные волновые числа собственных волн (мод) водоподобного цилиндра мало отличаются от волновых чисел жидкого цилиндра (менее процента). Малы также отличия и фазовых и групповых скоростей. При этом, наличие конечного модуля сдвига должно давать вклад в поле смещений каждой моды. Для расчета поперечного распределения смещений используем формулу (7), связывающую амплитуду сдвиговой волны A_t с амплитудой продольной волны A_l:

$$A_t = -A_l \frac{D_{21}}{D_{22}}.$$

Подставляя это соотношение в выражение для осевого смещения, можно записать выражения для величины вкладов продольного и сдвигового компонентов в суммарное поле:

$$u_{zl} = ikA_l J_0\left(q_l r\right),$$
$$u_{zt} = q_t A_t J_0\left(q_t r\right) = -A_l \frac{D_{21}}{D_{22}} q_t J_0\left(q_t r\right).$$

После деления на ikA_l и перехода к нормированным волновым числам, получаем:

$$u_{zl} \frac{1}{iKA_l} = i\sqrt{\Omega^2 - Q_l^2} J_0\left(Q_l \frac{r}{R}\right), \tag{14}$$

$$u_{zt} \frac{1}{iKA_l} = -\frac{D_{21}}{D_{22}} Q_t J_0\left(Q_t \frac{r}{R}\right), \tag{15}$$

$$\frac{D_{21}}{D_{22}} = \frac{2Q_l Q_t J_1\left(Q_l\right)}{\left(Q_t^2 - K^2\right) J_1\left(Q_t\right)]}. \tag{16}$$

Подчеркнем, что соотношения (14)–(16) являются точными, независимо от величины модуля сдвига. Теперь подставим в эти формулы приближенные значения, полученные в модели жидкого цилиндра:

$$Q_l = Q_{l0},\ K = K_0 = \sqrt{\Omega^2 - {Q_{l,0}}^2},$$
$$Q_t = Q_{t,0} = \sqrt{\left(S^2 - 1\right)\Omega^2 + {Q_{l,0}}^2}. \tag{17}$$

Они, как показано выше, мало отличаются от точных значений в случае водоподобной среды. На рис. 5–8 показаны модули потенциального и вихревого поля осевых смещений для некоторых мод для разных частот, превышающих критическую частоту соответствующих мод. Для кривых рис. 5–7 коэффициент потерь равен 0.02: $S \to S\left(1 - 0.02i\right)$. Эта замена введена в расчетные формулы (14)–(17). На рис. 5 показана первая мода, частота Ω в полтора раза выше критической частоты $Q_{l0} = 2.4$ для первой моды — $\Omega = 1.5Q_{l0}$. Кривая *1* — вклад потенциального поля, кривая *2* — вклад вихревого поля при $S = 5$, кривая *3* — вклад вихревого поля при $S = 10$. На рис. 6 показана третья мода, частота Ω в два раза выше критической частоты $Q_{l0} = 8.66$ для третьей моды. Нумерация *1*, *2*, *3* та же, что и на рис. 5. На рис. 7 показана четвертая мода, $Q_{l0} = 11.8$, частота вдвое больше критической — $\Omega = 23.6$. Рис. 8 — седьмая мода — $Q_{l0} = 21.21$, частота вдвое больше критической — $\Omega = 42.42$. Здесь для того, чтобы были видны вклады вихревых волн, потери уменьшены в 100 раз, $S \to S\left(1 - 0.0002i\right)$, $S = 5$, 10.

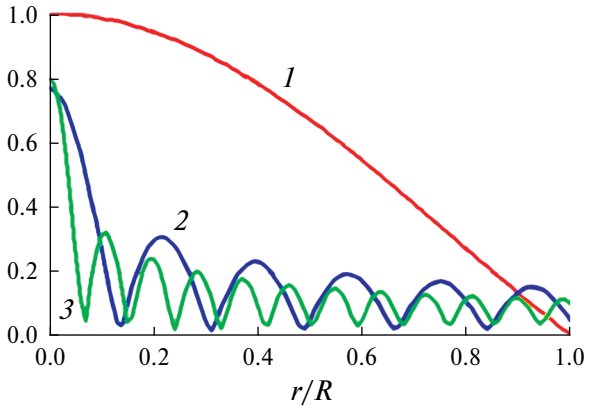

Рис. 5. Первая мода, полуторная частота, $S = 5$ и $S = 10$. *1* — Потенциальная часть поля; *2* ($S = 5$), 3 ($S = 10$) — вихревая часть поля.

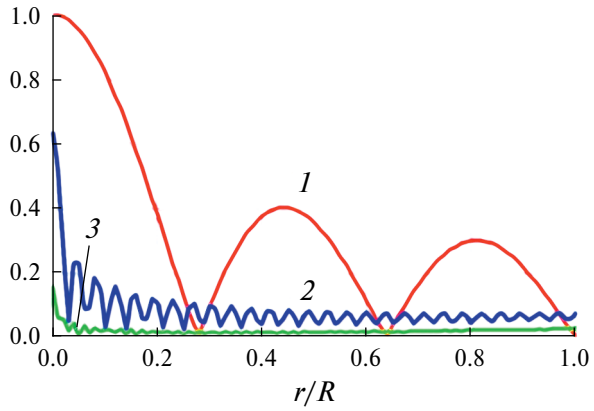

Рис. 6. Третья мода, двойная частота. *1* — Потенциальная часть поля; *2* ($S = 5$), *3* ($S = 10$) — вихревая часть поля.

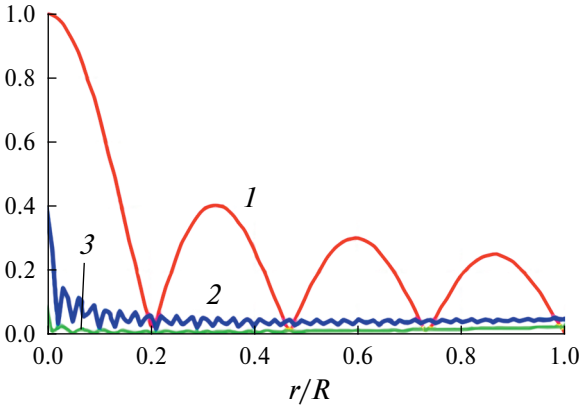

Рис. 7. Четвертая мода, двойная частота. *1* — Потенциальная часть поля; *2* ($S = 5$), 3 ($S = 10$) — вихревая часть поля.

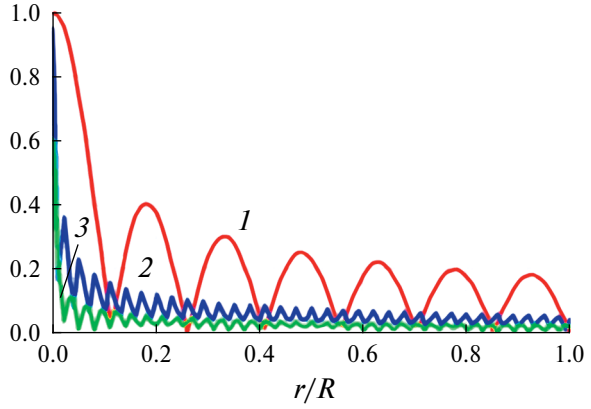

Рис. 8. Седьмая мода, двойная частота. *1* — Потенциальная часть поля, потери 0.0002; *2* ($S = 5$), *3* ($S = 10$) — вихревая часть поля.

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Водоподобная среда и по названию, и по физическим свойствам близка к невязкой жидкости. Предложенный подход как раз и основан на этом свойстве. Выражения для поля смещений (3), (4), граничные условия на боковой поверхности цилиндра (6), (7), дисперсионное уравнение (8) точно учитывают наличие ненулевого модуля сдвига в среде. Регулярный предельный переход к жидкой среде в дисперсионном уравнении (8) дает точное дисперсионное уравнение для жидкого цилиндра (9). Его решения — это нули бесселевой функции для поперечного волнового числа. Они дают набор соответствующих продольных волновых чисел (10) и набор фазовых и групповых скоростей распространения собственных волн (рис. 2). Наличие сдвиговой жесткости в водоподобной среде изменяет решения дисперсионного уравнения, однако эти изменения оказываются малыми ((12) и рис. 3, 4) именно для водоподобных сред. Асимптотически, при стремлении частоты к бесконечности, поправка к волновым числам для жидкого цилиндра стремится к нулю обратно пропорционально частоте (формула (13)). Вклад сдвиговой жесткости в поле осевых смещений (рис. 5–8) можно интерпретировать как частичное преобразование потенциальной волны в вихревую на свободной боковой поверхности цилиндра.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Экспериментально исследовалось распространение импульсов в полиуретановом цилиндре диаметром 50 мм и длиной 100 мм. Основная задача экспериментов состояла в измерении скорости распространения и коэффициента потерь продольных волн в широком диапазоне частот. Полное изложение полученных результатов выходит за рамки настоящей статьи. Здесь демонстрируется, во-первых, волноводный характер распространения импульса в цилиндре со свободной боковой границей и, во-вторых, высокая скорость распространения, примерно равная скорости распространения

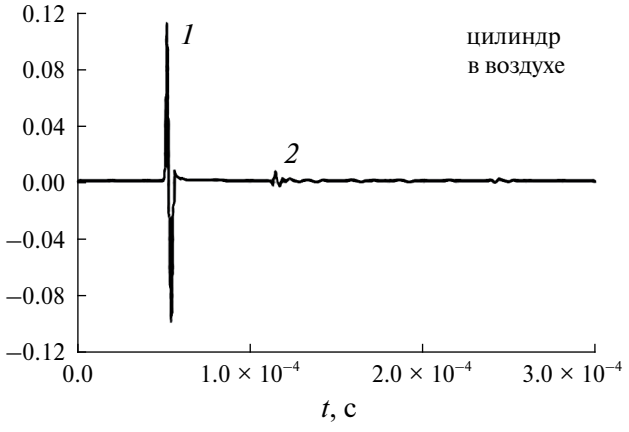

Рис. 9. Цилиндр в воздухе. *1* — Сигнал электрической наводки, *2* — сигнал прошедшего через цилиндр импульса.

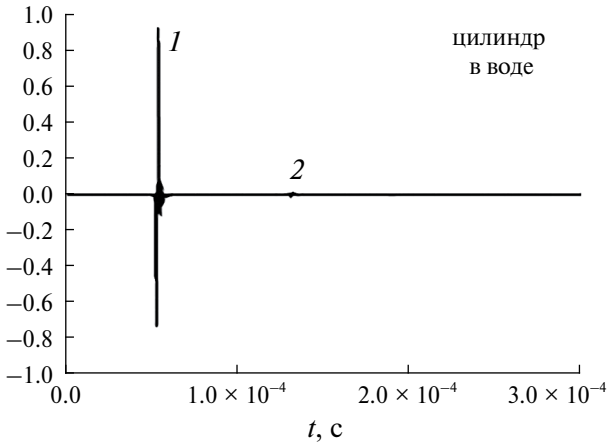

Рис. 10. Цилиндр в воде. *1* — Сигнал электрической наводки, *2* — сигнал прошедшего через цилиндр импульса.

продольной волны в безграничной среде. Излучение и прием осуществлялись пьезопленочными преобразователями, специально разработанными для этих экспериментов. Разработанная в среде LabView программа, управляющая модулем NI USB-6361 (АЦП: 16 бит, 2 МВыб/с на канал, ЦАП: 2.86 МВыб/с), позволяет производить синхронную генерацию, запись и оцифровку сигналов. Основные измерения проведены на цилиндрических образцах, погруженных в воду. Благодаря близости плотностей и скоростей звука полиуретана (1090 кг/м^3, 1600 м/с) (см. напр. [15]) и воды (1000 кг/м^3, 1481 м/с) соответственно, эффект волноводности цилиндра отсутствует (точнее – ослаблен). Для контроля проведены записи импульсов также в отсутствие водного окружения. На рис. 9 показана запись сигналов на приемном преобразователе, полученная для цилиндра в воздухе. По оси абсцисс отложено время, секунды, по оси ординат — напряжение на приемном преобразователе, вольты. Цифрой *1* обозначен сигнал электрической наводки на приемном преобразователе, цифрой *2* — сигнал, вызванный акустическим импульсом, прошедшим однократно по цилиндру.

Интервал между вступлениями этих импульсов равен примерно 0.062 мс. Разделив длину цилиндра 100 мм на этот интервал, получим скорость распространения примерно 1613 м/с. На рис. 10 показана аналогичная запись сигналов для цилиндра в воде. Интервал между вступлениями импульсов равен 0.078 мс. По условиями экспериментов в воде, цилиндр помещался между излучающим и приемным преобразователями с зазорами 12.5 мм с каждой стороны цилиндра. Следовательно, длина распространения импульса в этом случае была больше длины цилиндра. С учетом соответствующей поправки скорость распространения импульса по цилиндру оказалась равной примерно 1603 м/с. Существенное различие в сигналах на рис. 9 и 10 состоит в следующем. При возбуждении цилиндра в воздухе (рис. 9), когда реализуется волноводное распространение, сигнал наводки *1* имел амплитуду порядка 0.11 В. При этом сигнал от прошедшего импульса *2* равен 0.008 В. Отношение сигнала *1* к сигналу *2* равно примерно 14. Для цилиндра в воде (рис. 10) для уверенного приема прошедшего сигнала оказалось необходимым сильно увеличить возбуждающее напряжение. Сигнал наводки *1* здесь равен 0.92 В, сигнал прошедшего импульса *2* равен 0.015 В. Отношение сигнала *1* к сигналу *2* равно примерно 61. Таким образом, окружение цилиндра водой ослабляет сигнал прошедшего импульса в 61 / 14 = 4.4 раза. Такое различие вызвано, очевидно, волноводным характером распространения импульса в цилиндре со свободной боковой поверхностью. Скорость распространения импульса равна примерно 1600 м/с, что значительно превышает скорость распространения рэлеевской волны (~150–200 м/с для полиуретана, см. напр. [15]). Это экспериментально подтверждает наличие собственных волн в цилиндрическом водоподобном волноводе, фазовые и групповые скорости которых на высоких частотах близки к скорости продольных волн в безграничной среде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pochhammer L.* Uber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // J. Reine Angew. Math. 1876. V. 81. P. 324–336.
2. *Chree C.* Longitudinal vibrations of a circular bar // Quart. J. Pure Appl. Math. 1886. V. 21. P. 287–298.
3. *Chree C.* The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications // Trans. Cambridge Philos. Soc. 1889. V. 14. P. 250–309.
4. *Redwood M. and Lamb J.* On propagation of high frequency compressional waves in isotropic cylinders // Proc. Phys. Soc. London. 1957. V. B70. P. 136–143.

5. *Вовк А.Е., Гудков В.В.* Нормальные продольные волны в упругом цилиндрическом волноводе // Акуст. журн. 1967. Т. 13. № 3. С. 345–351.
6. *Zemanek J.* An Experimental and Theoretical Investigation of Elastic Wave Propagation in a Cylinder // J. Acoust. Soc. Am. 1972. V. 51. P. 265. https://doi.org/10.1121/1.1912838
7. *Meleshko V.V., Bondarenko A.A., Dovgiy S.A., Trofimchuk A.N., and van Heijst G.J.F.* Elastic waveguides: history and the state of the art // J. Mathematical Sciences. 2009. V. 162. № 1. P. 99–120.
8. *Valsamos G., Casadei F., Solomos G.* A numerical study of wave dispersion curves in cylindrical rods with circular cross-section // Applied and Computational Mechanics. 2013. V. 7. P. 99–114.
9. *Кузнецов С.В., Ильяшенко А.В.* Поляризация волн Похгаммера–Кри: аксиально симметричные продольные моды // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 657–663.
10. *Гаджибеков Т.А., Ильяшенко А.В.* Теоретические аспекты применения волн Похгаммера–Кри к задачам определения динамического коэффициента Пуассона // Известия Рос. Акад. наук. Механика твердого тела. 2021. № 5. С. 113–126.
11. *Мокряков В.В.* Напряжения в осесимметричной волне Похгаммера–Кри средневолнового диапазона // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 3. С. 240–248.
12. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Longitudinal Pochhammer–Chree waves in mild auxetics and non-auxetics // J. of Mechanics. 2019. V. 35. No 3. P. 327. https://doi.org/10.1017/jmech.2018.13
13. *Ramzi Othman.* Wave dispersion analysis in auxetic rods // Int. J. Solids and Structures. 2022. V. 236–237. 111321. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111321
14. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
15. *Motta P.H., Roland C.M., Corsaro R.D.* Acoustic and dynamic mechanical properties of a polyurethane rubber // J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 111. No 4. P. 1782–1790.

Axisymmetric waves in a water-like cylinder

M. A. Mironov[a],*, P. A. Pyatakov[a], O. A. Savitsky[a], S. A. Shulyapov[a]

[a]*Andreev Acoustics Institute, 4 Shvernik str., Moscow, Russia, 117292*

**e-mail: mironov_ma@mail.ru*

The results of an analytical study of the propagation of axisymmetric normal waves in a solid circular waveguide made of a water-like medium are presented. A water-like medium is a medium in which the velocity of shear waves is significantly lower than the velocity of longitudinal waves. It is shown that the propagation velocities of normal waves are approximately equal to the propagation velocities in a liquid cylinder. This result is radically different from the common statement in the literature that the propagation velocities of normal waves at high frequencies are approximately equal to the velocity of a Rayleigh wave at a flat boundary. The correction to the water-like approximation is calculated, and the contributions of the longitudinal and shear components of the fields for normal waves are obtained. An experimental illustration is provided confirming the results obtained.

Keywords: water-like medium, circular waveguide, axisymmetric modes, propagation velocity