АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2025, том 71, № 4, с. 491–503

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.113

НУЛИ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ БАЛКИ И ПОЛУКОЛЬЦА С ДИССИПАЦИЕЙ

© 2025 г. Л. А. Лазарев[a,*]

[a]ФАУ ЦАГИ, Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ, ул. Радио 17, Москва, 105005 Россия

**e-mail: leonidl74@mail.ru*

Поступила в редакцию 14.08.2023 г.
После доработки 22.07.2024 г.
Принята к публикации 24.06.2025 г.

Для балки Эйлера–Бернулли и тонкого нерастяжимого полукольца показано, что их функция Грина для нормальных сил и смещений может равняться нулю при наличии диссипативных потерь. Балка и полукольцо рассмотрены в двух вариантах: со свободным креплением и подвижной заделкой на концах. Решения существуют в широких полосах частот. Для полукольца с подвижной заделкой среди решений есть такие, для которых производная функции Грина по частоте близка к нулю при независящем от частоты тангенсе потерь. Виброизолятор в виде замкнутого кольца с четырьмя опорами, распложенными в точках, соответствующих одному из таких решений, будет обладать как теоретически бесконечной виброизоляцией на одной частоте, так и большой виброизоляцией в широкой полосе соседних частот.

Ключевые слова: балка Эйлера–Бернулли, полукольцо, замкнутое кольцо, функция Грина, виброизолятор, бесконечная виброизоляция

DOI: 10.31857/S0320791925040011, **EDN:** VOOKNZ

ВВЕДЕНИЕ

Существуют разные пассивные методы снижения вибраций на одной дискретной частоте. Имеется большое число работ, в которых колебания балок, пластин и оболочек ослабляются с помощью динамических виброгасителей. Например, в работах [1, 2] упругая волна в стержне изолируется с помощью поперечного и крутильного виброгасителей. Цепочкой резонаторов можно локализовать гармонические волны в пластине [3]. Снижать колебания тела иногда требуется только в отдельных его точках, например, в точках крепления его опор. С этой целью динамические виброгасители можно установить непосредственно в эти точки. Однако, снижение колебаний в этом случае ограничено массой и добротностью резонаторов.

Преодолеть это ограничение оказывается возможным, если оптимальным образом подобрать место расположения резонаторов и его параметры. Так, в работах [4–7] решается задача смещения узловых точек в нужное место у балок и пластины с помощью грузов или виброгасителей. Причем, даже при наличии потерь в теле, эти узловые точки могут оказаться полностью неподвижны на одной частоте, что показано для балок с виброгасителями в работах [8–10].

В области акустики также существует теоретическая возможность полной остановки колебаний на одной частоте с учетом потерь и достижения бесконечной звукоизолирующей способности для преграды. В работе [11] показано, что это достижимо с помощью низкодобротных вибро-акустических резонаторов, покрывающих собой всю панель.

Логично предположить, что если у тела с резонаторами при наличии потерь могут существовать неподвижные точки, то они могут быть и у самого тела без каких-либо дополнительных элементов. Задачу поиска неподвижных точек при возбуждении точечной гармонической силой можно сформулировать как задачу о поиске нулей функции Грина.

В данной статье показано, что для балки и полукольца (рис. 1) с диссипацией в широкой полосе частот имеются одна или несколько пар координат, в которых функция Грина для нормальной компоненты обращается в ноль. Для расчетов использована наиболее простая модель Эйлера–Бернулли для однородных балки и кольца. Кольцо считается

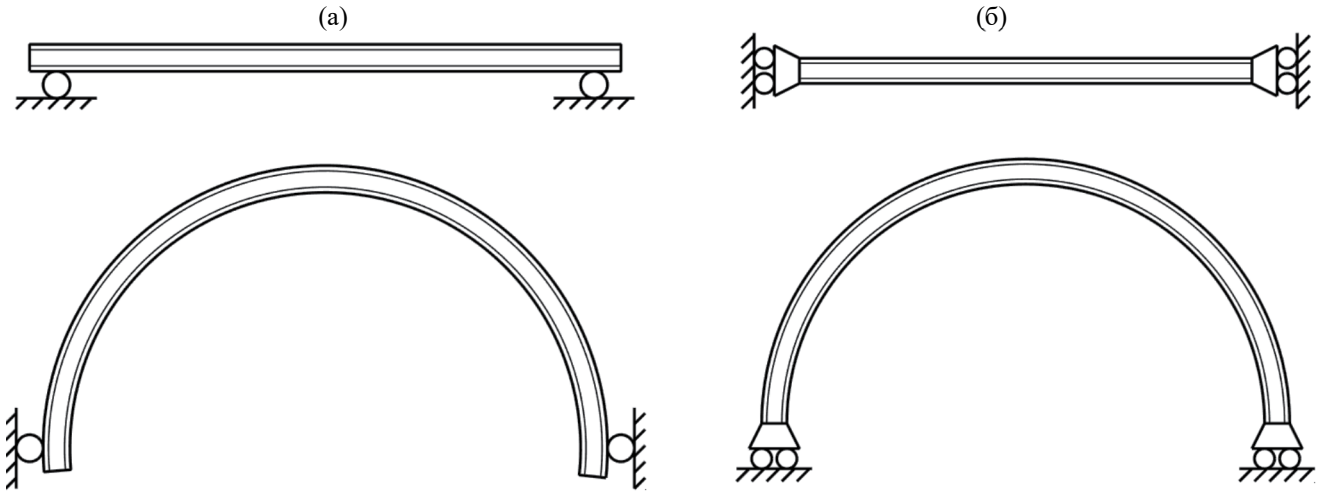

Рис. 1. Балка и полукольцо: (а) — свободное опирание (с.о.), (б) — подвижная заделка (п.з.).

нерастяжимым и колеблется в своей плоскости. Балка и полукольцо рассмотрены в двух вариантах граничных условий на концах: со свободным опиранием (с.о.) (рис. 1а) и с подвижной заделкой (п.з.) (рис. 1б).

Полукольцо с подвижной заделкой можно рассматривать как половину замкнутого кольца с симметричными колебаниями. Если к замкнутому кольцу в симметричных точках, являющихся корнями функции Грина, прикрепить радиально пружины, то получится виброизолятор с теоретически бесконечной виброизоляцией на одной частоте. Среди корней функции Грина можно выбрать такие, при которых виброизоляция остается максимальной при небольшом отклонении частоты от расчетной.

1. НУЛИ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ БАЛКИ

Рассмотрим прямую однородную балку Эйлера–Бернулли с двумя вариантами граничных условий на концах при наличии потерь [12, 13]. Покажем, что при возбуждении ее точечной гармонической силой в одной точке, в некоторой другой точке балка может быть неподвижна. Другими словами, покажем, что для балки может существовать одна или более пар координат точек (x_1,x_2), для которых комплекснозначная функция Грина на заданной частоте и при заданных потерях обращается в ноль ($G(x_1,x_2) = 0$).

Функция Грина G удовлетворяет уравнению колебаний балки [9, 10, 14] с дельта-функцией Дирака в правой части (временной множитель $\exp(i\omega t)$ везде опускается):

$$EI(1 + i\eta)\partial^4 G/\partial x^4 + (i\omega c - m\omega^2)G = \delta(x - x_1). \quad (1)$$

Здесь E, I, m — модуль Юнга, момент инерции и погонная масса балки, η — тангенс структурных (гистерезисных) потерь, c — коэффициент вязких потерь, x_1 — точка приложения точечной силы. Вязкие потери удобнее записать через тангенс вязких потерь $\eta_c = c/m\omega$, обратно пропорциональный частоте. Уравнение (1) можно записать так:

$$EI(1 + i\eta)\left(\partial^4 G/\partial x^4 - k^4\right)G = \delta(x - x_1),$$

$$k^4 = k_0^4(1 - i\eta_c)/(1 + i\eta),\ k_0^4 \equiv m\omega^2/EI,\ \eta_c \equiv c/m\omega.$$

Здесь k_0 — волновое число при отсутствии потерь, k — с учетом потерь. Связывающий их комплексный множитель можно представить в виде:

$$(1 - i\eta_c)/(1 + i\eta) = 1/\left(a_\eta(1 + i\eta')\right),$$

$$a_\eta \equiv (1 - \eta_c\eta)/(1 + \eta_c{}^2), \eta' \equiv (\eta + \eta_c)/(1 - \eta_c\eta).$$

Это означает, что корни функции Грина для балки со структурными и вязкими потерями будут соответствовать корням для этой балки с одними структурными потерями с тангенсом η' на другой частоте ($\omega'^2 = \omega^2/a_\eta$), а амплитуда колебаний поделится на $a_\eta(1 - i\eta_c)$. Поэтому, полученные далее результаты при поиске корней для балки с одними структурными потерями, можно обобщить и на случай с вязкими потерями. При малых потерях ($\eta\eta_c \ll 1, \eta_c^2 \ll 1$) можно приближенно считать, что $\eta' \approx \eta + \eta_c, \omega' = \omega$, т.е. что тангенсы потерь складываются.

Граничные условия для нормальных смещений w на концах свободно опертой и подвижно заделанной балок ($x = 0, l$) такие:

$$\text{с.о.:}\ w = w'' = 0,$$

$$\text{п.з.:}\ w' = w''' = 0.$$

Для балки длиной l с такими граничными условиями собственными формами колебаний будут $\sin k_n x$ либо $\cos k_n x$, где собственные волновые числа k_n и частоты ω_n определяются как:

$$k_n = \pi n/l,\ \omega_n^2 = (\pi n/l)^4 EI/m.$$

Здесь n — число полуволн на длине балки.

Вместо частоты ω в расчетах и на графиках удобно использовать действительное число n_ω, определяемое для балки из равенства $(\pi n_\omega/l)^4 = m\omega^2/EI$. Оно пропорционально корню из частоты и совпадает с числом полуволн n на собственных частотах. Условимся называть n_ω *частотным числом*.

Выражение для функции Грина балки запишем двумя разными способами: в виде разложения по собственным формам и явным выражением.

Используя равенства:

$$EI\left(k_n^4(1+i\eta) - k_0^4(1-i\eta_c)\right) =$$
$$= m\omega^2\left(n^4(1+i\eta)/n_\omega^4 - (1-i\eta_c)\right),$$
$$l\delta(x-x_1) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sin k_n x_1 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos k_n x_1 + 1,$$

можно записать выражение для функции Грина балки в виде бесконечной суммы таким образом:

$$G(x_1,x_2) = \frac{1}{ml\omega^2}\bar{G}(\bar{x}_1,\bar{x}_2),$$
$$\text{с.о.}: \bar{G} = \bar{G}^{\sin}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) =$$
$$= 2\sum_{1}^{\infty}\sin(\pi n\bar{x}_1)\sin(\pi n\bar{x}_2)/\Omega_n,$$
$$\text{п.з.}: \bar{G} = \bar{G}^{\cos}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = \qquad (2)$$
$$= 2\sum_{1}^{\infty}\cos(\pi n\bar{x}_1)\cos(\pi n\bar{x}_2)/\Omega_n + \Omega_0^{-1},$$
$$\Omega_n = (n^4/n_\omega^4)(1+i\eta) - (1-i\eta_c),$$
$$\Omega_0 = -(1-i\eta_c),\ \bar{x} \equiv x/l.$$

Здесь $\bar{x}$ — безразмерная координата. В расчетах нужно ограничиваться некоторым максимальным числом мод $n_{\max}$ в разложении (2).

Быстрее и точнее значения функции Грина можно вычислять из явного выражения [5, 14]:

$$G(x_1,x_2) = Cg(\bar{x}_{\min},\bar{x}_{\max}),$$
$$C = \frac{1}{2EI(1+i\eta)k^3} = \frac{1}{ml\omega^2}\frac{kl}{2(1-i\eta_c)},$$
$$\text{с.о.:}\quad g = g^{\sin}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) =$$
$$= \frac{\sin q\bar{x}_1 \sin q(1-\bar{x}_2)}{\sin q} - \frac{\operatorname{sh} q\bar{x}_1 \operatorname{sh} q(1-\bar{x}_2)}{\operatorname{sh} q},$$
$$\text{п.з.:}\quad g = g^{\cos}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = \qquad (3)$$
$$= -\frac{\cos q\bar{x}_1 \cos q(1-\bar{x}_2)}{\sin q} - \frac{\operatorname{ch} q\bar{x}_1 \operatorname{ch} q(1-\bar{x}_2)}{\operatorname{sh} q},$$
$$\bar{x}_{\min} = \min(\bar{x}_1,\bar{x}_2),$$
$$\bar{x}_{\max} = \max(\bar{x}_1,\bar{x}_2),$$
$$q \equiv kl,\ \bar{x} \equiv x/l.$$

Здесь q — безразмерное комплексное волновое число. Наличие двух различных расчетных формул для одной величины всегда полезно, поскольку защищает от ошибок в соотношениях и в программном коде. Расчеты показывают, что разница значений, полученных по выражениям (2) и (3), стремится к нулю как четвертая степень отношения чисел $n_\omega/n_{\max}$, при постоянных ω, η, x_1, x_2 и $n_\omega < n_{\max}/2, \eta < 0.5, \eta_c = 0$.

Однако, достаточно сложно использовать напрямую выражение (2) или (3) для поиска корней. Приходится искать нули модуля комплексной функции над плоскостью при наличии большого числа ложных локальных минимумов, в которых модуль функции может быть сколь угодно мал, но не достигать нуля.

Для упрощения поиска корней предлагается переписать функцию Грина в виде суммы двух однопараметрических функций и искать точки их пересечения в комплексной плоскости. Выражения для функции g в (3) можно записать в такой альтернативной форме:

$$\text{с.о.:}\quad g^{\sin}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = g_0(\bar{x}_2-\bar{x}_1) - g_0(\bar{x}_2+\bar{x}_1),$$
$$\text{п.з.:}\quad g^{\cos}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = g_0(\bar{x}_2-\bar{x}_1) + g_0(\bar{x}_2+\bar{x}_1),$$
$$g_0(t) = g^{\cos}(0,t)/2 = -\cos q(1-t)/2\sin q - \operatorname{ch} q(1-t)/2\operatorname{sh} q.$$

В этом легко убедиться, если произведения синусов и косинусов в (3) представить в виде суммы косинусов, например:

$$\sin q\bar{x}_1 \sin q(1-\bar{x}_2)/\sin q - \operatorname{sh} q\bar{x}_1 \operatorname{sh} q(1-\bar{x}_2)/\operatorname{sh} q =$$
$$= \left(-\cos q\left(1-(\bar{x}_2-\bar{x}_1)\right)/\sin q - \operatorname{ch} q\left(1-(\bar{x}_2-\bar{x}_1)\right)/\operatorname{sh} q\right)/2 +$$
$$+\left(\cos q\left(1-(\bar{x}_2+\bar{x}_1)\right)/\sin q + \operatorname{ch} q\left(1-(\bar{x}_2+\bar{x}_1)\right)/\operatorname{sh} q\right)/2.$$

Каждой паре решений $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ соответствует еще три симметричных ей решения: $(\bar{x}_2,\bar{x}_1)$; $(1-\bar{x}_1,1-\bar{x}_2)$; $(1-\bar{x}_2,1-\bar{x}_1)$. Поэтому можно считать для одного решения, что $\bar{x}_1 \le \bar{x}_2, \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \le 1$. При этом сумма и разность безразмерных координат лежат в пределах единичного отрезка: $0 \le \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \le 1$, $0 \le \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \le 1$, а это значит, что и параметр t для функции $g(t)$ не выходит за его границы ($0 \le t \le 1$). Стоит заметить, что однопараметрическая функция $g_0(t)$ есть смещения подвижно заделанной балки при половинной силе, приложенной к левому ее концу ($g^{\cos}(0,t)/2$), или смещения бесконечной балки с единичными силами, синхронно действующими с шагом $2l$.

Поиск корней при свободном опирании теперь сводится к определению точек самопересечения кривой g_0 ($g_0(t^-) = g_0(t^+), t^- < t^+$). По найденным параметрам t^-, t^+ находятся координаты: $\bar{x}_1 = (t^+ - t^-)/2, \bar{x}_2 = (t^+ + t^-)/2$. Корни для подвижно заделанной балки находятся через точки

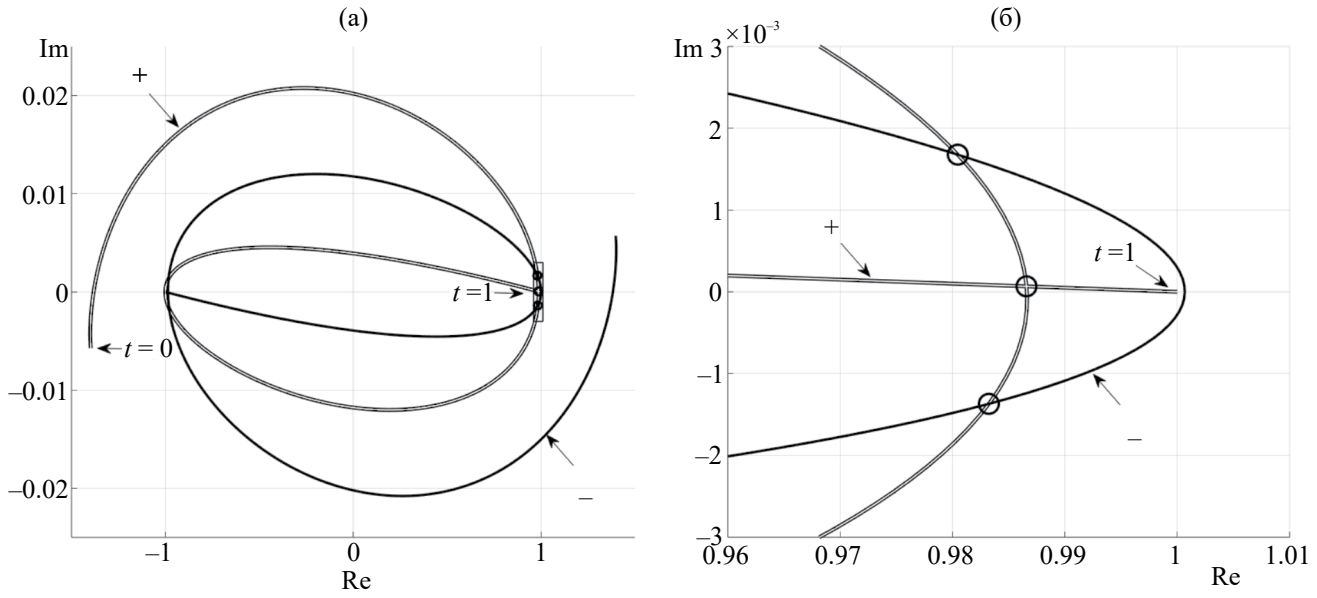

Рис. 2. Кривые для функций балки $+\bar{g}_0, -\bar{g}_0$ в комплексной плоскости и точки пересечения. $\eta = 0.01$, $\eta_c = 0$, $n_\omega = 3.3$.

пересечения двух кривых g_0 с разными знаками ($g_0(t^-) = -g_0(t^+)$).

На рис. 2а, 2б показан пример функции g_0, нормированной на свое значение при $t = 1$ ($\bar{g}_0 = g_0/g_0(1)$). Показана также симметричная ей функция $-\bar{g}_0$. Отмечена точка самопересечения и две точки пересечения. Дублирующие точки пересечения не отмечены. На рис. 2б крупно показана область пересечений, отмеченная прямоугольником на рис. 2а. Расчеты здесь и далее велись при тангенсе структурных потерь $\eta = 0.01$ при отсутствии вязких потерь $\eta_c = 0$.

Алгоритм поиска точек пересечения двух кривых в комплексной плоскости ($f_1 = \bar{g}_0(t^-), f_2 = \pm\bar{g}_0(t^+)$) состоял из двух этапов. Сначала кривые делились на короткие пологие отрезки, числом более $4n_\omega$. На концах каждого отрезка аналитически находились касательные. По пересечению касательных определялась третья точка, которая вместе с концами отрезка образовывала треугольник, полностью вмещающий в себя пологий отрезок. Все треугольники проверялись попарно на их пересечение. Для пересекающихся треугольников проверялось, пересекаются ли прямые отрезки, стягивающие концы пологих отрезков, в противном случае отрезки делились на три части. По точке пересечения отрезков определялось первое приближение для параметров t^-, t^+.

На втором этапе в точках $f_1(t^-), f_2(t^+)$ аналитически определялись касательные к кривым. По точке их пересечения определялась уточненная пара параметров t^-, t^+. Процедура продолжалась до достижения нужной точности ($\left|g_1(t^-) - g_2(t^+)\right| < \varepsilon$). На каждой итерации точность возрастала на 1–2 порядка. Первый этап поиска корней пропускался, когда строились сплошные линии решений на близких частотах. Для этого в качестве первого приближения использовались параметры с предыдущей соседней частоты.

На рис. 3 показаны безразмерные координаты точек, являющихся корнями функции Грина для балки со свободным опиранием. Сплошной одинарной линией показана безразмерная координата первой точки ($\bar{x}_1$), а сплошной двойной показано безразмерное расстояние второй точки от другого конца балки ($1 - \bar{x}_2$). Для меньших чем 0.01 тангенсов потерь рисунок будет неотличим от этого. Решения образуют группы из замкнутых вытянутых кривых, которые ложатся около гипербол $1/n_\omega$, $2/n_\omega$, $3/n_\omega$, ... Минимальное частотное число, при котором существует решение при свободном опирании, равно $n_{\omega\min} = 2.985$. В интервале чисел примерно $3 < n_\omega < 4$ имеется только одно решение, в интервале $4 < n_\omega < 5$ их два, и т.д. С ростом частотного числа при $n_\omega > 10$ овалы кривых становятся все короче и потом полностью исчезают. С ростом тангенса потерь η все овалы решений сжимаются и исчезают, последними исчезают самые низкочастотные.

На рис. 4а показана первая, самая низкочастотная группа корней ($3 < n_\omega < 4$) при разных тангенсах структурных потерь. Точки (x_1, x_2) дополнены симметричными им точками $(1 - x_2, 1 - x_1)$. Эта группа находится в пределах квадрата $1/4 < x_1 < 1/3$, $2/3 < x_2 < 3/4$. С ростом потерь кривая сжимается, обращаясь в единственное решение при $\eta = 0.1095$. Это максимальный тангенс структурных потерь,

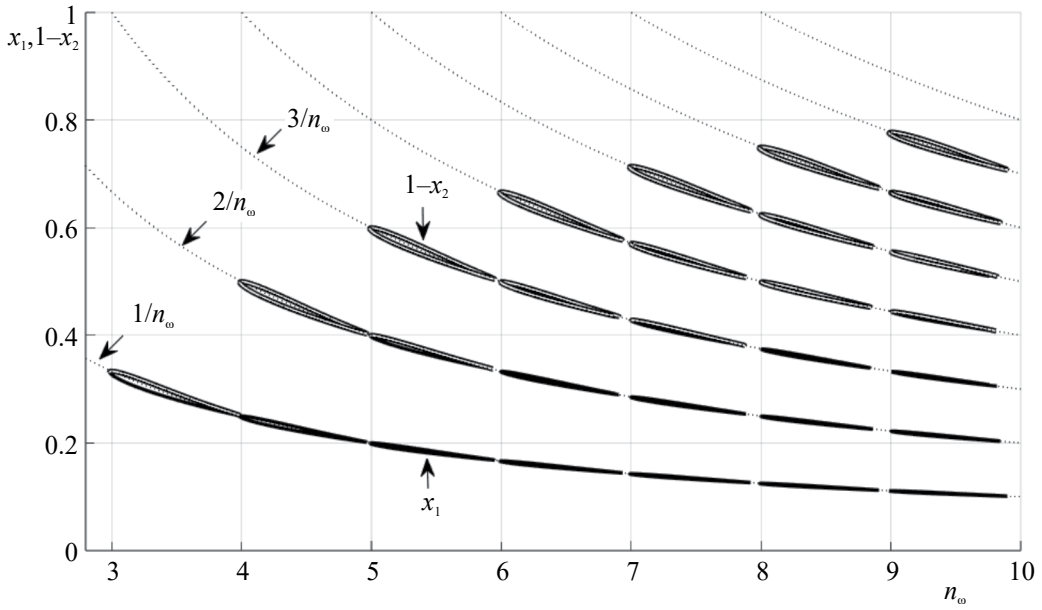

Рис. 3. Координаты корней функции Грина для балки со свободным опиранием, в зависимости от частотного числа. $\eta = 0.01$, $\eta_c = 0$.

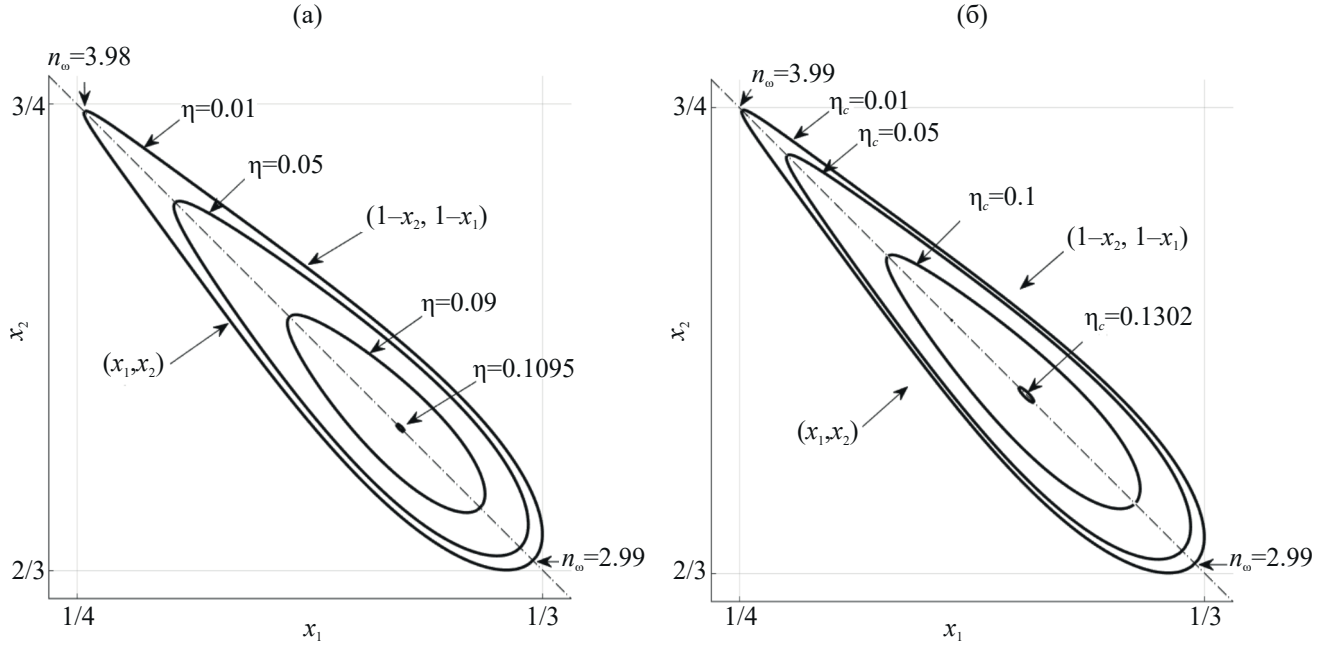

Рис. 4. Координаты точек для первой группы корней функции Грина свободно опертой балки при разных тангенсах потерь: (а) — структурные потери, (б) — вязкие потери (η_c при $n_\omega = 3$).

для которого существует решение для свободно опертой балки.

На рис. 4б эта группа корней нарисована для вязких потерь ($\eta = 0$). Коэффициент вязких потерь η_c обратно пропорционален частоте и выражается здесь через частотное число как $\eta_c(n_\omega) = \eta_c(3)(3^2/n_\omega^2)$. На рисунке показаны значения $\eta_c(3)$. Таким образом, структурные и вязкие потери при небольших значениях похожим образом влияют на корни функции Грина.

Для подвижно заделанной балки картина корней не показана. Она выглядит аналогично рис. 3, 4. Отличия в том, что решения в координатах (n_ω, x) сдвинуты на 1 влево и на $1/2n_\omega$ вниз. Минимальное частотное число с решением равно $n_\omega = 1.965$. Решения лежат около гипербол $1/2n_\omega$, $3/2n_\omega$, $5/2n_\omega$. В интервале $2 < n_\omega < 3$ имеется одно решение, в интервале $3 < n_\omega < 4$ — два, и т.д. Максимальный тангенс потерь, при котором существует единственное решение, равен $\eta = 0.2445$.

2. НУЛИ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ПОЛУКОЛЬЦА

Рассмотрим теперь круговое кольцо, колеблющееся в своей плоскости [12, 13]. Так же, как и для балки, используем модель Эйлера–Бернулли, т.е. будем считать, что поперечное сечение кольца не деформируется и остается перпендикулярным центральной линии, нормальные напряжения отсутствуют, инерция вращения сечения не учитывается. Кольцо для простоты будем считать нерастяжимым.

Уравнения колебания нерастяжимого кольца в плоскости под действием радиально действующих распределенных сил f_w с учетом вязких сил ($-ic_v\omega v$, $-ic_w\omega w$), можно записать в виде [15]:

$$\begin{gathered} -N' + M'/r = m\omega^2 v - ic_v\omega v, \\ M'' + N/r = m\omega^2 w - ic_w\omega w + f_w, \\ v' + w/r = 0, \\ M = E_\eta I(w'' - v'/r),\ E_\eta = E(1+i\eta). \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь E, I — модуль Юнга и момент сечения, m, r, η — погонная масса, радиус, тангенс структурных потерь. c_w, c_v — коэффициенты вязких потерь, w — амплитуды смещения в радиальном от центра кольца направлении, v — амплитуды смещения в окружном направлении. M — момент, N — продольная сила, которая не выражается через деформацию для нерастяжимого кольца. Для упрощения положим, что коэффициенты вязких потерь одинаковы ($c_v = c_w = c$). Далее используем тангенс вязких потерь $\eta_c = c / m\omega$.

Граничные условия для полукольца ($x = 0, l$) при свободном опирании и подвижной заделке такие:

$$\text{с.о.: } w = w'' = 0,\ v' = 0,$$
$$\text{п.з.: } w' = w''' = 0,\ v = 0.$$

Исключим из уравнений (4) продольную силу N и компоненту смещений v. Для этого первое равенство поделим на r. Второе уравнение продифференцируем и сложим с первым. Продифференцируем сумму еще раз, сделаем замену $v' \to -w/r$ и поделим на $E_\eta I$:

$$\begin{gathered} w^{(6)} + 2w^{(4)}/r^2 + w''/r^4 = \\ = m\omega^2(1 - i\eta_c)/E_\eta I\left(w'' - w/r^2\right) + f_w''/E_\eta I. \end{gathered} \tag{5}$$

Выражение для функции Грина кольца в литературе найти не удалось, поэтому приведем здесь его вывод. Получим его вначале в виде разложения по собственным формам, т.е. по синусам либо косинусам. Для этого сначала найдем колебания замкнутого кольца ($-\pi r \le x \le \pi r$) под действием пары точечных сил. Для получения функции свободно опертого полукольца возьмем пару антисимметричных сил ($f_w = \delta(x - x_1) - \delta(x + x_1)$), а для подвижной заделки — пару симметричных сил ($f_w = \delta(x - x_1) + \delta(x + x_1)$).

Разложим смещения и указанные силы по синусам (с.о.) либо по косинусам (п.з.):

$$\begin{gathered} w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \{\sin/\cos\}(nx/r), \\ f_w = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \{\sin/\cos\}(nx/r), \\ F_n = 2\{\sin/\cos\}(nx_1/r)/\pi r,\ n > 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Для нерастяжимого кольца форма колебаний с $n = 0$ отсутствует, поэтому суммы начинаются с $n = 1$. Подставим разложения (6) в уравнение (5) и получим для каждого n:

$$\begin{gathered} -n^2(n^2-1)^2 A_n = -(m\omega^2 r^4(1 - i\eta_c)/E_\eta I) \times \\ \times (n^2+1)A_n - r^6(n/r)^2 F_n/E_\eta I. \end{gathered} \tag{7}$$

Выразим из (7) собственные частоты кольца ω_n, положив в нем $F_n = 0$, $\eta = 0$, $\eta_c = 0$:

$$\omega_n^2 = \frac{EI}{mr^4} f_n(n),\ f_n(n) \equiv \frac{n^2(n^2-1)^2}{(n^2+1)},\ n = 1, 2, \ldots$$

Используем введенное здесь выражение $f_n(n)$ для определения частотного числа n_ω для кольца:

$$f_n(n_\omega) = n_\omega^2(n_\omega^2 - 1)^2/(n_\omega^2 + 1) \equiv m\omega^2 r^4/EI.$$

Отметим, что для кольца частотное число не меньше единицы $n_\omega \ge 1$. Функция f_n и частота ω монотонно возрастают с ростом частотного числа ($\partial f_n/\partial n_\omega > 0, \forall n_\omega > 1$). Умножим уравнение (7) на $-(1 + i\eta)$, поделим на $(n^2 + 1)$ и перепишем в виде:

$$\begin{gathered} f_n(n)(1 + i\eta)A_n = \\ = f_n(n_\omega)(1 - i\eta_c)A_n + r^4 F_n/\left(EI(1 + n^{-2})\right), \end{gathered}$$

или так:

$$\begin{gathered} \Omega_n A_n = F_n/\left(m\omega^2(1 + n^{-2})\right), \\ \Omega_n = \left(f_n(n)/f_n(n_\omega)\right)(1 + i\eta) - (1 - i\eta_c). \end{gathered}$$

Подставим выражение для коэффициентов A_n в (6) и получим выражение для смещения кольца под действием пары точечных сил, т.е. получим функцию Грина для полукольца в виде бесконечного ряда:

$$G(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{1}{\pi m r \omega^2}\bar{G},\ \bar{x} = x/\pi r.$$

$$\text{с.о.: } \bar{G} = \bar{G}^{\sin}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 2\sum_1^{\infty} \frac{\sin(\pi n\bar{x}_1)\sin(\pi n\bar{x}_2)}{(1 + 1/n^2)\Omega_n}, \tag{8}$$

$$\text{п.з.: } \bar{G} = \bar{G}^{\cos}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 2\sum_1^{\infty} \frac{\cos(\pi n\bar{x}_1)\cos(\pi n\bar{x}_2)}{(1 + 1/n^2)\Omega_n}.$$

Отметим, что это выражение отличается от подобного выражения (2) для балки дополнительным множителем $(1+1/n^2)$ в знаменателе, связанным с учетом касательной инерции кольца. А также отсутствием слагаемого для $n = 0$.

Теперь получим явное выражение для функции Грина полукольца. Подставим в уравнение (5) функцию $w = \cos n_i x/r$. Неизвестные комплексные числа n_i будут корнями уравнения $\Omega_n(n_i) = \left(f_n(n_i)/f_n(n_\omega)\right)(1 + i\eta) - (1 - i\eta_c) = 0$. Получим их, решая кубическое уравнение относительно n_i^2:

$$n_i^2(n_i^2 - 1)^2 - a(n_i^2 + 1) = 0,$$
$$a = \left(f_n(n_\omega)(1 - i\eta_c)/(1 + i\eta)\right),$$
$$n_i^6 - 2n_i^4 + (1 - a)n_i^2 - a = 0.$$

Переместим предварительно начало координат замкнутого кольца в точку, диаметрально противоположную точечной силе ($x' = x - \pi r$, $f_w(x') = \left(\delta(\pi r) + \delta(-\pi r)\right)/2$). Смещения w представимы в виде суммы трех косинусов с тремя найденными комплексными числами n_i:

$$w(x') = \sum_{i=1}^{3} A_i \cos n_i x'/r.$$

В точке действия силы $x' = \pi r$ должны выполняться три условия: нулевой наклон, нулевое продольное смещение и равенство для перерезывающей силы:

$$w'(\pi r) = 0,\ v(\pi r) = 0, E_\eta I w'''(\pi r) = 1/2.$$

Из них получается система трех уравнений относительно коэффициентов A_1, A_2, A_3:

$$\begin{cases} \sum A_i n_i \sin \pi n_i = 0,\ i = 1,2,3, \\ \sum A_i n_i^{-1} \sin(\pi n_i) = 0, \\ \sum A_i n_i^3 \sin \pi n_i = b \equiv -r^3/(2E_\eta I). \end{cases}$$

Решением системы являются следующие коэффициенты:

$$A_i = \frac{b}{S}\frac{B_i}{\sin \pi n_i}, B_i = n_i(n_{i+2}^2 - n_{i+1}^2), S = \sum B_i n_i^3.$$

Здесь подразумевается циклическая замена индексов: $n_4 = n_1$, $n_5 = n_2$ в выражении для B_i. Вернем начало координат в точку приложения силы ($f_w = \delta(x)$, $|x| = \pi r - |x'|$), а смещения w для замкнутого кольца запишем в виде:

$$w(x) = \frac{1}{2E_\eta I/r^3} g_0(\bar{x}),$$

$$g_0(\bar{x}) = -\sum_{i=1}^{3} \frac{B_i/S \cos\left(\pi n_i(1 - |\bar{x}|)\right)}{\sin \pi n_i}.$$

Функция Грина для полукольца с подвижной заделкой получается, как сумма двух функций Грина с силами, расположенными в точках x_1, $-x_1$. Для свободно опертого полукольца эти силы противофазные, и синфазные для подвижно заделанного. Поэтому можно записать:

$$G(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = c^r g(\bar{x}_{\min}, \bar{x}_{\max}),$$
$$c^r = \frac{1}{2E_\eta I\ /\ r^3} = \frac{1}{\pi r m \omega^2}\frac{\pi f_n(n_\omega)}{2(1 + i\eta)}, \qquad (9)$$
$$\text{с.о.}: g(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = g_0(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - g_0(\bar{x}_2 + \bar{x}_1),$$
$$\text{п.з.}: g(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = g_0(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + g_0(\bar{x}_2 + \bar{x}_1).$$

Значения для функции Грина, полученные с использованием $n_{\max}$ членов ряда (8) и полученные в явном виде (9), отличаются, как и для балки, на величину порядка четвертой степени отношения чисел $n_\omega/n_{\max}$.

Снижение уровней колебаний R кольцевого виброизолятора будем считать, сравнивая амплитуду колебаний в точке, т.е. значение функции Грина, с амплитудой колебаний всего полукольца как точечной массы под действием единичной силы:

$$R = -20 \lg\left(\pi r m \omega^2 |G|\right) = -20 \lg\left|\frac{\pi f_n(n_\omega)}{2(1 + i\eta)} g\right|.$$

Под словом “виброизоляция” в статье понимается разница уровней колебаний до и после установки виброизолятора. Она не определялась.

На рис. 5 показан пример функции $\bar{g}_0 = g_0/g_0(1)$ для кольца со знаками плюс и минус. Отмечена одна точка самопересечения и две точки пересечения функций. В отличие от рис. 2 для балки, точки пересечения достаточно удалены друг от друга.

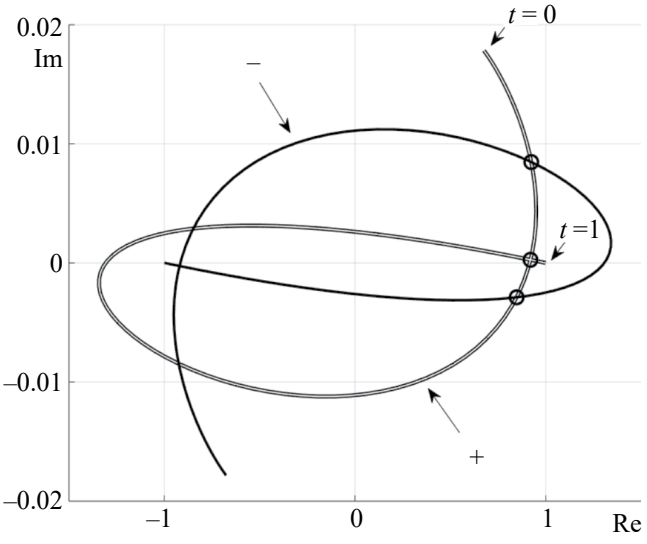

Рис. 5. Кривые для функций кольца $+\bar{g}_0, -\bar{g}_0$ в комплексной плоскости и точки пересечения. $n_\omega = 2.5$, $\eta = 0.01$, $\eta_c = 0$.

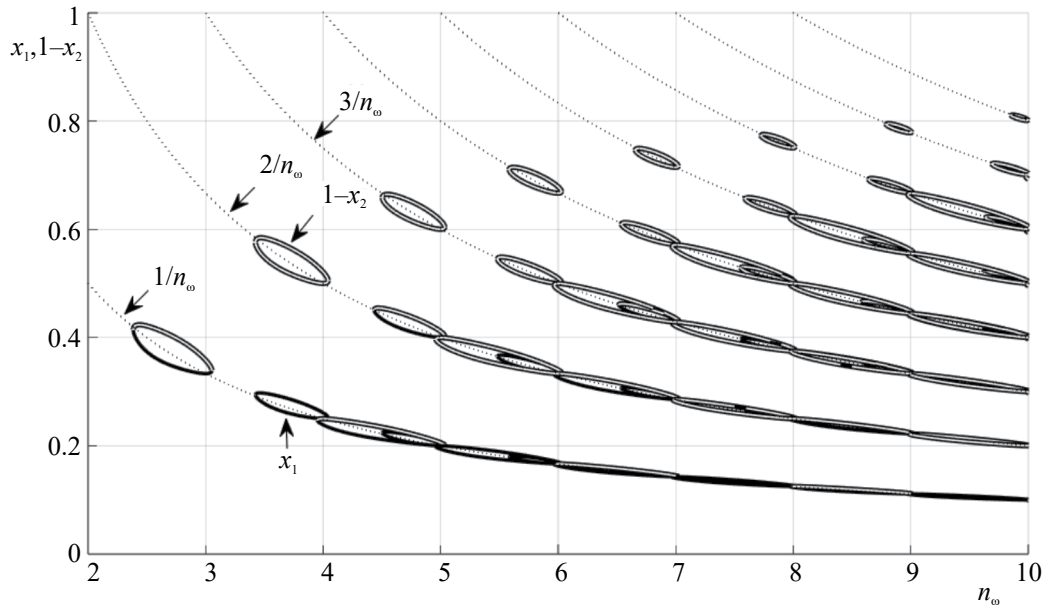

Рис. 6. Координаты корней функции Грина для полукольца со свободным опиранием, в зависимости от частотного числа. $\eta = 0.01$, $\eta_c = 0$.

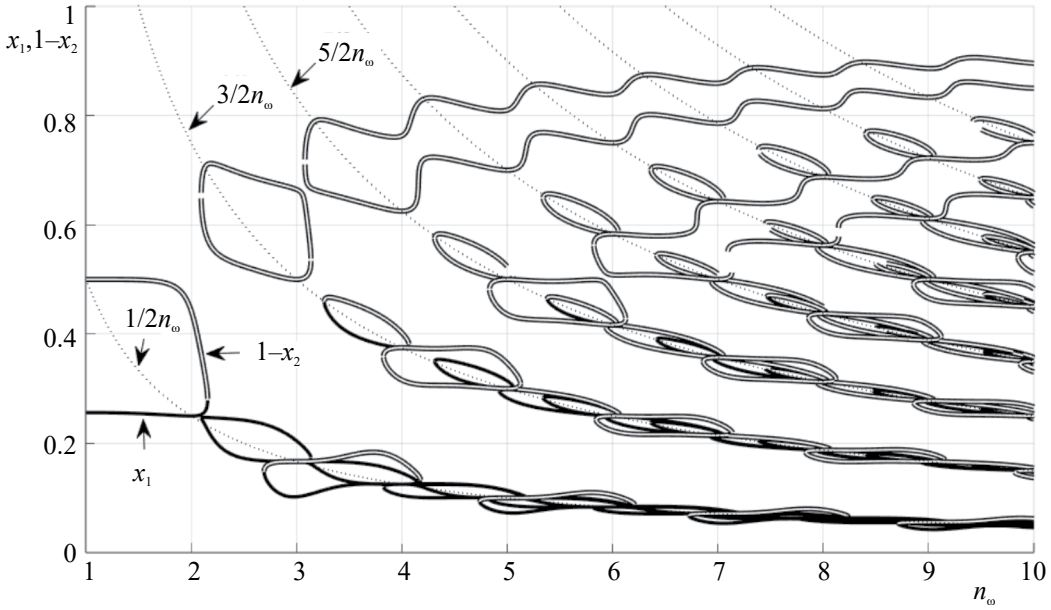

Рис. 7. Координаты корней функции Грина для полукольца с подвижной заделкой, в зависимости от частотного числа. $\eta = 0.01$, $\eta_c = 0$.

На рис. 6 показаны решения для полукольца со свободным опиранием. Координата x_2 изображена черно-белыми линиями и перевернута. Как и для свободно опертой балки, решения образуют группы в виде замкнутых вытянутых кривых, лежащих вдоль гипербол $1/n_\omega$, $2/n_\omega$, ... В отличие от рис. 3 для балки, здесь имеются дополнительные корни и есть наложения кривых. Минимальное частотное число, при котором есть решение, равно $n_{\omega\min} = 2.385$. С ростом потерь вытянутые кривые становятся короче. Последней исчезает самая низкочастотная группа. Максимальный тангенс потерь, при котором существует решение, равен $\eta_{\max} = 0.4445$.

На рис. 7 показаны корни для полукольца с подвижной заделкой. Здесь наблюдаются существенные отличия от картин решений для балки (рис. 3) и свободно опертого полукольца (рис. 6). Во-первых, решения начинаются сразу с нулевой частоты,

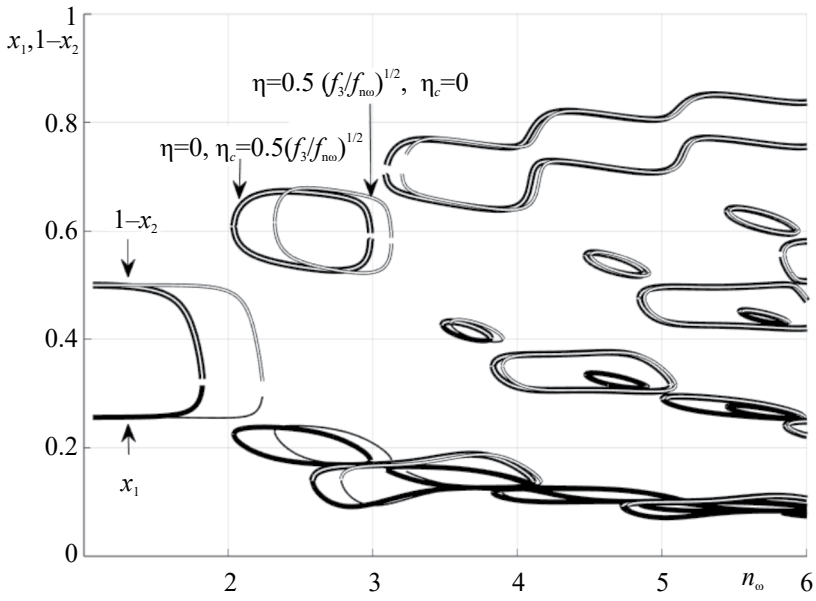

Рис. 8. Сравнение координат корней, полученных для кольца с подвижной заделкой с вязкими потерями (жирные линии), с координатами для кольца со структурными потерями (тонкие линии) при одинаковой зависимости тангенсов потерь от частоты.

т.е. с $n_\omega = 1$, поскольку поступательное движение недеформируемого кольца уже имеет точки нулевой нормальной амплитуды в точке $x = \pi r/2$. Во-вторых, линии решений имеют более сложную форму. Все группы решений здесь можно разбить на два типа. Одни имеют форму вытянутых "колечек", как и на рис. 3, 6. Эти группы исчезают с ростом потерь. Вторые имеют сплюснутую четырехугольную форму. Они сливаются в непрерывные волнистые линии с ростом частоты. Кривые второго типа почти не смещаются с ростом потерь вплоть до $\eta = 0.2$. А при дальнейшем его росте сливаются с соседними группами этого типа. Причем не удалось найти частоты, выше которых не существовало бы решений, даже при $\eta = 1.0$.

Как и для балки, корни функции Грина для кольца при наличии вязких потерь соответствуют корням без вязких потерь, но с измененным тангенсом структурных потерь и другой частотой. Продемонстрируем это.

На рис. 8 сравнивается расчет координат для корней, проведенный для кольца с одними вязкими потерями и с одними структурными потерями. Тангенс вязких потерь здесь при $n_\omega = 3$ равен 0.5 и зависит от n_ω как $\eta_c(n_\omega) = 0.5\sqrt{f_n(3)/f_n(n_\omega)}$. Тангенс структурных потерь здесь имел точно такую же зависимость от частоты: $\eta(n_\omega) = 0.5\sqrt{f_n(3)/f_n(n_\omega)}$. Видим, что кривые для вязких потерь получаются смещением кривых для структурных потерь в сторону меньших частот. С ростом n_ω потери падают и различие становится незаметным.

Если функция Грина полукольца обращается в ноль для некоторой пары точек, то можно создать виброизолятор из замкнутого кольца с теоретически бесконечной виброизоляцией, если прикрепить упругие элементы к двум парам таких точек. Выберем подходящее для этого решение.

На рис. 9 показана в увеличении часть рис. 7, при этом оставлены только решения с $x_1 < 1/4$, $x_2 > 1-1/4$. Они лучше подойдут для создания виброизолятора, поскольку точки будут ближе к вертикальной оси, по которой через виброизолятор передается усилие, чем к горизонтальной. Цифрой *1* отмечено самое низкочастотное среди оставленных решение. Цифрами *2–7* отмечены решения, для которых графики для x_1 и для x_2 проходят через экстремум почти при одном частотном числе.

Равенство нулю производных сразу для двух координат ($\partial x_1/\partial n_\omega = \partial x_2/\partial n_\omega = 0$) означало бы, что это корень второго порядка для функции Грина, т.е. ее производная по частоте тоже равна нулю ($\partial G/\partial\omega = 0$). Согласно расчетам, частотные числа, при которых через ноль проходят производные $\partial x_1/\partial n_\omega, \partial x_2/\partial n_\omega$, в отмеченных цифрами решениях не равны, но отличаются мало (например, для решений *2*, *3* они отличаются только в пятом знаке). Это значит, что на соседних частотах будет сохраняться высокая виброизоляция. Для решений *6*, *7* имеются очень широкие, почти горизонтальные, участки на графиках x_1 и x_2. Это значит, что для них большая виброизоляция будет сохраняться в широкой полосе частот. Решение *1*, напротив,

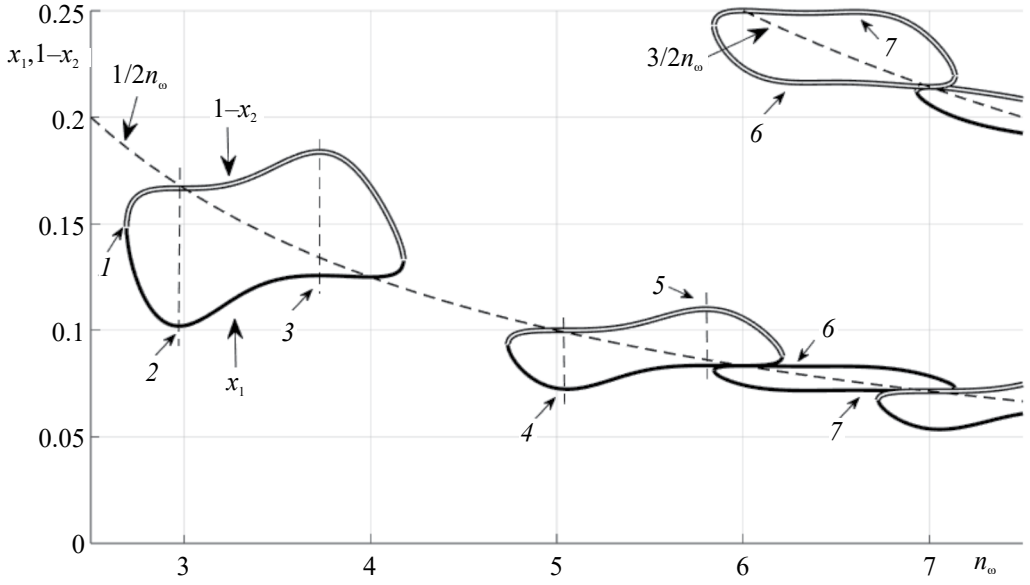

Рис. 9. Координаты корней, расположенных близко к краям, для полукольца с подвижной заделкой. $\eta = 0.01$, $\eta_c = 0$.

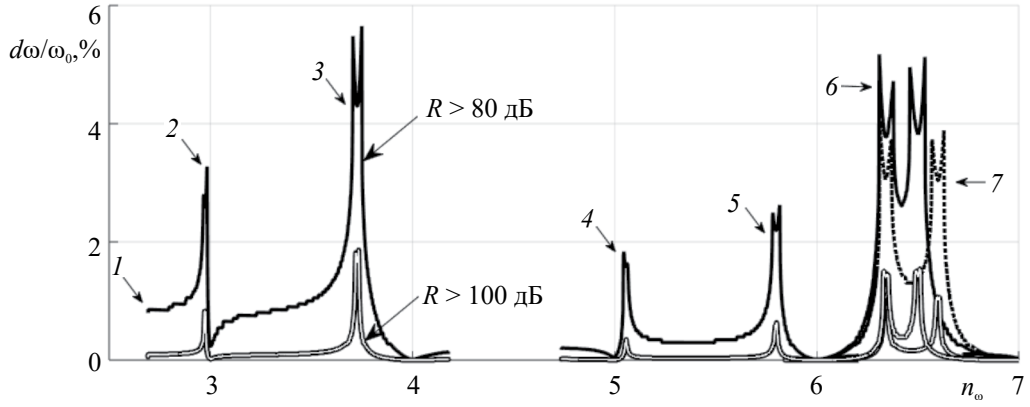

Рис. 10. Относительная ширина полосы частот со снижением уровня колебаний больше 80, 100 дБ. $\eta = 0.01$, $\eta_c = 0$.

соответствует вертикальному участку кривых. Для него будет сильным спад виброизоляции на соседних частотах. Показанные на этом рисунке группы решений относятся к типу со слабой зависимостью от уровня потерь.

Чтобы продемонстрировать, насколько отличаются друг от друга решения с точки зрения виброизоляции на соседних частотах, на рис. 10 показана относительная ширина полосы частот в процентах, в которых снижение уровня колебаний выше, чем 80 или 100 дБ. Здесь $d\omega$ — ширина полосы, ω_0 — частота настройки. Видно, что относительная ширина частот для разных решений отличается более чем на порядок. На графиках имеются пики, соответствующие горизонтальным участкам на рис. 8, отмеченным цифрами *2*–*7*. Наиболее интересным для реализации представляется решение *3* с частотным числом $n_\omega = 3.727$, поскольку оно имеет не высокую частоту и самую большую относительную ширину частот с высокой виброизоляцией.

На рис. 11 показаны графики снижения уровней колебаний $R(\omega/\omega_0)$ для вариантов *1*, *3*, *6*. Точные параметры для них, а также относительная ширина полосы частот с превышением 100 дБ указаны в табл. 1. Видим, что на частоте настройки снижение уровней колебаний уходит в бесконечность. В расчете оно превышает 300 дБ. Для варианта *1* оно относительно быстро спадает. Для варианта *3* спадает наиболее медленно. Вариант *6* интересен тем, что имеет соседний максимум, расширяющий полосу с высокой виброизоляцией.

На рис. 12 показан виброизолятор с параметрами решения *3*. Показана форма колебаний в фазе 0 и π. Сверху изображена платформа, совершающая гармонические колебания на частоте настройки. Снизу показано основание, на которое воздействие теоретически не передается.

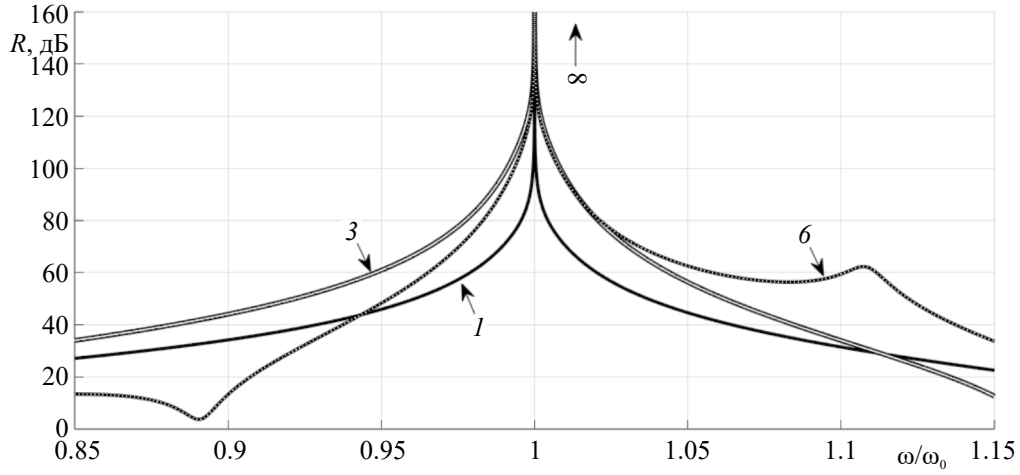

Рис. 11. Снижение уровней колебаний для кольцевых виброизоляторов с вариантами параметров *1*, *3*, *6*, в зависимости от относительной частоты. $\eta = 0.01$, $\eta_c = 0$.

Таблица 1. Параметры кольцевых виброизоляторов *1*, *3*, *6*.

Вар.	η	n_ω	x_1	x_2	$d\omega/\omega_0$ (100 дБ), %
1	0.01	2.693	0.1464469604491653	0.8499628915743882	0.09
3	0.01	3.727	0.1257077668761427	0.8162544674098440	1.6
6	0.01	6.342	0.0830372075094027	0.7837598474618019	1.4

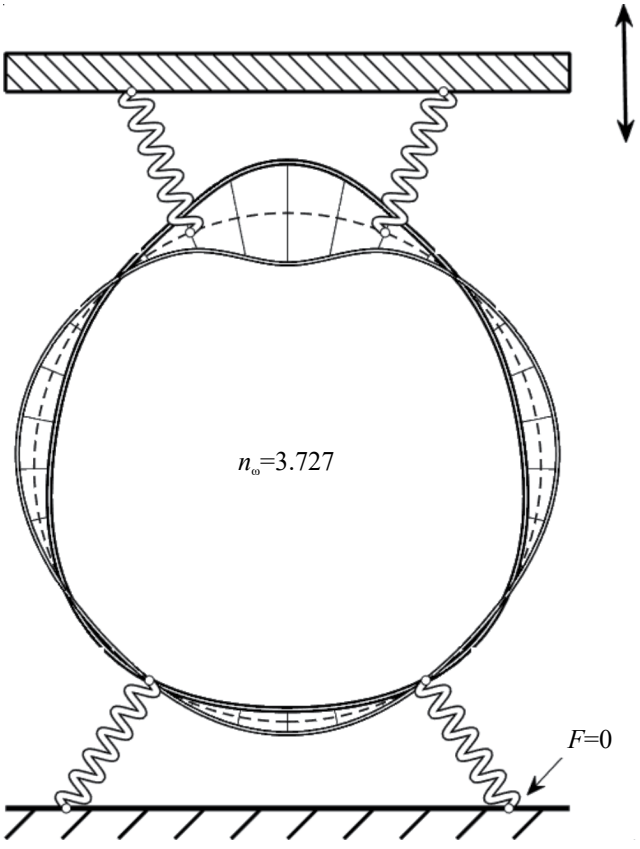

Рис. 12. Кольцевой виброизолятор с теоретически бесконечной виброизоляцией на одной частоте и высокой виброизоляцией на соседних частотах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Функция Грина для балки и полукольца для двух вариантов граничных условий была записана двумя способами: в явном виде и в виде разложения по собственным формам колебаний. Явное выражение для балки и полукольца, зависящее от двух координат, было представлено в виде суммы двух функций: функции от суммы координат и функции от их разницы. Поиск корней функции Грина сводился к поиску на комплексной плоскости точек пересечения и самопересечения таких кривых. Наличие точек пересечения кривых наглядно демонстрирует существование нулей у функции Грина. Вместо частоты в расчетах и рисунках предложено пользоваться более удобным частотным числом n_ω, совпадающим с числом полуволн на резонансных частотах.

Показано, что для трех конфигураций расчета (для свободно опертой балки, для балки с подвижной заделкой и для полукольца со свободным опиранием) корни группируются в замкнутые вытянутые линии. С ростом потерь эти замкнутые линии сжимаются и исчезают. Последней исчезает самая низкочастотная группа. Найдены минимальные частотные числа $n_{\omega\min}$ и максимальные тангенсы структурных потерь $\eta_{max,}$ ограничивающие область существования решений при отсутствии вязких потерь. Они указаны в табл. 2.

Таблица 2. Минимальные частотные числа и максимальные тангенсы структурных потерь.

Тело	Г.У.	$n_{\omega min}$	η_{max}
балка	с.о.	2.985	0.1095
балка	п.з.	1.965	0.2445
полукольцо	с.о.	2.385	0.4445
полукольцо	п.з.	1 ($\omega = 0$)	нет

Выражения получены с учетом структурных и вязких потерь. Показано, что корням функции Грина для тела с вязкими потерями соответствуют корни с одними только структурными потерями с измененным их тангенсом и частотой.

Для четвертой конфигурации, т.е. для полукольца с подвижной заделкой, картина решений иная. Часть корней исчезает с ростом потерь, а часть почти не меняется. Решения могут существовать на любых частотах и при любых уровнях потерь. Существуют решения с близкой к нулю производной функции Грина по частоте. Эти решения наилучшим образом подходят для создания виброизолятора в виде замкнутого кольца с двумя парами симметрично расположенных радиальных упругих креплений. Такие виброизоляторы, при условии постоянства тангенса потерь, будут иметь как теоретически бесконечную виброизоляцию на расчетной частоте, так и высокую виброизоляцию на соседних с расчетной частотах.

Исследования проведены в рамках государственного задания, выполняемого научными коллективами исследовательских центров и (или) научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, №020-00006-23-00 “Развитие технологий, методов и средств в обеспечение использования и совершенствования испытательной и полигонной базы в области аэродинамики, прочности, динамики полета, гидродинамики и аэроакустики летательных аппаратов”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов В.Т., Никифоров А.С.* Виброизоляция в судовых конструкциях. Л.: Судостроение, 1975. 232 с.
2. *Клюкин И.И.* Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинах при помощи резонансных колебательных систем // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 2. С. 213–219.
3. *Лапин А.Д.* Поглощение изгибных волн парой цепочек механических резонаторов, установленных на пластине // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 3. С. 227–229.
4. *Cha F.D., Chen C.-Y.* Quenching vibration along a harmonically excited linear structure using lumped masses // J. Vibr. Control. 2011. V. 17. № 4. P. 527–539. https://doi.org/10.1177/1077546310362448
5. *Foda M.A., Alsaif K.* Vibration suppression of a beam structure by intermediate masses and springs // J. Vibr. Control. 2002. V. 256. № 4. P. 629–645. https://doi.org/10.1006/jsvi.5012
6. *Patil S.S., Awasare P.* Vibration reduction at desired locations on a beam by creating nodes using tunable vibration neutralizers // J. Vibr. Control. 2016. V. 22. № 1. P. 205–233. https://doi.org/10.1177/1077546314528964
7. *Shen Y., Zhou X., Cha P.D.* Imposing points of zero displacement and zero slopes on a plate subjected to steady-state harmonic excitation // J. Vibr. Control. 2018. V. 24. № 20. P. 4904–4920. https://doi.org/10.1177/1077546317738616
8. *Cha P.D., Rinker J.M.* Enforcing Nodes to Suppress Vibration Along a Harmonically Forced Damped Euler-Bernoulli Beam // ASME J. Vib. Acoust. 2012. V. 134. № 5. P. 051010-1–10. https://doi.org/10.1115/1.4006375
9. *Foda M.A., Alsaif K.* Control of lateral vibrations and slopes at desired locations along vibrating beams // J. Vibr. Control. 2009. V. 15. № 11. P. 1649–1678. https://doi.org/10.1177/1077546309103256
10. *Albassam B.A.* Vibration control of a flexible beam structure utilizing dynamic Green’s function // J. King Saud University-Engineering Sciences. 2021. V. 33. №. 3. P. 186–200. https://doi.org/10.1016/j.jksues.2020.03.005
11. *Лазарев Л.А.* Панели с резонаторами малой добротности, имеющие теоретически бесконечную звукоизолирующую способность на одной частоте // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 4. С. 522–528.
12. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Ред. совет: Челомей В.Н. (пред.). М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. Колебания линейных систем. Под ред. Болотина В.В. 1978. 352 с. ил.
13. *Rao S.S.* Vibration of continuous systems. John Wiley & Sons, 2019. https://doi.org/10.1002/9781119424284
14. *Abu-Hilal M.* Forced vibration of Euler–Bernoulli beams by means of dynamic Green functions // J. Sound Vib. 2003. V. 267. № 2. P. 191–207.
15. *Chidamparam P., Leissa A.W.* Vibration of planar curved beams, rings, and arches // Appl. Mech. Rev. 1993. V. 46. № 9. P. 467–483.

Zeros of the Green function for a damped beam and a half-ring

L. A. Lazarev[a,*]

[a]*Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), 17 Radio Street, 105005 Moscow, Russia*

**e-mail: leonidl74@mail.ru*

For an Euler Bernoulli beam and a thin inextensible half-ring, it is shown that their Green's function for normal forces and displacements can be zero in the presence of dissipative losses. The beam and the half-ring are considered in two versions: with a simple support and movable seal at the ends. Solutions exist in wide frequency bands. For a half-ring with a movable seal, there are solutions for which the frequency derivative of the Green's function is close to zero with a frequency-independent loss tangent. A vibration isolator in the form of a closed ring with four supports arranged at points corresponding to one of these solutions will have both theoretically infinite vibration isolation at one frequency and large vibration isolation in a wide band of neighboring frequencies.

Keywords: Euler–Bernoulli beam, half-ring, closed ring, Green's function, vibration isolator, infinite vibration isolation